UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA — DÉPARTEMENT DE L'INFORMATIQUE
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°03.
Algèbre 2

Exercice 01 :
On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et la matrice d'identité } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = I_2 + 4B$.
2. Calculer $A^2,\ B^2,\ A^t,\ B^t,\ Tr(A),\ Tr(B)$.
3. Calculer la matrice $-A^2 + 2A - I_2$.
4. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad A^n = I_2 + 4nB$.

Exercice 02 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.
2. (*) Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 03 :
Soit A $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: A$^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$

Exercice 04 :
Soit l'applications f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (2x+4z, 3x-4y+12z, x-2y+5z) \end{array}$$

Soit $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice $A = M_B(f)$ associée à f relativement à la base B.
2. Supposons que $B' = \{e'_1 = (-4,3,2), e'_2 = (-4,0,1), e'_3 = (2,1,0)\}$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' et calculer P^{-1}.
   (b) Trouver la matrice $A' = M_{B'}(f)$ associée à f relativement à la base B'.

Exercice 05 : (Devoir à la maison)
Soit l'applications f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y) = (3x+2y, x-5y, x+y) \end{array}$$

Soit $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B' = \{e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice $A = M_B^{B'}(f)$ associée à f de B à B'.
2. Supposons que $B_1 = \{u_1 = (1,3), u_2 = (2,5)\}$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ et $B'_1 = \{u'_1 = (1,1,1), u'_2 = (1,1,0), u'_3 = (1,0,0)\}$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer la matrice de passage P de B à B_1 et Q la matrice de passage de B' à B'_1 et calculer Q^{-1}.
   (b) Trouver la matrice $A' = M_{B_1}^{B'_1}(f)$ associée à f de la base B_1 à B'_1.