Intégrale de Riemann

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

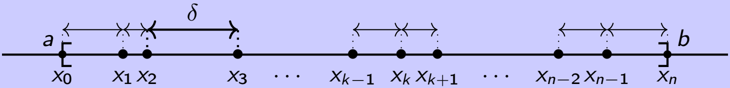
Sommaire

Définition 1.1 (Subdivision)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- *Une **subdivision** de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est une famille **finie** de réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*
  Il s'agit donc d'un « découpage » de l'intervalle $[a, b]$.
- *Le **pas** d'une telle subdivision est le nombre $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k - x_{k-1}\}$.*

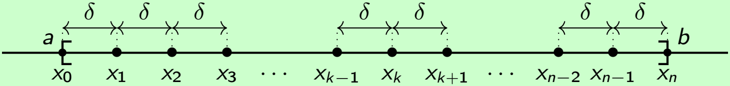
  *C'est la longueur du **plus grand** intervalle dans le découpage de $[a, b]$.*



Exemple 1.2 (Subdivision « équirépartie »)

La subdivision **équirépartie** est issue d'un découpage **équidistant** de $[a, b]$ en n intervalles de longueur identique $\delta = \frac{b-a}{n}$.
Les points de subdivision sont donnés par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ (ils sont répartis selon une progression arithmétique de raison δ) :

$$\sigma = \left(a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, a+3\frac{b-a}{n}, \dots, b\right).$$



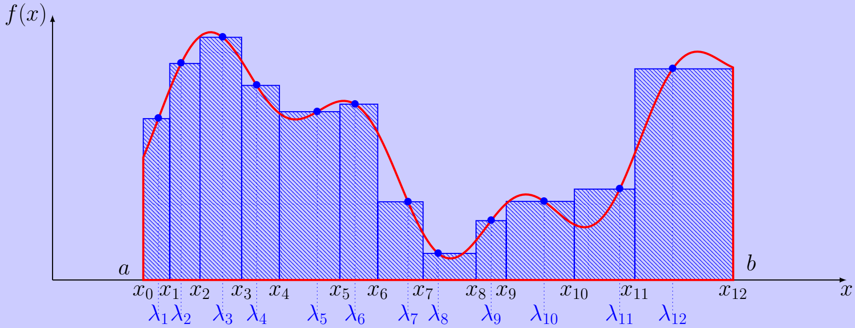
Définition 1.3 (Somme de Riemann)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, et $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels tels que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (on dit alors que la famille Λ est ***adaptée*** *à la subdivision σ).*

On appelle ***somme de Riemann*** *de la fonction f associée à σ et à Λ le nombre*

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\lambda_k).$$

Ce nombre représente l'aire de la réunion des rectangles de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(\lambda_k)$.

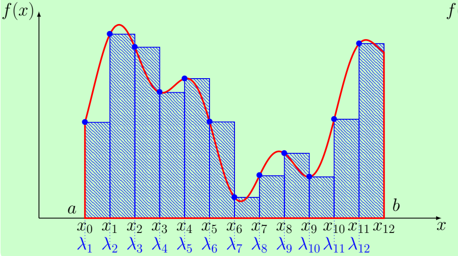


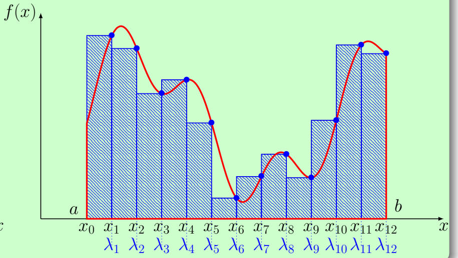
Exemple 1.4 (Subdivision équirépartie)

Considérons une subdivision « équirépartie » avec comme choix des λ_k une des bornes de chaque sous-intervalle : $\begin{cases} x_k = a + k\dfrac{b-a}{n},\ 0 \leqslant k \leqslant n \\ \lambda_k = x_{k-1} \text{ ou } x_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$

