Université de M'sila	Interogation-Correction	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques- G 2		Année : 2022/2023
Module Analyse 4	Semestre-4	Durée : $35m$

Barème

Exercice : 1 7pt

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2 (1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 (2) Étudier la dérivabilité de f en point $(0,0)$.

2 (3) f est elle differentiable en point $(0,0)$.

2 (4) f est elle de classe C^1 en point $(0,0)$.

Barème

Correction d'exercice 1: 7pt

(1) On étude la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

(a) La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Car, elle est un fraction rationnel.

0.5 (b) On étude la continuité de la fonction f en point $(0,0)$.

0.5 Posons : $\begin{cases} x = r\cos\theta & : r > 0,\ \theta \in]0,\ 2\pi[\\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

0.5 Donc, $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{(r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = r^2 r\sin^4\theta \leq r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$

0.5 d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, c'est à dire f est continue en point $(0,0)$.

(2) f est dérivable en point $(0,0)$. ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ sont existent. Alors,

1 (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$

1 (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{x-0} = 0.$

D'où f est dérivable en point $(0,0)$, et $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(3) f est différentiable en point $(0,0)$. ssi

0.5
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

On a bien

1
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)x-\partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Car $\dfrac{y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{(r\sin\theta)^4}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$

Donc f est différentiable en point $(0,0)$ et sa différentille est donner par :

0.5 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : df_{(0,0)}(x,y) = \partial_x f(0,0)(x-0) + \partial_y f(0,0)(y-0) = 0$

4 f est de classe C^1 en point $(0,0)$. En effet :

0.5 a D'après question 2 f est dérivable en point $(0,0)$.

b Il reste démontrer que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$.

Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$|\partial_x f(x,y)| = \left|\frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2\left|\frac{r\sin\theta(r\sin\theta)^4}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}\right| \leq 2r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \text{ et,}$$

1 $$|\partial_y f(x,y)| = \left|\frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2\left|\frac{(r\sin\theta)^3(2(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}\right| \leq 18r^3 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(0,0)$,

0.5 et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0 = \partial_y f(0,0)$,

0.5 D'où la fonction f est de classe C^1 en point $(0,0)$.

Fin

Dr. Bouafia Dahmane

Bon chance