4 Résolution de systèmes d'équations

L'objectif de ce chapitre est principalement pratique. Il s'agit de savoir comment résoudre des systèmes d'équations linéaires, où l'intérêt sera d'étudier les systèmes linéaires de n équations à n inconnus.

4.1. Définitions

Définition 4.1 (Equation linéaire). *On appelle équation linéaire dans les inconnues $x_1, x_2, ..., x_m$ toute relation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = b,$$

où $a_1, ..., a_m$ et b sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ avec m un entier naturel non nul.

Définition 4.2 (Système d'équations linéaires). *Soit n un entier naturel non nul. On appelle système de n équations linéaires à n inconnus à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute n-liste d'équations de la forme :*

$$(S) : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

où les (x_j) sont les inconnues, les (a_{ij}) sont les coefficients, et les (b_i) les seconds membres du système. Tous ces éléments sont des scalaires de $\mathbb{K}$ avec $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Définition 4.3 (Solution du système). *Une solution du système linéaire (S) est une liste de n scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de $\mathbb{K}$, vérifiants les n équations de ce système. L'ensemble des solutions du système est l'ensemble de tous ces n-uplets.*

Remarque 4.1. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Définition 4.4 (Incompatibilité). *Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit incompatible.*

Définition 4.5 (Equivalence des système). *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont les mêmes solutions.*

Définition 4.6 (Homogénéité du système)**.** *On dit qu'un système est homogène, si tout les second membre sont nuls.*

Définition 4.7 (Rang d'un système)**.** *Le rang du système linéaire (S) est le rang de la matrice (a_{ij}), où $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.*

4.2. Forme matricielle du système

• Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors, (S) s'écrit matriciellement sous la forme : $A \times X = B$, i.e.,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

• Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, A la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n), B = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$, alors (S) devient sous la forme : $f(X) = B$, i.e.,

$$(S) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Remarque 4.2. *Résoudre le système (S), consiste à trouver un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A \times X = B$ ou un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $f(X) = B$.*

Exemple 4.1. *On considère le système*

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \ x_3 = -3 \end{array} \right. .$$

On écrit (S) sous la forme matricielle commme suit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4.3. Résolution du système d'équations linéaires

Dans cette section, nous discutons de deux méthodes de solution pour le système (S) où dans les deux, nous utilisons la forme matricielle de ce système.

4.3.1. Résolution par la méthode de l'inverse du matrice

On considère le système (S) sous la forme $A \times X = B$ avec A est inversible. Alors, l'unique solution du (S) est donnée par $X = A^{-1} \times B$.

Exemple 4.2. *Soit le système*

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{c} y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ x + y = -3 \end{array} \right. .$$

1- On note par A la matrice de coefficients du système (S). Sachant que $\frac{1}{2} \cdot (A^2 - A) = I_3$, montrer que A est inversible, puis déterminer A^{-1}.
2- Résoudre (S) par la méthode de l'inverse du matrice.
En effet,
- *On écrit d'abort (S) sous forme matricielle comme suit :*

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Donc, la matrice de coefficients $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a : $\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$. *Le déterminant de A est non nul $(2 \neq 0)$, donc A est inversible.*
- *La relation $\frac{1}{2} \cdot (A^2 - A) = I_3$ peut s'écrite sous forme : $A \times [\frac{1}{2} \cdot (A - I_3)] = I_3$, alors on en déduit que* $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- *En appliquant la méthode de l'inverse du matrice A, on obtient l'unique solution du système est donnée par :*

$$
\begin{aligned}
X &= A^{-1} \times B \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.3.2. Résolution par la méthode de Cramer

Soit le système

$$
(S): \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. .
$$

L'écriture matricielle de (S) est : $A \times X = B$. On définit une matrice notée A_j, la matrice déduite de A en remplaçant la $j^{ème}$ colonne de A par le second membre B, i.e.,

$$
A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_1 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

Théorème 4.1. *Si le déterminant de A est non nul, alors l'unique solution du système (S) est donnée par les formules :*

$$
x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \text{ pour tout } j \in \{1, 2, ..., n\}.
$$

Exemple 4.3. *On va confirmer la solution du système que nous avons vu dans l'Exemple 4.2, par la méthode de Cramer.*
Soit le système

$$
(S): \quad \left\{ \begin{array}{c} y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ x + y = -3 \end{array} \right. .
$$

où

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$. *Alors, d'après le Théorème 4.1 l'unique solution du système* (S) *est donnée par les formules :*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \text{ pour tout } j \in \{1, 2, 3\}.$$

On a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

avec $\det(A_1) = -4$, $\det(A_2) = -2$, $\det(A_3) = 6$, *et par conséquent*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ainsi la solution du système (S) *est*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Exercices

Exercice 4.1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *de différentes manières les systèmes linéaires suivants, d'inconnues* x *et* y *:*