Chapitre 2/ Algèbre de Boole et simplification des fonctions logiques

I) Représentation des fonctions logiques (suite)

3) Représentation par le tableau de Karnaugh

C'est une représentation basée sur le code binaire réfléchi (code Gray) afin de bénéficier des propriétés de symétrie. Le tableau de Karnaugh est constitué de 2^N cases pour une fonction à N variables, ainsi pour une fonction de 4 variables on a un tableau à 16 cases.

Tableau de kartnaugh à 3 variables A,B,C

AB C	00	01	11	10
0				
1				

Tableau de kartnaugh à 4 variables A,B,C,D

AB CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Sur les lignes et colonnes, on place l'état des variables d'entrée codées en code Gray ; dans chacune des cases on place l'état de la sortie (0 ou 1) pour la combinaison d'entrée correspondante.

Exemple

Représenter par le tableau de Karnaugh la fonction F suivante :

$F= AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}+ABC+A\overline{B}C$

Dans cet exemple nous avons une fonction à 3 variables, le tableau de Karnaugh est constitué donc de 8 cases :

AB C	00	01	11	10
0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**

4) Les formes canoniques d'une fonction

1ere forme canonique

Une fonction est sous la première forme canonique si elle est exprimée sous la forme d'une **somme** des combinaisons pour lesquelles elle vaut 1.

Chaque terme est appelé **minterme.**

Example: $F(A,B,C,D)=ABCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$. Nous avons ici quatre mintermes donc quatre 1 dans la représentation par Karnaugh.

Remarque : chaque terme doit faire apparaître toutes les variables ainsi :

$F(A,B,C)=\overline{A}B+ABC+A\overline{B}C$ n'est pas sous la première forme canonique, car le premier terme ne fait pas apparaître la variable C.

2eme forme canonique

Dans ce cas la fonction est exprimée sous la forme d'un **produit** de somme contenant **toutes les variables.** Chaque terme est appelé **maxterme.**

Example: $F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D)$

Méthode de calcul

1ere forme: pour écrire une fonction sous la première forme canonique on multiplie chaque terme par la somme des variables manquantes avec leur compléments

2eme forme : on détermine d'abord F sous la 1ere forme puis on complémente $F=\overline{\overline{F}}$

Exemple:

Determiner la 1ere et la 2eme forme canonique de la fonction: $F=AC+B\overline{C}$

1ere forme canonique :

$F=AC(B+\overline{B})+B\overline{C}(A+\overline{A})=ACB+AC\overline{B}+B\overline{C}A+B\overline{C}\overline{A}$

2eme forme canonique : on va d'abord écrire $\overline{F}$ sous la première forme canonique :

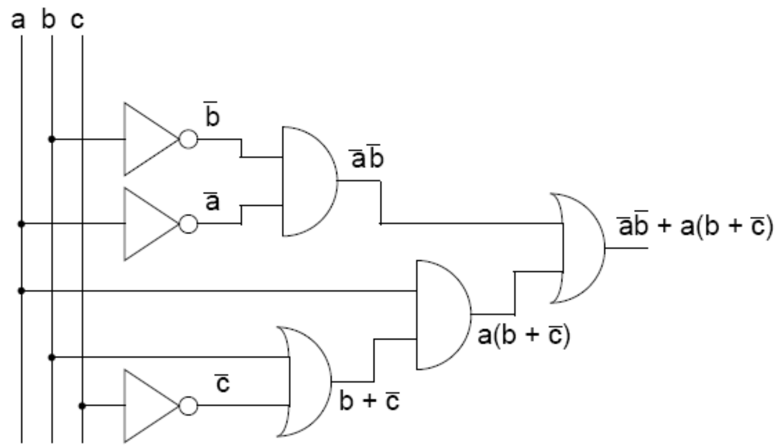
$\overline{F}=\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}$, puis on complemente:

$F=\overline{\overline{F}}=(A+B+\overline{C})+(A+B+C)+(A+\overline{B}+\overline{C})+(\overline{A}+B+C)$

5) Représentation par un logigramme

Le schéma logique d'une fonction est appelé un logigramme.