Les sommes de Riemann correspondantes s'écrivent :

$$S(f,\sigma,\Lambda) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$





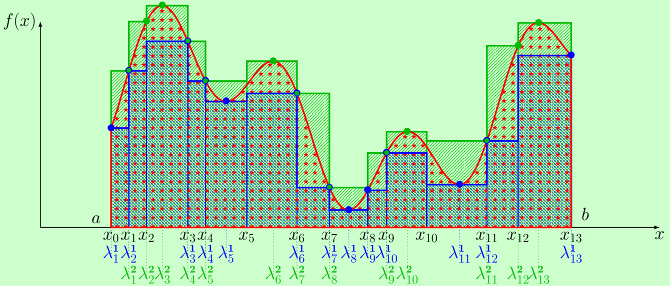
Exemple 1.5 (Sommes de Darboux (facultatif))

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$.
Introduisons les valeurs « extrémales » relatives à chacun des sous-intervalles de σ :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{et} \quad M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Par continuité, f **atteint** ses bornes : il existe donc des λ_k^1, λ_k^2 dans $[x_{k-1}, x_k]$ tels que $f(\lambda_k^1) = m_k$ et $f(\lambda_k^2) = M_k$.
Les sommes de Riemann correspondant aux familles adaptées $\Lambda_1 = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1)$ et $\Lambda_2 = (\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ sont appelées **sommes de Darboux** :

$$S_1 = S(f, \sigma, \Lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{et} \quad S_2 = S(f, \sigma, \Lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$



Remarque : toutes les sommes de Riemann sont comprises entre S_1 et S_2.

Sommaire

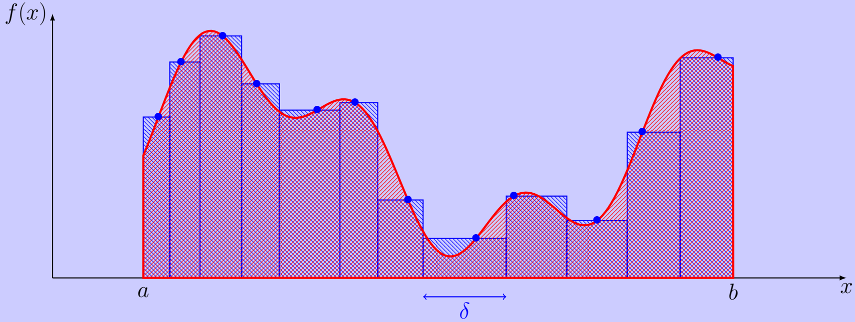
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction ***bornée****. S'il existe un nombre réel I tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \sigma \text{ subdivision de pas} < \delta,\ \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma,\ |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est ***intégrable (au sens de Riemann)*** *sur $[a, b]$ et le nombre I est l'****intégrale de f sur [a, b]****. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$.*

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi ***toutes*** *ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont* ***convergentes de même limite finie.***



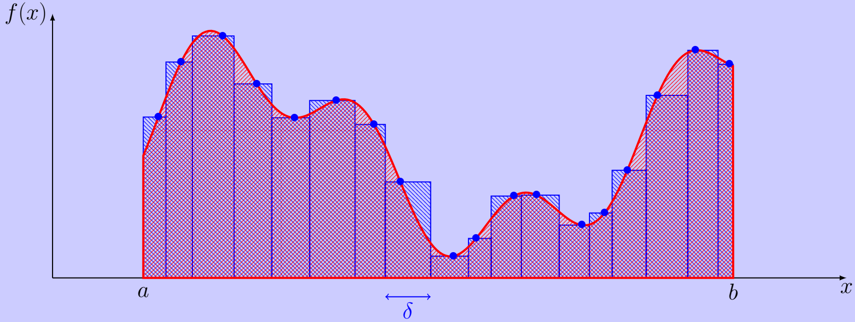
Définition 2.1 (Intégrabilité)

*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel I tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \sigma \text{ subdivision de pas} < \delta,\ \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma,\ |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

*on dit que la fonction f est **intégrable (au sens de Riemann)** sur $[a, b]$ et le nombre I est l'**intégrale de f sur $[a, b]$**. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$.*

*Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie.***



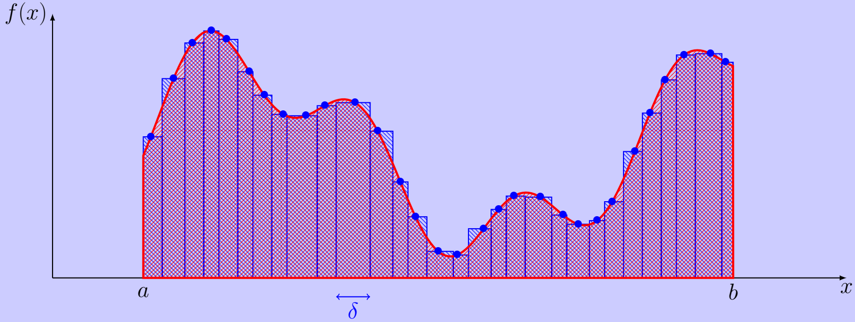
Définition 2.1 (Intégrabilité)

