3 Les matrices

3.1. Définitions et exemples

Définition 3.1 (Matrice)**.** *Soient* n *et* m *deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice de type* (n, p) *où à* n *lignes et* m *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, toute famille* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$*. La matrice* A *est généralement représentée sous la forme d'un tableau à* n *lignes et* m *colonnes comme suit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On la note aussi $A = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de A, où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est l'élément correspondant à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de A. L'ensemble des matrices de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Définition 3.2. *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice de* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*.*

• *Si* $n = m = 1$*, la matrice* A *de* $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ *est uni-coefficient. Elle est de la forme* (a)*. Il est usuel d'identifier cette matrice et son coefficient* $a \in \mathbb{K}$*.*

• *Si tous les coefficients de* A *sont nul, alors elle est appelée matrice nulle et notée* $0_{n,m} = (0)$*.*

• *Si* $n = 1$ *et* m *quelconque, la matrice* A *de* $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ *est appelée matrice ligne. Elle est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{pmatrix}.$$

Il est usuel d'identifier cette matrice au m *uplet* $(a_1, a_2, ..., a_m)$*.*

• *Si* n *quelconque et* $m = 1$*, la matrice* A *de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est appelée matrice colonne. Elle est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, il est usuel aussi d'identifier cette matrice au n *uplet* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*.*

Définition 3.3 (Transposition)**.** *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice de* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*.*

On appelle transposée de A, la matrice (a_{ji}) de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et on note A^t, i.e.,

$$A^t = (a_{ji})\,.$$

Remarque 3.1. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors on a :*

$$(A^t)^t = A\,.$$

Définition 3.4 (Matrice carrée)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Si $m = n$, alors A est appelée matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté par $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ ou simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Définition 3.5 (Matrice diagonale)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Les éléments a_{ii} s'appellent les coefficients diagonaux de A.*
- *La famille $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ est appelée diagonale principle de A.*
- *Une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite matrice diagonale lorsquelle ses coefficients non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est de la forme :*

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.6 (La trace d'une matrice)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La trace de A est le nombre dans $\mathbb{K}$, notée $Tr = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*

Définition 3.7 (Matrice symétrique)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est symétrique si et seulement si $A = A^t$.*

Définition 3.8 (Matrice triangulaire)**.** *Soit $T = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *On dit que T est **triangulaire supérieure** si tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls. Donc, elle est de la forme :*

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{nn-1} \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- *On dit que T est **triangulaire inférieure** si tous les coefficients en dessus de* *la diagonale sont nuls. Alors, elle est de la forme :*

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.9 (Matrice identité)**.** *On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carrée d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont égaux à* 1 *et tous les autres sont égaux à* 0*. On la note I_n. On écrit,*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
La somme de A et B est la matrice notée $A + B$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & ... & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le produit de A par λ est la matrice notée $\lambda \cdot A$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.10 (Antisymétrique d'une matrice)**.** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On dit que*

$$A \text{ est antisymétrique si et seulement si } -A = A^t\,.$$

Propriété :
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on a :

$$(A+B)^t = A^t + B^t \text{ et } (\alpha \cdot B)^t = \alpha \cdot B^t\,.$$

Théorème 3.1. *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par les deux opération :*
• *" $+$ " addition des matrices (loi interne),*
• *" $\cdot$ " multiplication d'une matrice par un scalaire (loi externe).*
Alors, $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est la matrice nulle $0_{n,m}$.

Définition 3.11 (Produit de deux matrices)**.** *Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. Le Produit de A par B est la matrice $C = A \times B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \forall j \in \{1, 2, ..., p\}; C = (c_{ij}) \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\,.$$

Exemple 3.1. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2. *La multiplication de deux matrices n'est pas toujours commutative, lorsqu'il est possible de calculer les deux produits.*

Proposition 3.1. *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec n, m et p trois entiers naturels non nuls, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on :*
• $A + B = B + A$.
• $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$ *et* $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.
• $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
• $A \times I_m = A$ *et* $I_n \times A = A$.
• $\alpha \cdot (A \times B) = (\alpha \cdot A) \times B = A \times (\alpha \cdot B)$.

