Solutions de la serie 05

Exercice 01

$f(x) = 1 + x + x^3 \sin\frac{1}{x}$

1) Montrons que f admet un $DL_2(0)$.

On observe que $x^3 = x^2\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ car $x\sin\frac{1}{x} \to 0$

D'où $\boxed{f(x) = 1 + x + o(x^2)}$

Donc f admet un $DL_2(0)$.

2) Supposons que f admet un $DL_p(0)$, $p \geq 3$

c-à-d. $f(x) = \underbrace{1 + x}_{DL_2(0)} + a_3 x^3 + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$

Donc $\cancel{1 + x} + x^3 \sin\frac{1}{x} = \cancel{1 + x} + a_3 x^3 + o(x^3)$ $\left(x^p = o(x^3), \forall p > 3\right)$

D'où $\sin\frac{1}{x} = a_3 + o(1)$

Donc $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = a_3$ Contradiction car $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists$

Donc f n'admet pas $DL_p(0)$, $\forall p \geq 3$.

Exercice 02

$$g(h) = \frac{1}{h^2}\left[f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) \right]$$

Comme f est de classe C^2, alors elle admet un $DL_2(a)$.

D'après la formule de Taylor-Young, On a :

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dfrac{f''(a)}{2!}h^2 + o(h^2) \\ f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \dfrac{f''(a)}{2!}h^2 + o(h^2) \end{cases}$$

Par addition, on trouve :

$$f(a+h)+f(a-h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + o(h^2) \quad \left(\begin{array}{c}\text{N.B.}\\ o(h^2)+o(h^2)=o(h^2)\end{array}\right)$$

D'où $g(h) = \frac{1}{h^2}\left(f(a+h)+f(a-h) - 2f(a)\right) = f''(a) + o(1)$

Passant à la limite, on obtient

$$\lim_{h\to 0} g(h) = \lim_{h\to 0}\left(f''(a)+o(1)\right) = \boxed{f''(a)}$$

$$\left(o(1) = \varepsilon(h) \longrightarrow 0\right)$$

Exercice 03 : Calculons les limites suivantes :

1) On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. D'où

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc $\boxed{e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}}$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

2) On a $\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \text{Arcsin}\, x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{cases}$ D'où $\sin x - \text{Arcsin}\, x = \frac{-x^3}{3} + o(x^3)$

Donc $\boxed{\sin x - \text{Arcsin}\, x \sim -\frac{x^3}{3}}$

et on a $\sin x \sim x \Longrightarrow \boxed{\sin^3 x \sim x^3}$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \text{Arcsin}\, x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = -\frac{1}{3}$

3) On a $5^x = e^{x\ln 5} = 1 + x\ln 5 + o(x)$

$3^x = e^{x\ln 3} = 1 + x\ln 3 + o(x)$

Donc $5^x - 3^x = x(\ln 5 - \ln 3) + o(x)$

Donc $\boxed{5^x - 3^x \sim x(\ln 5 - \ln 3)}$

De la même façon, on a $4^x - 2^x \sim x(\ln 4 - \ln 2)$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}(\ln 5 - \ln 3)}{\cancel{x}(\ln 4 - \ln 2)} = \boxed{\dfrac{\ln 5/3}{\ln 2}}$

4) On a $\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}}$

et on a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

Donc $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \dfrac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$

$= 1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$

D'où $\ln \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = -\dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$

Donc $\boxed{\ln \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x} \sim -\dfrac{x^2}{3}}$

D'où $\lim e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}} = \lim e^{\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{x^2}{3}\right)} = \boxed{e^{-\frac{1}{3}}}$

5) On a $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)}$

et on a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. D'où $x - \ln(1+x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0$

b) On a $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{\frac{1}{y^2}}$ 04

On a $\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{\frac{1}{y^2}} = e^{\frac{1}{y^2}\ln\frac{\sin y}{y}}$.

et on a $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^5)$, $\frac{\sin y}{y} = 1 - \frac{y^2}{6} + o(y^2)$

D'où $\ln\left(\frac{\sin y}{y}\right) = \boxed{-\frac{y^2}{6} + o(y^2)}$

Donc $\lim e^{\frac{1}{y^2}\ln\frac{\sin y}{y}} = \lim e^{\frac{1}{y^2}\times\left(-\frac{y^2}{6}\right)} = \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}$

Exercice 04 : $DL_n(x_0)$ de f :

* $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \frac{1}{1-u}$ où $\begin{cases} u = x+x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0 \\ u \sim x \ (\Rightarrow o(u) = o(x)) \end{cases}$

D'où $f(x) = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$

$= 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + (x+x^2)^3 + o(x^3)$

$= 1 + (x+x^2) + (x^2+2x^3) + (x^3) + o(x^3)$

$= \boxed{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)}$

* $f(x) = e^{x^2-1}$ $\cancel{=e}$ On pose $y = x-1 \xrightarrow{x\to 1} 0$

D'où $x^2 - 1 = (y+1)^2 - 1 = \boxed{y^2 + 2y}$, $\cancel{2y+y^2 = o(y)}$

Donc $f(x) = e^{2y+y^2} = 1 + (2y+y^2) + \frac{(2y+y^2)^2}{2!} + \frac{(2y+y^2)^3}{3!} + o(y^3)$

$= 1 + (2y+y^2) + \frac{4y^2+4y^3}{2} + \frac{8y^3}{6} + o(y^3)$

$= 1 + 2y + 3y^2 + \frac{10}{3}y^3 + o(y^3)$

$= \boxed{1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{10}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$

* $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $x_0 = 0$, $n = 2$

On a $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Donc $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{1}{1+u}$, $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

