Université Mohamed Boudiaf de M'sila.

Faculté de Technologie.

Matière : TP Méthodes Numériques.

$2^{ème}$ **Année Licence (LMD) - 2019/2020.**

TP N° 5 : Méthode de Lagrange
(Résolution de l'équation $f(x) = 0$)

1 Introduction

La méthode de dichotomie est lente car elle n'utilise que partiellement l'information disponible : on ne se sert que des signes, et pas des valeurs de $f(a)$ et de $f(b)$. Aveuglément et inexorablement, le partage en deux de l'intervalle a lieu et ce, quelle que soit la fonction considérée. Or il est bien clair qu'avec $f(a) = -1$ et $f(b) = 10000$ par exemple, on a tout lieu de penser que la racine α de l'équation $f(x) = 0$ a bien des chances d'être plus proche de α que de $\frac{a+b}{2}$.

La méthode de Lagrange, ou des parties proportionnelles, remédie à ce problème : au lieu de travailler à chaque étape avec le point-milieu d'abscisse $\frac{a+b}{2}$, on fait intervenir l'abscisse c du point d'intersection de la droite joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ avec l'axe des abscisses.

Concrètement, cela revient à remplacer la fonction f par une fonction affine et substituer à l'équation que l'on cherche à résoudre une banale équation du premier degré.

2 Objectifs

Ecrire un programme sous Matlab qui recherche la racine de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ par la méthode de Lagrange.

3 Méthode de LAGRANGE

Principe : La méthode de Lagrange est une variante de la méthode de Newton.

Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ ayant une convexité déterminée. Rappelons que pour calculer un zéro α de f par la méthode de Newton, on considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ proche de } \alpha \\ f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n), \forall n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dans certaines situations, la dérivée de f est très compliquée voir même impossible à calculer. Dans ce cas, nous approchons la dérivée par un quotient différentiel. Ce que nous obtenons est appelée la méthode de Lagrange :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0, x_1 \text{ proche de } \alpha \\ \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}(x_{n+1}-x_n) = -f(x_n), \forall n \geq 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

Ici, x_{n+1} dépend de x_n et de x_{n-1} : on dit que c'est une méthode à deux pas ; nous avons d'ailleurs besoin de deux itérés initiaux x_0 et x_1.
L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul de la dérivée f'. l'inconvénient est que nous perdons la convergence quadratique.
La fonction g correspondante vérifie :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{3}$$

4 Convergence

Nous allons présenter un théorème de convergence.
Théorème : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f' et f'' soient strictement positives sur $[a,b]$.
On suppose que $f(a) < 0; f(b) > 0$ et on appelle a l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Alors : (1) La suite (x_n) telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \forall n \geq 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

est bien définie.
(2) La suite (x_n) est croissante, convergeant vers α.

5 Manipulation

Ecrire un programme sous Matlab qui recherche la racine de $f(x) = 0$ sur $[a,b]$ par la méthode de Lagrange, jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. On commence par $x_0 = a$ si $f(x_0) * f''(x_0) < 0$.
Tester le programme sur les deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - 12x^2 - 60x + 46 = 0, [a,b] = [0,1]$ et $\epsilon = 10^{-3}$.
2. $f(x) = \cos(x) - x^3 = 0, [a,b] = [0,1]$ et $\epsilon = 10^{-3}$.