Exemple



Les fonctions incomplètement définis

Ce sont les fonctions qui, pour certaines combinaisons ne sont pas définies. L'état indifférent est représenté par un ϕ (au lieu d'un 0 ou d'un 1) pour la combinaison des variables d'entrée correspondante.

Exemple

Soit la fonction F donnée par sa représentation numérique :

$F=\sum(5,6,7,8,9)+ \phi(10,11,12,13,14,15)$

Le tableau de karnaugh de F est donné par :

AB CD	00	01	11	10
00	**0**	**0**	**ϕ**	**1**
01	**0**	**1**	**ϕ**	**1**
11	**0**	**1**	**ϕ**	**ϕ**
10	**0**	**1**	**ϕ**	**ϕ**

II) Simplification des fonctions logiques

Le but de la simplification est d'écrire la fonction sous sa forme minimale (faire intervenir le minimum d'opérations et de variables logiques) ceci dit : réduire les coûts en matériel et en temps de câblage des circuits logiques.

1) Simplification algébrique

Dans la simplification algébrique on fait appelle aux lois de l'algèbre de Boole et du théorème de DE Morgane. Le résultat de cette simplification n'est pas unique (difficile d'avoir la forme minimale).

Exemple : simplifier algébriquement la fonction : $F=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}$

On peut simplifier F, en procedant comme suit :

$$F=(\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}C)+(\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC)+(A\overline{B}\overline{C}+AB\overline{C})$$

$$=\overline{B}C(A+\overline{A})+\overline{A}B(C+\overline{C})+A\overline{C}(B+\overline{B})$$

$$=\overline{B}C+\overline{A}B+A\overline{C}$$

2) Simplification par le tableau de Karnaugh

C'est une méthode graphique très efficace qui permet d'avoir la forme minimale de la fonction.

Les étapes à suivre :

1/ dessiner le tableau de Karnaugh et représenter la fonction a simplifier : placer les '1' et les '0' dans les carrés correspondants

2/ procéder au groupement de tous les '1' se trouvant dans des cases adjacentes ou symétrique :

- Le groupement doit se porter sur un nombre puissance de 2 de cases (on doit toujours chercher à grouper le plus grand nombre de cases possible, un groupement de 8 cases par exemple est prioritaire à deux groupement de 4 cases.
- le groupement de 2^P cases réduit de P variables les mintermes initiaux .
- tous les '1' doivent être contenus dans des groupements.
- chaque groupement est appelé un **impliquant premier.**
- Un **impliquant premier essentiel** est impliquant premier qui contient au moins un '1' qui n'appartient à aucun autre groupement.

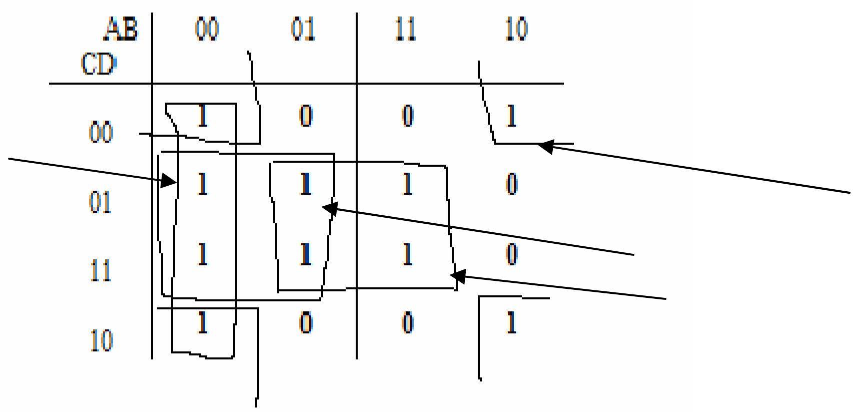
3/ la forme minimale : pour obtenir la forme minimale de la fonction on prend d'abord tous les impliquants essentiels puis on choisis on choisis parmi les impliquants premiers restants ceux qui peuvent couvrir complètement la fonction (les mintermes de la fonction).

