Chapitre 2

Analyse des systèmes

2.1 Introduction

L'analyse temporelle des circuits linéaires en régime transitoire nécessite la résolution d'équations différentielles. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant, la transformation de Laplace.

Cette transformation permet d'associer, à toute fonction $f(t)$, une fonction $F(p)$ d'une variable complexe $p = \sigma + j\omega$. Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

2.2 Transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction nulle pout $t < 0$. On appelle transformée de Laplace de $f(t)$ (si elle existe), la fonction de la variable complexe p définie :

$$F(p) = TL\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt \qquad (2.1)$$

On note : $f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$

$\Uparrow$ *Original* $\Uparrow$ *Image*

Exemple :

- $f(t) = \boldsymbol{\delta(t)}$ **: impulsion de Dirac :** $\boldsymbol{\delta(t)} = \begin{cases} 0 & si \quad t \le 0 \; et \; t \ge \tau \\ \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{1}{\tau}\right) & si \quad 0 < t < \tau \end{cases}$ (2.2)

$$F(p) = TL\{\delta(t)\} = 1$$

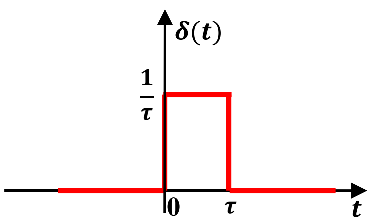

Figure 2.1 Impulsion de Dirac

- $f(t) = \boldsymbol{u(t)}$ **: échelon unité de Heaviside :** $\boldsymbol{u(t)} = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t \ge 0 \end{cases}$ (I.3)

$$F(p) = TL\{\boldsymbol{u(t)}\} = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$\boldsymbol{F(p)} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$$

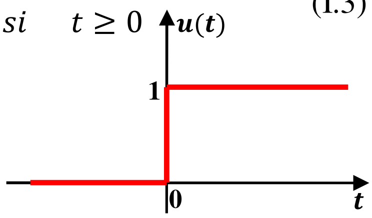

Figure 2.2 Echelon unitaire

$$F(p) = TL\{\boldsymbol{u(t)}\} = U(p) = \frac{1}{p} \quad pour\ Réel(p) > 0$$

- $f(t) = r(t) = \boldsymbol{t.u(t)}$ **: rampe unité:** $\boldsymbol{r(t)} = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ (2.4)

$$F(p) = TL\{\boldsymbol{r(t)}\} = \int_0^{+\infty} t.e^{-pt}\,dt$$

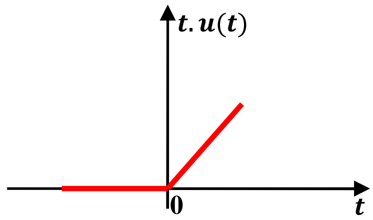

Figure 2.3. Rampe unitaire

En utilisant l'intégration par partie :

On pose : $u = t$, $dv = e^{-pt}dt$

$du = 1$, $v = e^{-pt}/-p$

on sait que : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} t.e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p}e^{-pt}dt$$

$$= 0 + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

$$F(p) = TL\{\boldsymbol{r(t)}\} = R(p) = \frac{1}{p^2} \quad pour\ Réel(p) > 0$$

- $f(t) = \frac{\boldsymbol{t^2}}{\boldsymbol{2}}.\boldsymbol{u(t)}$ **: échelon d'accélération:** $\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{\boldsymbol{t^2}}{\boldsymbol{2}} & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ (2.5)

$$F(p) = TL\left\{\frac{t^2}{2}.u(t)\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}.e^{-pt}\,dt$$

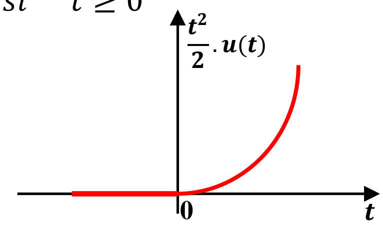

Figure 2.3. Echelon d'accélération

En utilisant l'intégration par partie :

On pose : $u = \frac{t^2}{2}$, $dv = e^{-pt}dt$

$du = t$, $v = e^{-pt}/-p$

$$F(p) = \left[f(t)\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t.e^{-pt}dt = 0 + \frac{1}{p}.TL\{r(t)\} = \frac{1}{p^3}$$

$$F(p) = TL\left\{\frac{t^2}{2}.u(t)\right\} = \frac{1}{p^3} \quad pour\ Réel(p) > 0$$