*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel I tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, \sigma \text{ subdivision de pas} < \delta,\ \forall\, \Lambda \text{ adaptée à } \sigma,\ |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

*on dit que la fonction f est **intégrable (au sens de Riemann)** sur $[a, b]$ et le nombre I est l'**intégrale de f sur $[a, b]$**. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$.*

*Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie.***

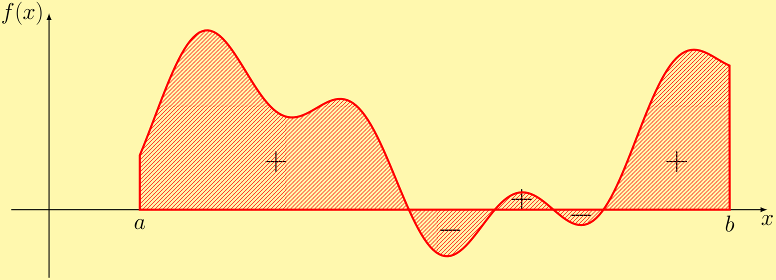


Remarque 2.2 (Notations/conventions)

- La variable utilisée dans la notation de l'intégrale est dite **muette** :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(☺)\mathrm{d}☺ = \cdots$$

- Le nombre $\int_a^b f$ représente l'« **aire algébrique** » entre la courbe de f dans un repère orthonormal et l'axe des abscisses, en comptant **négativement** les parties **au-dessous** de l'axe et **positivement** les parties **au-dessus.**

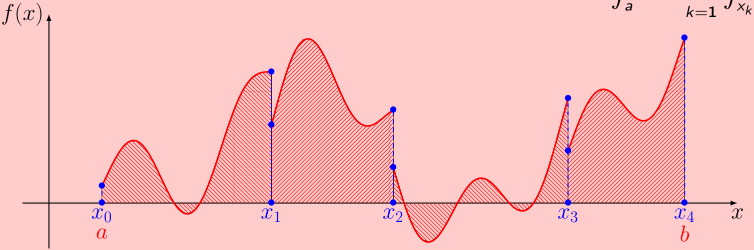


- Conventions : on convient que $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- *Toute fonction* ***continue*** *sur $[a, b]$ est* ***intégrable*** *sur $[a, b]$.*
- *Plus généralement, toute fonction* ***continue par morceaux*** *sur $[a, b]$ (i.e. admettant un nombre* ***fini*** *de discontinuités, celles-ci étant de 1^re^ espèce) est* ***intégrable*** *sur $[a, b]$.*

  Plus précisément, en notant $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ses discontinuités et en posant $x_0 = a$ et $x_n = b$, on peut prolonger f par continuité sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Notons $\tilde{f}_k$ ce prolongement. Alors $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{f}_k$.

  Remarquons que si l'on modifie la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, alors la valeur de son intégrale reste la même.
- *Toute fonction* ***monotone*** *sur $[a, b]$ est* ***intégrable*** *sur $[a, b]$.*

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie,** on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante,** cela donne

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda = \lambda(b-a)\quad \textbf{(aire d'un rectangle !)}$$

- Dans le cas de la fonction **exponentielle,** cela donne

$$\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{a+k\frac{b-a}{n}} = \mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a.$$

- Dans le cas de la fonction **identité,** cela donne

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\quad \textbf{(aire d'un trapèze !)}$$

- Dans le cas de la fonction **carré,** cela donne

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

Considérons la fonction «indicatrice» (ou «caractéristique») de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ d'un intervalle $[a, b]$ de pas arbitrairement petit, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ deux familles adaptées à la subdivision σ telles que

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

Les sommes de Riemann correspondantes valent

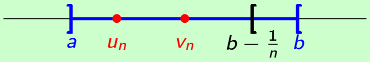
$$S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda) = b - a \quad \text{et} \quad S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda') = 0.$$

Elles ne peuvent pas tendre vers une limite commune.
Ainsi, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ **n**'est intégrable sur **aucun** intervalle $[a, b]$.

