Université de M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

Le : 25 /05/2023
Durée : 1h30

Examen Final de : *Fonction de la variable complexe (MATH4)*

Exercice N° 1: (5pts)

Soit $z = x + iy$ où $x\ et\ y$ sont deux réels et soit les fonctions $f\ et\ g$

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy$$

$$g(z) = |z|^2 + 3z^2$$

1. Trouver les parties réelles et imaginaires des fonctions f et g.
2. Vérifier si les fonctions suivantes sont holomorphes dans C ?

Exercice N° 2: (5 pts)

Calculer l'intégrale suivante : $\int_C (z^2 - z)dz$

1) Le long du cercle $|z-1| = 1$, du point (2, 0) au point (0,0) [le demi-cercle supérieur].
2) Le long du cercle $|z-1| = 1$ parcouru dans le sens direct.
3) En déduire $\int_C (z^2 - z)dz$ où C est le demi-cercle inférieur de centre (1,0) et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

Exercice N° 3 : (5 pts)

- Chercher la série de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{(1+z^8)}{z^4}e^z$ autour de point $z = 0$
- Indiquer le type de singularité de 0
- Déduire le Résidu de $f(z)$ en 0 $(\mathrm{Res}(f, 0))$

Exercice N° 4 : (5 pts)

Calculer l'intégrale suivante :

$$\oint_C \frac{\mathbf{z^2}}{(\mathbf{z^2+1})(\mathbf{z-1})^2}\,dz$$

Où C est le cercle $|z| = 10$

Bonne Chance

S.Bounab

Correction de l'Examen Final

Solution de l'exercice N° 1:

1) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy = (x^2 - y^2 + 2x) + i\,(2y - 2xy)$

$$g(z) = |z|^2 + 3z^2 = x^2 + y^2 + 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = (4x^2 - 2\,y^2) + i(6xy)$$

$$\Re e(f(z)) = x^2 - y^2 + 2x \;\ldots..(0.5pt) \quad et\; \Im m(f(z)) = 2y - 2xy \ldots..(0.5pt)$$

$$\Re e(g(z)) = 4x^2 - 2\,y^2 \;\ldots..(0.5pt) \quad et\; \Im m(g(z)) = 6xy \ldots..(0.5pt)$$

2) $on\ vérifié\ les\ conditions\ de\ Cauchy - Riemann\ (avec\ P\ et\ Q\ sont\ les\ parties\ réeles\ et\ imaginaires)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \ldots..(0.5pt)$$

a) Pour la fonction $f(z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x + 2 \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2 - 2x \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y} \ldots\ldots\ldots..(0.5pt) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \ldots\ldots\ldots..(0.5pt) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées alors $f(z)$ n'est pas holomorphe sur C$\ldots..(0.25pt)$.

b) Pour la fonction $g(z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 8x \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 6x \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y} \ldots\ldots\ldots..(0.5pt) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -8y \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6y \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \ldots\ldots\ldots..(0.5pt) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées alors $g(z)$ n'est pas holomorphe sur C$\ldots..(0.25pt)$.

Solution de l'Exercice N° 2:

1) Pour le chemin C_1 le demi cercle de centre $(1{,}0)$ $et\ \ de\ rayon\ 1$ alors :

$$z = \gamma(t) = 1 + e^{it} \;\ldots..(0.25pt) \Longrightarrow dz = ie^{it}dt \;\ldots..(0.25pt)\ avec \quad 0 \leq t \leq \pi \ldots..(0.25pt)$$

$$I_1 = \int_C (z^2 - z)dz$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\left(1 + e^{i2t} + 2e^{it}\right) - \left(1 + e^{it}\right)\right) \times \left(ie^{it}\right)dt \; \ldots\ldots(0.25pt)$$

$$= \int_0^{\pi} \left(e^{i3t} + e^{i2t}\right) \times (idt) = \left[\frac{1}{3}e^{i3t} + \frac{1}{2}e^{i2t}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{i3\pi} - 1\right) \; \ldots\ldots(0.5pt)$$