- $f(t) = Asin(\omega_0 t)$ **: Signal sinusoïdal**

$$F(p) = \int_0^{+\infty} Asin(\omega_0 t).e^{-pt}\,dt = A\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right).e^{-pt}dt$$

$$= A\int_0^{+\infty} \frac{e^{(j\omega_0 - p)t} - e^{-(j\omega_0 + p)t}}{2j}dt$$

$$F(p) = \frac{A}{2j}\left[\frac{e^{(j\omega_0 - p)t}}{(j\omega_0 - p)} + \frac{e^{-(j\omega_0 + p)t}}{(j\omega_0 + p)}\right]_0^{+\infty}$$

$$F(p) = \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{(p - j\omega_0)} - \frac{1}{(p + j\omega_0)}\right] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$F(p) = TL\{Asin(\omega_0 t)\} = \frac{A\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad pour\ Réel(p) > 0$$

2.3 Propriétés de la transformée de Laplace

1. Linéarité

$$\begin{matrix} F(p) = TL\{f(t)\} \\ G(p) = TL\{g(t)\} \end{matrix} \Rightarrow TL\{\alpha.f(t) + \beta.g(t)\} = \alpha.F(p) + \beta.G(p) \quad (2.6)$$

2. Dérivation temporelle

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{f'(t)\} = pF(p) - f(0) \quad (2.7)$$

$$Pour\ \ n = 2: \quad TL\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = p^2F(P) - pf(0) - f'(0)$$

$$Pour\ \ n = 3: \quad TL\left\{\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right\} = p^3F(P) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

D'une manière générale

$$TL\{f^{(n)}(t)\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.8)$$

3. Intégration par rapport au temps

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\left\{\int_0^t \mathrm{f(t)dt}\right\} = \frac{F(p)}{p} \quad (2.9)$$

D'une manière générale

$$TL\left\{\int_0^t \int_0^t \dots \dots . . \int_0^t f(t)dt^n\right\} = \frac{1}{p^n}TL\{f(t)\} = \frac{F(p)}{p^n} \quad (2.10)$$

4. Changement d'échelle des temps ($\boldsymbol{a} > 0$)

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(a.p) \quad (2.11)$$

5. Dérivation par rapport à $\boldsymbol{p}$

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{-tf(t)\} = \frac{dF(p)}{p} \quad (2.12)$$

D'une manière générale

$$TL\{(-t)^nf(t)\} = \frac{d^nF(p)}{dp^n} \quad (2.13)$$

6. Translation ($\boldsymbol{a} > 0$)

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{e^{-at}f(t)\} = F(p + a) \quad (2.14)$$

7. Théorème du retard

Soit $f(t) = 0$ pour $t < 0$ (fonction causale)

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{f(t - \tau\} = e^{-\tau p}TL\{f(t\} = e^{-\tau p}F(p)\ pour\ \ t \geq \tau \quad (2.15)$$

8. Théorème du la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0}\{f(t)\} = f(0^+) = \lim_{P\to\infty}\{pF(p)\} \quad (2.16)$$

9. Théorème du la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty}\{f(t)\} = f(\infty) = \lim_{P\to 0}\{pF(p)\} \quad (2.17)$$

10. Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Définition : le produit de convolution de deux fonctions $f\ et\ g$ est :

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau).g(t-\tau)d\tau \quad (2.18)$$

Alors

$$Y(p) = TL\{f(t) * g(t)\} = F(p).G(p) \quad (2.19)$$

2.4 Tableau de quelques transformées de Laplace

Le tableau suivant donne les transformées de Laplace de quelques fonctions.

Fonction	$f(t) avec\ t \geq 0$	$F(p)$
Impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1
Echelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe	$t\ .\ u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Puissance	$t^n\ .\ u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle	$b.e^{-at}\ .\ u(t)$	$\frac{b}{p+a}$
	$t^n\ .e^{-at}\ u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
Premier Ordre	$(1-e^{-at}).\ u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
Sinus	$sin(\omega_0 t).u(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$
Cosinus	$cos(\omega_0 t).u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$
Sinus amortie	$e^{-at}sin(\omega_0 t).u(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$
Cosinus amortie	$e^{-at}cos(\omega_0 t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$

2.5 Transformée de Laplace inverse

Pour retrouver l'originale d'une fonction $\boldsymbol{F(p)}$ donnée, on décompose cette fonction (en général, une fraction rationnelle en $\boldsymbol{p}$) en éléments simples dont en prendra l'original dans la table de transformation.