Annexe (facultatif)

Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel et un irrationnel (en fait une infinité de chaque). On dit que les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$.

En effet : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Alors il existe un entier n tel que $a < b - \frac{1}{n}$.
Posons $u_n = \frac{\mathrm{E}(na)+1}{n}$ et $v_n = \frac{\mathrm{E}(na\sqrt{2})+1}{n\sqrt{2}}$. Les nombres u_n et v_n sont compris entre a et b, u_n est rationnel et v_n est irrationnel.



Proposition 2.6 (Opérations)

1. ***Linéarité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

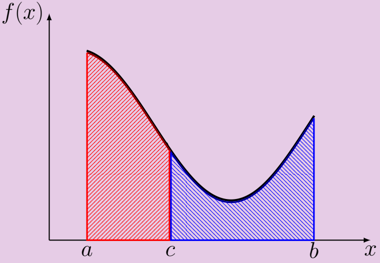
2. ***Relation de Chasles***

   Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$) Pour tout $c \in [a, b]$, f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

   ou encore

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



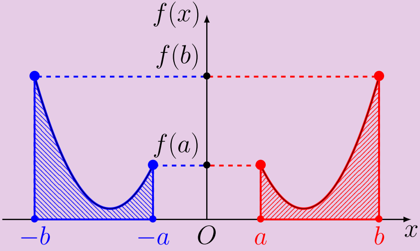
Ces propriétés restent valables lorsque $b < a$.

Proposition 2.7 (Parité)

Soit f une fonction intégrable sur $[-b, -a] \cup [a, b]$ $(0 \leqslant a \leqslant b)$.

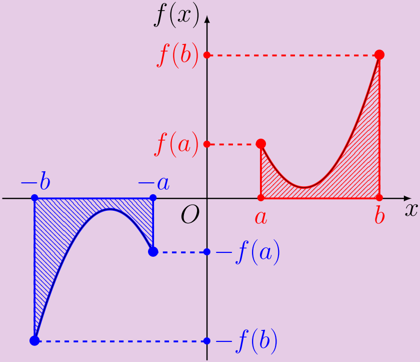
- Si f est **paire**, alors

$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



- Si f est **impaire**, alors

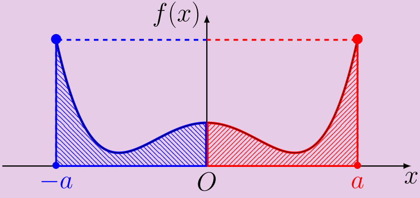
$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



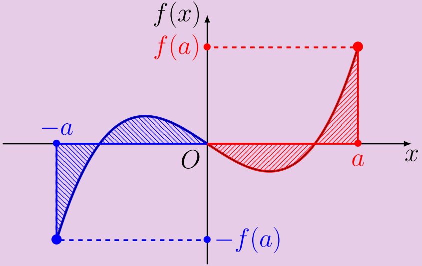
Proposition 2.7 (Parité)

Cas particulier : soit f une fonction intégrable sur $[-a, a]$ ($a \geqslant 0$).

- Si f est **paire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Autrement dit, la fonction
$$x \in [-a, a] \longmapsto \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est **impaire**.



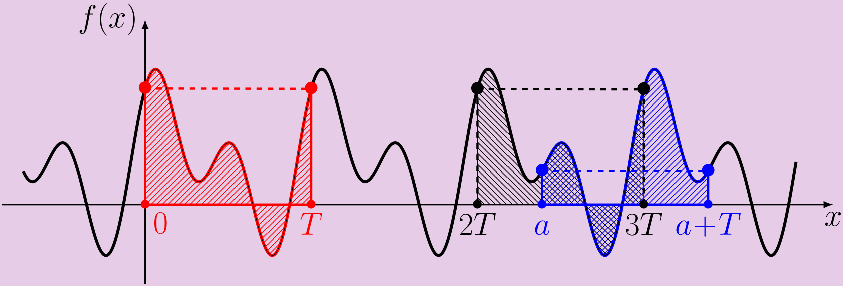
- Si f est **impaire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
Autrement dit, la fonction
$$x \in [-a, a] \longmapsto \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est **paire**.



