Nom, Prénom:
Groupe:

Exercice : (7 pts)

On définit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u(x,0) = \cos(\pi x), \; x \in [0,1] \\ u(0,t) = 1, \; u(1,t) = -1, \; t \in [0,1] \end{cases}$$

1. Ecrire les schémas explicite et implicite pour : $x_i = ih$, $t_j = jk$ où $h = \; k = \frac{1}{M+1}$.(Indication : Utiliser le schéma décentré à droite pour la discrétisation de u_x).
2. Ecrire le systéme matriciel pour les deux schémas.
3. Calculer la solution approchée pour les deux schémas pour $M = 2$, en $t_1 = \dfrac{1}{3}$

Réponse

1-

Schéma explicite

On remplace u_t, u_{xx} par leurs approximations

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},\ u_{xx} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},\ u_x = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}$$

Alors on obtient le schéma aux différences finies pour le problème (1) comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \dfrac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} - \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = 1, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u_0^j = 1, u_{N+1}^j = -1,\ 0 \leq\ j \leq M+1, \\ u_i^0 = \cos(\pi i h), \quad 0 \leq\ i \leq N+1, \end{cases}$$

après simplification, et considérant $k = h$, on obtient

$$\begin{cases} u_i^{j+1} = h + (1 + \dfrac{1}{h})u_{i+1}^j - (\dfrac{2}{h})u_i^j \ + \dfrac{1}{h}u_{i-1}^j, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u_0^j = 1, u_{N+1}^j = -1,\ 0 \leq\ j \leq M+1, \\ u_i^0 = \cos(\pi i h), \quad 0 \leq\ i \leq N+1, \end{cases}$$

Schéma implicite

On remplace u_t, u_{xx} par leurs approximations

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},\ u_{xx} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2},\ u_x = \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h}$$

Alors on obtient le schéma aux différences finies pour le problème (1) comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \dfrac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - \dfrac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 1, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u_0^j = 1, u_{N+1}^j = -1,\ 0 \leq\ j \leq M+1, \\ u_i^0 = \cos(\pi i h), \quad 0 \leq\ i \leq N+1, \end{cases}$$

après simplification, et considérant $k = h$, on obtient

$$\begin{cases} (2 + \dfrac{2}{h})u_i^{j+1} - (1 + \dfrac{1}{h})u_{i+1}^{j+1} - \dfrac{1}{h}u_{i-1}^{j+1} = h + u_i^j, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u_0^j = 1, u_{N+1}^j = -1,\ 0 \leq\ j \leq M+1, \\ u_i^0 = \cos(\pi i h), \quad 0 \leq\ i \leq N+1, \end{cases}$$

2-

Schéma explicite

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j+1} = \begin{pmatrix} -(\frac{2}{h}) & (1+\frac{1}{h}) & 0 & . & . & 0 \\ \frac{1}{h} & -(\frac{2}{h}) & (1+\frac{1}{h}) & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & \frac{1}{h} & -(\frac{2}{h}) & (1+\frac{1}{h}) \\ 0 & & & & \frac{1}{h} & -(\frac{2}{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j} + \begin{pmatrix} h+1/h \\ h \\ . \\ . \\ h \\ h-(1+1/h) \end{pmatrix}$$

Schéma implicite

$$\begin{pmatrix} (2+\frac{2}{h}) & -(1+\frac{1}{h}) & 0 & . & . & 0 \\ -\frac{1}{h} & (2+\frac{2}{h}) & -(1+\frac{1}{h}) & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & -\frac{1}{h} & (2+\frac{2}{h}) & -(1+\frac{1}{h}) \\ 0 & & & & -\frac{1}{h} & (2+\frac{2}{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j} + \begin{pmatrix} h+1/h \\ h \\ . \\ . \\ h \\ h-(1+\frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

3- $h = 1 = k = 1/3, u_1^0 = 1/2, u_2^0 = -1/2, u_3^0 = -1$

on fixe $j = 0$

Schéma explicite

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^0 + \begin{pmatrix} 1/3+3 \\ 1/3 \\ 1/3-4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} -1.6667 \\ 0.8333 \\ 0.8333 \end{pmatrix}$$

Schéma implicite

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -3 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^0 + \begin{pmatrix} 1/3+3 \\ 1/3 \\ 1/3-4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0.3729 \\ -0.2125 \\ -0.6630 \end{pmatrix}$$