2.5.1 Méthode de décomposition

Soit une fonction $F(p)$ de la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Chacune des valeurs de $\boldsymbol{p}$ qui annule soit le numérateur, soit le dénominateur, s'appelle une **racine**. Chacune des valeurs de $\boldsymbol{p}$ qui annule le **numérateur** est appelée un **zéro**. Chacune des valeurs de $\boldsymbol{p}$ qui annule le **dénominateur** est appelée un **pôle**.

L'idée consiste alors à mettre l'expression du dénominateur sous forme d'un produit de facteurs où apparaît chacune des racines :

$$D(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n)$$

Ceci permettra de décomposer $\boldsymbol{F(p)}$ sous la forme d'une somme de fractions simples. Dans tous les cas qui vont suivre nous considérerons que :

$$\deg\,(N(P) < \deg\,(D(p)$$

Si ce n'est pas le cas, il faudra d'abord extraire la partie entière par division polynomiale. Puis traiter uniquement la partie fractionnaire. Deux cas se présentent donc :

Cas 1 : tous les pôles $\boldsymbol{p_k}$ sont des ***racines simples*** (distinctes) :

Dans ce cas la forme décomposée de $\boldsymbol{F(p)}$ sera :

$$F(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{p-p_k} + \cdots + \frac{A_n}{p-p_n} \tag{2.20}$$

Chaque coefficient $\boldsymbol{A_k}$ est obtenu par :

$$A_k = \lim_{p \to p_k}(p - p_k)F(p) \tag{2.21}$$

et la solution dans le domaine temporel est :

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_k e^{p_k t} + \cdots + A_n e^{p_n t} \quad avec\ t > 0$$

Cas 2 : il existe un pôle $\boldsymbol{p_k}$ qui est une racine de multiplicité $\boldsymbol{m}$:

Dans ce cas la forme décomposée de $\boldsymbol{F(p)}$ sera :

$$F(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \cdots + \frac{A_i}{(p-p_k)^i} + \cdots + \frac{A_n}{(p-p_n)^n} \tag{2.22}$$

Chaque coefficient $\boldsymbol{A_i}$ est obtenu par :

$$A_i = \frac{1}{(m-i)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{m-i}}{dp^{m-i}}(p - p_k)^m F(p) \tag{2.23}$$

Cas 3 : Cas où le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur

Dans le cas où le $\deg(N(P)) = \deg(D(p))$, avant de décomposer la fonction en éléments simples, on doit d'abord effectuer une division euclidienne de son numérateur sur son dénominateur.

Exemple 1 (Cas1)

Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction :

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p^2+3p+2)}$$

Solution

1) Mettre le dénominateur sous forme de produit :

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p^2+3p+2)} = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)}$$

2) Mettre **F(p)** sous la forme d'une somme de fractions partielles :

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)} = \frac{a}{(p+3)} + \frac{b}{(p+2)} + \frac{c}{(p+1)}$$

3) Calcule de la valeur de chaque coefficient :

$$a = \lim_{p\to-3}(p+3)F(p) = \lim_{p\to-3}\frac{1}{(p+2)(p+1)} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{p\to-2}(p+2)F(p) = \lim_{p\to-2}\frac{1}{(p+3)(p+1)} = -1$$

$$c = \lim_{p\to-1}(p+1)F(p) = \lim_{p\to-3}\frac{1}{(p+3)(p+2)} = \frac{1}{2}$$

4) Exprimer la solution en **p**:

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)} = \frac{1/2}{(p+3)} + \frac{-1}{(p+2)} + \frac{1/2}{(p+1)}$$

5) Exprimer la solution dans le domaine temporel :

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Exemple 2 (Cas2)

Soit à trouver la solution dans le domaine temporel de :

$$F(p) = \frac{p^3-4p^2+4}{p^2(p-2)(p-1)}$$

Solution

$$F(p) = \frac{p^3-4p^2+4}{p^2(p-2)(p-1)} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{b}{(p-2)} + \frac{c}{(p-1)}$$

La détermination des coefficients va donner le résultat suivant :

$$a_2 = \lim_{p \to 0} p^2 F(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{(p-2)(p-1)} = 2$$

$$a_1 = \frac{1}{1!} \lim_{p \to 0} \frac{d}{dp}\left(p^2 F(p)\right) = \lim_{p \to 0} \frac{d}{dp}\left(\frac{p^3 - 4p^2 + 4}{(p-2)(p-1)}\right) = 3$$

$$b = \lim_{p \to 2} (p-2) F(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-1)} = -1$$

$$c = \lim_{p \to 1} (p-1) F(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)} = -1$$

$$F(p) = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)(p-1)} = \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{-1}{(p-2)} + \frac{-1}{(p-1)}$$

la solution dans le domaine temporel :

$$f(t) = 3 + 2t - e^{2t} - e^{t}$$

Exemple 3 (Cas3)