Proposition 2.8 (Périodicité)

Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ intégrable sur $[0, T]$ ($T > 0$). Alors, pour tout réel a, f est intégrable sur $[a, a+T]$ et

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$



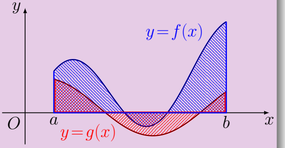
Proposition 2.9 (Ordre)

1. ***Croissance/Positivité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ ($a \leqslant b$).

   Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

   En particulier : si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.



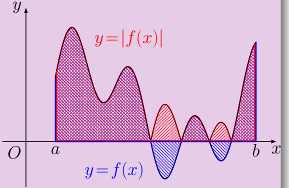
2. ***Inégalité triangulaire***

   Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ ($a \leqslant b$).

   On a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

   Plus généralement, quel que soit l'ordre de a et b,

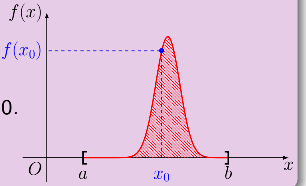
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |b-a| \times \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$



3. ***Stricte positivité***

   *Supposons f **continue** et **positive**.*

   - *S'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
   - *Si* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *alors, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$.*



Définition 2.10 (Valeur moyenne)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

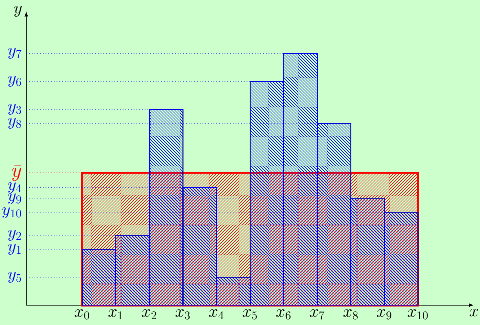
*On appelle **valeur moyenne de f sur [a, b]** le réel* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple 2.11

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction **constante par morceaux** définie par $f(x) = y_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$ où l'on a posé $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$.

Alors la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ coïncide avec la **moyenne arithmétique** des nombres $y_1, \ldots, y_n$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \bar{y}.$$



Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

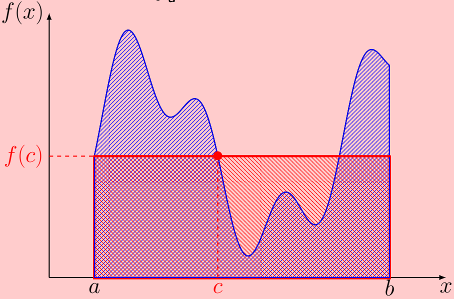
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** *et soit* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ **intégrable de signe constant**.
Alors

$$\exists\, c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour $g = 1$:

$$\exists\, c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c)$ *coïncide avec la* ***valeur moyenne*** *de* f *sur* $[a,b]$.



Exemple 2.13

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-nx}$ étant intégrable positive sur $[a,b]$,

$$\exists\, c_n \in [a,b], \quad u_n = f(c_n)\int_a^b \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} f(c_n)(\mathrm{e}^{-na} - \mathrm{e}^{-nb}).$$

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, donc bornée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Sommaire

Le théorème de la moyenne permet d'obtenir une relation de **réciprocité** entre les opérations d'**intégration** et de **dérivation** décrite dans le résultat suivant :

Théorème-définition 3.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ fixé.*
On définit la fonction suivante F sur I par $\forall\, x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

*Alors F est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I et $F' = f$.*

*On dit que F est une **primitive** de f sur I.*
*F est en fait l'**unique** primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Remarque 3.2 (Raffinement de la formule de la moyenne (facultatif))

La formule de la moyenne précédemment énoncée stipule l'existence d'un c appartenant à l'intervalle **fermé** $[a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$.
En fait, le théorème des accroissements finis appliqué à une primitive de f permet d'assurer plus précisément l'existence d'un tel c dans l'intervalle **ouvert** $]a, b[$.

