Université de M'sila		Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2022/2023
Module Analyse 4	Correction d'examen final	Durée : 1h −30m

Barème

Correction d'exercice : 1 (5pt)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ par : $f(x,y) = \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$

0.5 (a) f est prolongeable par continuité au point $(1,0)$ ssi $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ existe

0.5 (b) On remarque que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

0.5 (c) Pour $(x,y) = (1,0)$, on utilisant les coordonnées polaires, posons

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta, & \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[. \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

1 On trouve, $|f(x,y)| = |f(1+r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r\sin^3\theta| \leq r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ et finalement,

0.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0.$

$2 = 1 + 1$ 2. Donc, f est prolongeable par continuité au point $(1,0)$ et sa prolongement $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} & : (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & : (x,y) = (1,0) \end{cases}$

Barème

Correction d'exercice : 2 (8pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

0.5 (a) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a f est continue, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas,(i.e, f est fractionnelle).

(b) Pour $(x,y) = (0,0)$, on utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[. \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

0.5 On aura donc, $|f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^3\cos^3\theta\sin^2\theta| \leq r^3 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

0.5 C'est à dire, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

0.5 (c) D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

0.5 2. (a) La fonction f est clairement dérivable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, car quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

1 Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \dfrac{5x^5y}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}.$

1 (b) Si $(x,y)=(0,0)$, on a :

$$\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\\ \lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

(c) C'est à dire, $\nabla f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}, & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\vec{j}, & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

0.5 $$=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}((yx^2+3y^2)\vec{i}+5x^3\vec{j}), & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\vec{i}+0\vec{j}=\vec{0}, & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

0.5 **3** (a) On a déjà vérifié que la fonction f est dérivable en point $(0,0)$.

(b) Vérifions si ses dérivées partielles sont continues en point $(0,0)$. Alors, on a :

0.5 $|\partial_x f(x,y)|=|\dfrac{r^6\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{r^4}|\leq 4r^2\underset{r\to0}{\longrightarrow}0=\partial_x f(0,0).$

0.5 $|\partial_y f(x,y)|=|\dfrac{2r^6\cos^5\theta\sin\theta}{r^4}|\leq 2r^2\underset{r\to0}{\longrightarrow}0=\partial_y f(0,0).$

0.5 (c) D'où la fonction f est de classe C^1 en point $(0,0)$.

4 D'après question précédente la fonction f est de classe C^1 en point $(0,0)$. Alors, on conclut

0.5 que f est différentiable en point $(0,0)$. Donc, on a :

0.5 $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}: df_{(0,0)}(x,y)=\partial_x f(0,0)x+\partial_y f(0,0)y=0.$

Barème

Correction d'exercice : 3 (7pt)

f définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, par : $f(x,y)=y^3+xy\ln x$

1 **1** (a) Les points critiques de f. On a : $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}y+y\ln x\\ 2y+x\ln x\end{pmatrix}$

1 (b) Alors, $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y(1+\ln x)=0\\ 3y^2+x\ln x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\vee x=e^{-1}\\ 3y^2+x\ln x=0\end{cases}\Rightarrow$

1 $$\begin{cases}(x=1\wedge y=0)\\ \vee(x=e^{-1}\wedge y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac12})\end{cases}\Rightarrow(x,y)\in\left\{(1,0),(e^{-1},\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac12}),(e^{-1},-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac12})\right\}$$

2 Nature des points critiques :

0.5 a $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 1+\ln x \\ 1+\ln x & 6y \end{pmatrix}$

0.5 b Pour le point $(1,0)$ on trouve : $|H_f(1,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$

Donc, le point $(1,0)$ est un point selle.

1 c Pour le point $(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})$ on a :

$|H_f(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-2} > 0.$

0.5 Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} > 0,$ alors le point $(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})$ est un minimum. local.

0.5 d Si $(x,y) = (e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})$, on trouve :

$|H_f(e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-2} > 0.$

0.5 Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} < 0,$ alors le point $(e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})$ est un maximum local.

0.5 3 On remarque que $f(e^2, -\frac{1}{2}e) = -\frac{9}{8}e^3 < -\frac{2}{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}} = f(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}).$

Donc, $(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})$ est un minimum local n'est pas un minimum global pour $f.$

Remarque

Pour démontrer la question 3, on peut poser $y = -x$ où $x > 0,$ on aura, donc,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,-x) = \lim_{x\to+\infty}[-x^3 - x^2 \ln x] = -\lim_{x\to+\infty} x^3[1 + \frac{\ln x}{x}] = -\infty$$
$$< f(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}).$$