$u \sim x/2$, $o(u) = o(x)$

D'où $f(u) = 1 - u + \frac{u^2}{\cancel{2}} + o(u^2)$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2}_{\frac{x^2}{2}} + o(x^2)$$

$$= \boxed{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}$$

$\ast$ $f(x) = e^{\cos x - 1}$, $x_0 = 0$, $n = 4$

On a $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = u$

et on a $u \sim \left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $o(u) = o(x^2)$

Donc $f(x) = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$$= 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= \boxed{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{7x^4}{24} + o(x^4)}$$

$\ast$ $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = 1 + u$

avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $u \sim \left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $u^3 = o(x^5)$

$\cancel{f(x) = \sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}u^3 + o(u}$

$$f(x) = (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}u^2 + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}u^3 + o(u^3)}_{o(x^5)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)$$

$$= \boxed{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} + o(x^5)}$$

* $f(x) = \ln \sum_{k=0}^{2022} \frac{x^k}{k!}$, $n = 2023$, $x_0 = 0$

On a $DL_{2023}(0)$ de e^x est : $e^x = \sum_{k=0}^{2022} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{2023}}{2023!} + o(x^{2023})$

D'où $\sum_{k=0}^{2022} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{2023}}{2023!} + o(x^{2023})$

$$= e^x \left[1 - e^{-x} \frac{x^{2023}}{2023!} + e^{-x} o(x^{2023}) \right] \cdots (*)$$

et on a $e^{-x} = 1 + o(1) = 1 + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$

D'où $e^{-x} \frac{x^{2023}}{2023!} = \frac{x^{2023}}{2023!} + \varepsilon(x) \frac{x^{2023}}{2023!} = \boxed{\frac{x^{2023}}{2023!} + o(x^{2023})}$

$e^{-x} o(x^{2023}) = \underbrace{e^{-x} \varepsilon_1(x)}_{\to 0} \times x^{2023}$, $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$

$$= \boxed{o(x^{2023})}$$

Alors

$(*) \Rightarrow f(x) = \ln \sum_{k=0}^{2022} \frac{x^k}{k!} = x + \ln \left(1 - \frac{x^{2023}}{2023!} + o(x^{2023}) \right)$

$$= \boxed{x - \frac{x^{2023}}{2023!} + o(x^{2023})} \quad \boxed{\ln(1+X) = X + o(X)}$$

Exercice 05 :

* $f(x) = \text{Arctg}(x)$. On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On sait que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{m} x^k + o(x^m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

D'où $f'(x) = \sum_{k=0}^{m} (-x^2)^k + o(x^{2m}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2m})$

Donc $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2m+1})$, $\forall m \in \mathbb{N}$

D'où ~~f est paire~~

$DL_n(0)$ de f est : $f(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2m+1}) & \text{Si } n = 2m+1 \\ \sum_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2m+2}) & \text{Si } n = 2m+2 \end{cases}$

* $f(x) = \text{Argsh}\, x$. On a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

et on sait que ~~$(1+x)^\alpha = \sum$~~

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} x^m + o(x^m)$$

et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, On a :

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + \cdots + \frac{1\times 3\times \cdots \times (2m-1)}{2^m m!} (-1)^m x^m + o(x^m)$$

En remplaçant x par x^2 :

~~Donc~~ $f'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8} x^4 + \cdots + \dfrac{1\times 3\times \cdots \times (2m-1)}{2^m m!} (-1)^m x^{2m} + o(x^{2m})$

$\left(\cdots + o(x^{2m+1})\right)$

Par intégration, On obtient le $DL_{2m+1}(0)$ et $DL_{2m+2}(0)$ de f.

$= \left(\text{Où } n = 2m+1 \vee n = 2m+2\right)$

Ex 07 : $f(x) = x + 2\sqrt{x}$

Il suffit de calculer $DL_p(1)$ avec $p \geq 2$ est le petit ordre tq $a_p \neq 0$.

On applique la formule de Taylor : On a

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$f(1) = 3, \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = -\frac{1}{2}.$$

D'où $f(x) = 3 + 2(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$

$$\left(a_p = -\frac{1}{4}, \ p = 2\right)$$

Donc (C_f) admet un tangente (T) en $x_0 = 1$ d'éq : $y = 3 + 2(x-1)$
$= 2x + 1$

La courbe (C_f) est ci-dessous de la tangente (Δ) au vois de 1

Ex 08 : De la même façons, on calcul le Developpement généralise de $\frac{f(x)}{x}$ au vois de $\pm\infty$

C-à-d $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ ou $p \geq 2$ est le plus petit ordre tq $a_p \neq 0$.

Dans ce cas la droit (Δ) : $y = a_0 x + a_1$ est un asymptote de (C_f)

On a $f(x) = (x^3 + x + 1)^{\frac{1}{3}} - (x^2 - x - 1)^{\frac{1}{2}} = |x| \, f\left(\frac{1}{x}\right)$

Il suffit de calculer le $DL_p(0)$ de $f(y)$. $y = \frac{1}{x}$

et discuter la position de (C_f) suivant le signe de a_p et la parité de p.

Ex. 06 : (Division euclidienne)

$$f(x) = \frac{x + x^2}{\sin x} \cdot \quad DL_2(0) = ???$$

On a $DL_3(0)$ de sin : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

D'où $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$

$$\begin{array}{l|l}
1 + x & 1 - \frac{x^2}{6} \\
\cline{2-2}
1 - \frac{x^2}{6} & 1 + x + \frac{x^2}{6} \\
\cline{1-1}
x + \frac{x^2}{6} & \\
x - \frac{x^3}{6} & \\
\cline{1-1}
\frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{6} &
\end{array}$$

D'où $\boxed{f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$