Corollaire 3.3

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*
2. *si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;*
3. *pour toute primitive F de f et $(a,b) \in I^2$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.*

Notations :

- *la quantité $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(t)]_a^b$;*
- *on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute primitive de f (définie à une constante additive près).*

Corollaire 3.4

*Soit f une fonction de **classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I.*

Alors on a pour tout $(a,b) \in I^2$: $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

*On fera attention de ne pas confondre la formule précédente avec la suivante (valable pour f **continue**), l'**ordre** d'intégration et de dérivation n'étant pas le même :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

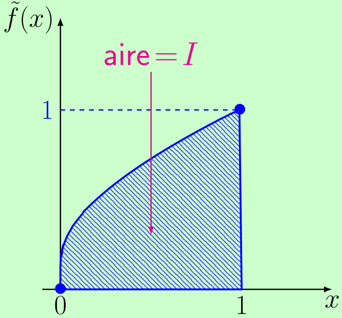
❶ ***La fonction d'intérêt :*** soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$

- La fonction f est continue sur $]0,1[$.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
- Donc f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1$. Plus précisément :

$$\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On se propose alors de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

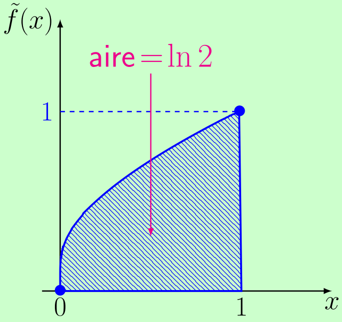
- ***Limite en*** 0^+***.*** Posons $\varphi(t) = \frac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$. En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \frac{x^2 - x}{\ln(c(x))}$. Or $\lim_{x\to 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0.$
- ***Limite en*** 1^-***.*** En décomposant $\varphi(t) = f(t) \times \frac{1}{t-1}$ et en appliquant la formule de la moyenne, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ étant négative sur $[x^2, x]$, il existe $d(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = f\big(d(x)\big) \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = f\big(d(x)\big)\ln(x+1)$. Or $\lim_{x\to 1^-} d(x) = 1$ et $\lim_{u\to 1^-} f(u) = 1$, donc $\lim_{x\to 1^-} f\big(d(x)\big) = 1$. D'où $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \ln 2.$
- ***Prolongement par continuité sur*** $[0,1]$***.*** Donc F admet un prolongement par continuité $\tilde{F}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{F}(0) = 0$ et $\tilde{F}(1) = \ln 2$ (F étant continue sur $]0,1[$).
- ***Dérivée de*** $\tilde{F}$***.*** La fonction φ étant continue sur $]0,1[$, elle admet une primitive Φ.
  On peut écrire $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$, Φ étant dérivable sur $]0,1[$.
  On voit alors que F est dérivable sur $]0,1[$ et $F'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = f(x)$.
  Par ailleurs, $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \tilde{f}(0)$ et $\lim_{x\to 1^-} F'(x) = \tilde{f}(1)$, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\tilde{F}$ est dérivable en 0 et en 1 et $\tilde{F}' = \tilde{f}$ sur $[0,1]$.

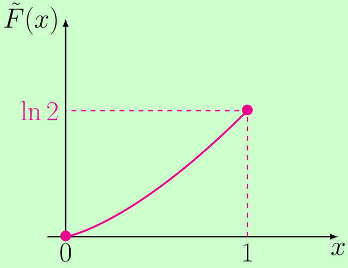
Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❸ ***Le calcul d'aire :***

- La fonction $\tilde{F}$ est une **primitive** de $\tilde{f}$ sur $[0,1]$.
  En conséquence, $I = \left[\tilde{F}(x)\right]_0^1 = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0)$ soit

$$I = \ln 2.$$





Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + Cste$

   ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$
3. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + Cste$ et $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + Cste$

   $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + Cste$
4. $\displaystyle\int \mathrm{ch}\, x \,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + Cste$ et $\displaystyle\int \mathrm{sh}\, x \,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + Cste$

   $\displaystyle\int \mathrm{th}\, x \,\mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}\, x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{th}\, x + Cste$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{argsh}\, x + Cste$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x + Cste$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Série de Riemann

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Formule de Stirling

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Entre Machin et Plouffe...

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_machin_plouffe.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Sinus et produit eulérien

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf

Notions à retenir

- Sommes de Riemann
  - ⋆ Application au calcul de limites de certaines suites
- Intégrale de Riemann
  - ⋆ Interprétation géométrique
  - ⋆ Opérations
  - ⋆ Inégalités, théorème de la moyenne
- Primitives
  - ⋆ Théorème fondamental de l'analyse : lien entre intégrale définie et primitive
  - ⋆ Primitives usuelles à connaître