$$= \frac{-2}{3} \; \ldots\ldots(0.5pt)$$

2) Pour le chemin C_2 le cercle de centre $(1,0)$ $et\;\; de\, rayon\; 1$, étant donné que $f(z) = (z^2 - z)$ est une fonction holomorphe sur C, en appliquant le théoréme de Cauchy $\ldots\ldots(0.5pt)$alors :

$$I_2 = \oint_{C_2} f(z) = 0 \; \ldots\ldots(1pt)$$

On aura par la suite :

$$I_2 = \oint_{C_2} f(z) = \int_{C_1} (z^2 - z)dz + \int_{C_3} (z^2 - z)dz = \mathbf{0} \; \ldots\ldots(0.5pt) \Rightarrow \int_{C_3} (z^2 - z)dz = \frac{+2}{3} \; \ldots\ldots(1pt)$$

<u>Solution de l' Exercice N° 3:</u>

$$f(z) = \frac{1 + z^8}{z^4}e^Z = f(z) = \frac{1 + z^8}{z^4}e^Z = \left(\frac{1}{z^4} + z^4\right)\left(e^Z\right)$$

On a $e^Z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \cdots \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1pt)$

$$\Rightarrow f(z) = \left(\frac{1}{z^4} + z^4\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \cdots + \cdots\right) + \left(z^4 + z^5 + \frac{z^6}{2} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!\,z}}_{Parie\ Principale(0.5pt)} + \underbrace{\frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \cdots + \cdots}_{Partie\ \ Analytique(0.5pt)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1pt)$$

- La partie principale est finie $(a_{-5} = 0)$ $\ldots(0.5pt)$ alors la fonction $f(z) = \frac{1+z^8}{z^4}e^Z$ a un pôle ***d'ordre 4***en $z_0 = 0$$(0.5pt)$

- le Résidu de $f(z)$ en 0 est égal au coefficient a_{-1} de la série de Laurent:

$$\mathrm{Res}(f,0) = a_{-1} = \frac{1}{3!} \; (1pt)$$

Solution:

En appliquant Le théorème des résidus :

$$I = \oint_C g(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)) \ldots (0.25pt)$$

- La fonction $g(z) = \frac{\mathbf{z^2}}{(\mathbf{z^2+1})(\mathbf{z-1})^2} = \frac{\mathbf{z^2}}{(\mathbf{z+i})(\mathbf{z-i})(\mathbf{z-1})^2}$ a 3 pôles) $\ldots (0.25pt)$:

deux pôles simples en $z_1 = -i \ et \ z_2 = i$ et un pôle double en $z_3 = 1$

- Pour le cercle C: $|z| = 10$, tous les pôles sont à l'intérieur de C) $\ldots (0.5pt)$, alors :
- Le résidu de $g(z)$ au pôle simple $z_1 = i$:

$$Res(g(z), i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i) \times \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+i)(z-1)^2}\right] = \frac{1}{4}) \ldots (1pt)$$

- Le résidu de $g(z)$ au pôle simple $z_2 = -i$:

$$Res(g(z), -i) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i) \times \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to -i}\left[\frac{z^2}{(z-i)(z-1)^2}\right] = \frac{-1}{4}) \ldots (1pt)$$

- Le résidu de $g(z)$ au pôle double $z_3 = 1$:

$$Res(g(z), 1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \times \frac{z^2}{(z^2+1)(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{2z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}) \ldots (1pt)$$

$$I = \oint_{|z|=10} \frac{\mathbf{z^2}}{(\mathbf{z^2+1})(\mathbf{z-1})^2}dz = 2\pi i \times \left(Res(g(z), i) + Res(g(z), -i) + Res(g(z), 1)\right)) \ldots (0.5pt)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \pi i) \ldots (0.5pt)$$