Université Mohamed Boudiaf-M'sila — Département de l'informatique
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°04.
Algèbre 2

Exercice n°1 :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant en utilisant les propriétés du déterminant :

$$C = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b + a^2 & a \end{vmatrix}, \ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & c^2 \end{vmatrix}, \ H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix}, \ K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{vmatrix}$$

Exercice n°2 :
Soient les matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et B sont inversibles.
2. Calculer leurs inverses en utilisant les cofacteurs.

Exercice n°3 :
Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère le système (S)

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + mz = 2 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous forme matricielle $(AX = b)$.
2. Pour quelle valeurs de m le système (S) possède une solution unique.
3. Résoudre le système (S) par la méthode de Cramer pour $m = 1$.

Exercice n°4 :(Devoir maison)

1. On considère le système (S_1) défini par

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

   (a) Donner la forme (écriture) matricielle du système (S_1).
   (b) Montrer que le système (S_1) admet une solution unique.

(c) Résoudre (S_1) en utilisant :

i. la méthode de Cramer ;

ii. la méthode de l'inverse de matrice.

2. Soit (S_2) le système suivant

$$\begin{cases} -mx + y - mz = 0 \\ x + my - z = -m \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

(a) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système (S_2) est de Cramer.

(b) Résoudre (S_2) dans ce cas.