Définition 3.12 (Puissance d'une matrice)**.** *Soient* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* k *un entier naturel non nul. On note* $A^0 = I_n$*,* $A^1 = A$*,* $A^2 = A \times A$ *et* $A^k = A \times A \times ... \times A(k$ *termes* $)$*. Cette matrice* A^k*, c'est la puissance* $k^{ème}$ *de* A*.*

Définition 3.13 (Inverse d'une matrice carrée)**.** *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On dit que* A *est inversible (régulière) s'il existe une matrice* B *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $A \times B = B \times A = I_n$*. Si tel est le cas, la matrice* B *est unique et est appelée matrice inverse de* A*. De plus, elle est notée* A^{-1}*.*

Notation 3.1. *On note* $GL_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversible d'ordre* n*.*

Propriétés :
Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors on a :
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

3.2. Les matrices et les applications linéaires

La matrice associée à une application linéaire
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une base de E, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_m)\}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est la matrice à n ligne et m colonne à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont les éléments de la $j^{ème}$ colonne sont les coordonnées du vecteur $f(v_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ où

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}), \forall j \in \{1, 2, ..., m\}; f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Application linéaire associée à une matrice

Proposition 3.2. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions respectives* m *et* n*,* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ *une base de* E*,* $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ *une base de* F*. Alors la donnée d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*, donne une unique application linéaire* f *de* E *dans* F*, où* $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$*.*

L'expression analytique de f **:**
On a : $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2, ..., x_m) \in$K^m ; x=$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot v_i$.

Etant donné la matrice $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

• Pour chaque $x \in E$, notons $X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

• Pour chaque $y \in F$, notons $Y = M_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Alors si $y = f(x)$, on a : $Y = A \times X$. Cette équation peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m. \end{cases}$$

On en déduit que l'application linéaire f associée à la matrice A est définie par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m, \dots, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m).$$

Propriétés :

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives m, n et p avec m, n, p Trois entiers naturels non nuls. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une base de E, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ une base de F et $\mathcal{B}'' = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ une base de G. Alors, on a :

• L'application $\varphi : f \to M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

• $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec

$$dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})) = m \times n = dim(E) \times dim(F).$$

• On considère $m = n$ et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors on a :

f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si A est inversible. de plus

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

• L'application $g \circ f$ est définie par :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Remarque 3.3. *Si la matrice de f est $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et la matrice de g est $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors la matrice de $g \circ f$ est $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.*

Définition 3.14 (Matrice de passage)**.** *On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée $P = (p_{ij})$ dont la $j^{ème}$ colonne s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ de la forme :*

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot v_i\,.$$

Autrement dit, les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 3.3. *On considère l'endomorphisme identique de E, l'application $Id(E) : v \to Id(v) = v$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors,*

$$P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E).$$

Changement de base

Théorème 3.2. *Soient x un élément de E, X et X' les matrices colonnes des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Alors,*

$$X = P \times X'\,.$$

En effet, on a : $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^2})$, $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors,

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}}(Id_E(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E) \times M_{\mathcal{B}'}(x) = P \times X'.$$

Remarque 3.4. *La formule suivante peut également être extraite : $X' = P^{-1} \times X$.*

Changement de base pour une application linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Théorème 3.3. *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors,*

$$A' = Q^{-1} \times A \times P.$$

Corollaire 3.1 (Cas d'un endomorphisme)**.** *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors,*

$$A' = P^{-1} \times A \times P\,.$$

Définition 3.15 (Matrices semblables)**.** *On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P, i.e., $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$A' = P^{-1} \times A \times P\,.$$

Définition 3.16 (Rang d'une matrice)**.** *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, et on note $rg(A)$, le rang de ces vecteurs colonnes.*

Proposition 3.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors,*

$$rg(f) = rg(A)\,.$$

Théorème 3.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est inversible si et seulement si les matrices colonnes de A forment une base de $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cela revient aussi à dire que*

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow rg(A) = n\,.$$

Remarque 3.5. *A est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

Proposition 3.5. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors,*

$$rg(A^t) = rg(A)\,.$$