<u>Exemple</u>

Simplifier par le tableau de Karnaugh la fonction complètement définis suivante :

F=∑(0,1,2,3,5,7,8,10,13,15) ; d'après cette écriture on constate que F est de 4 variables.

AB CD	00	01	11	10
00	**1**	**0**	**0**	**1**
01	**1**	**1**	**1**	**0**
11	**1**	**1**	**1**	**0**
10	**1**	**0**	**0**	**1**



Nous avons dans cet exemple 4 impliquant premier (4 groupements)

IP={$\overline{B}\overline{D}$, $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}D$, BD}

Parmi ses impliquant nous avons 2 impliquant premier essentiel : IPE={$\overline{B}\overline{D}$, BD}

Les formes minimales possibles sont :

Fm1= $\mathbf{\overline{B}\overline{D}+BD}$+$\overline{A}\overline{B}$

Fm1= $\mathbf{\overline{B}\overline{D}+BD}$+$\overline{A}D$

Exemple simplification d'une fonction incomplètement définis

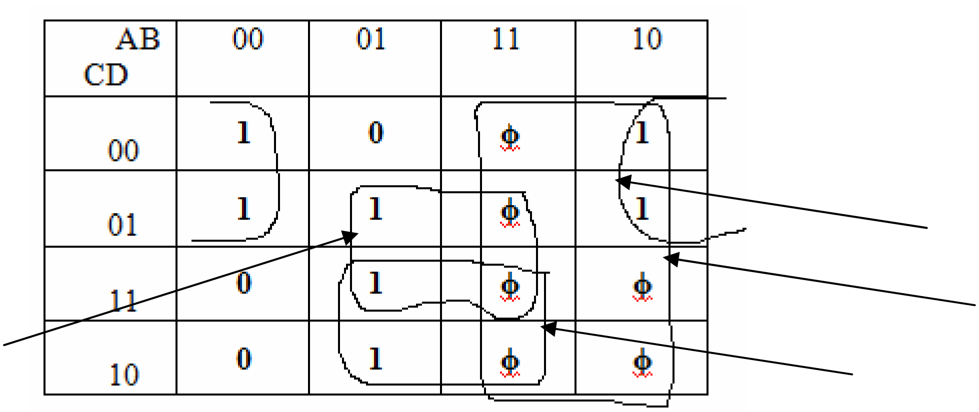
Simplifier la fonction F définis par :

$F=\sum(0,1,5,6,7,8,9)+\phi(10,11,12,13,14,15)$

1/ représentation de la fonction par karnaugh

AB CD	00	01	11	10
00	**1**	**0**	**ϕ**	**1**
01	**1**	**1**	**ϕ**	**1**
11	**0**	**1**	**ϕ**	**ϕ**
10	**0**	**1**	**ϕ**	**ϕ**

2/ faire grouper les ''1'' en prenant en compte les etats ϕ pour maximiser la grandeur des groupement



AB CD	00	01	11	10
00	1	0	ϕ	1
01	1	1	ϕ	1
11	0	1	ϕ	ϕ
10	0	1	ϕ	ϕ

3/ écrire l'ensemble des impliquant premier IP et les impliquant premiers essentiels IPE

IP= {A, BD, BC, $\overline{B}\,\overline{C}$}

IRE= {A, BD, BC, $\overline{B}\,\overline{C}$}

F= A+ BD+BC+$\overline{B}\,\overline{C}$

Références vous pouvez vous rendre au :

1/ les systèmes logiques cours et exercices ; N.Mansouri