Soit à trouver la solution dans le domaine temporel de :

$$F(p) = \frac{2p^2 + 8p + 5}{(p+2)(p+1)}$$

Solution

1) Effectuer la division Euclidienne :

$$F(p) = \frac{2p^2 + 8p + 5}{(p+2)(p+1)} = 2 + \frac{2p + 1}{(p+2)(p+1)}$$

2) Mettre **F(p)** sous la forme d'une somme de fractions partielles :

$$F(p) = 2 + \frac{2p + 1}{(p+2)(p+1)} = 2 + \frac{a}{(p+2)} + \frac{b}{(p+1)}$$

3) Détermination des coefficients de $F(p)$: :

$$F(p) = 2 + \frac{3}{(p+2)} + \frac{-1}{(p+1)}$$

4) Exprimer la solution dans le domaine temporel :

$$f(t) = 2\delta(t) + 3e^{-2t} - e^{-t}$$

2.6 Analyse temporelle

2.6.1 Système du premier ordre

Un système est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle de premier ordre telle que :

$$\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k.e(t) \tag{2.24}$$

avec : $\boldsymbol{e(t)}$ et $\boldsymbol{s(t)}$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. En supposant que les conditions initiales soient nulles (**CI=0**), il est possible de calculer la fonction de transfert $G(p)$ du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (4.1):

$$\tau.[pS(p) - s(0)] + S(p) = K.E(p)$$
$$S(p)[\tau p + 1] = K.E(p)$$
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$
$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \tag{2.25}$$

Les paramètres de la fonction de transfert ou du système sont alors :

$\boldsymbol{K}$: Gain statique

$\boldsymbol{\tau}$: Constante de temps

a) Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$. Elle caractérise aussi l'identité du système.

$$\xrightarrow{\boldsymbol{E(p)}} \boxed{\boldsymbol{G(p)}} \xrightarrow{\boldsymbol{S(p)}}$$

$\boldsymbol{e(t)} = \delta(t) \qquad \Rightarrow E(p) = 1$

Donc

$$S(p) = E(p).\frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

La sortie temporelle correspondante $\boldsymbol{s(t)}$ s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1}\left\{\frac{K}{1 + \tau p}\right\} = TL^{-1}\left\{\frac{K}{\tau} \times \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}\right\} = \frac{K}{\tau}TL^{-1}\left\{\frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}\right\}$$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale est :

$$s(t) = \frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad pour\ t \geq 0 \tag{2.26}$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous :

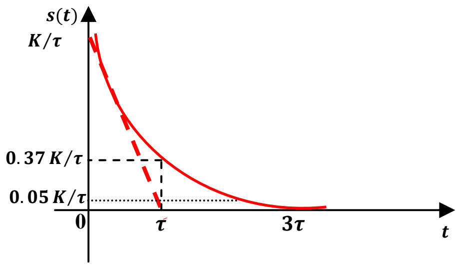

Figure 2.4 Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Les points particuliers de cette réponse sont:

- **Point de départ:** en utilisant le théorème de la valeur initiale

$$s(0) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \frac{K}{\tau}$$

- **Point d'arrivés:** en utilisant le théorème de la valeur finale

$$s(\infty) = \lim_{p\to 0} pS(p) = 0$$

b) Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système est sa réponse quand un échelon d'amplitude unité est appliqué à son entrée. La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

Dans ce cas-là :

$$\boldsymbol{e(t)} = u(t) \qquad \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

Donc

$$S(p) = E(p)\frac{K}{1+\tau p} = \frac{1}{p}\times\frac{K}{1+\tau p} = \frac{\frac{K}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}$$

La sortie temporelle correspondante $\boldsymbol{s(t)}$ s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}\right\} = \frac{K}{\tau}TL^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+\frac{1}{\tau})}\right\} = \frac{K}{\tau}TL^{-1}\left\{\frac{\tau}{p}+\frac{-\tau}{(p+\frac{1}{\tau})}\right\}$$

$$\frac{1}{p(p+\frac{1}{\tau})} = \frac{a}{p}+\frac{b}{(p+\frac{1}{\tau})} = \frac{\tau}{p}+\frac{-\tau}{(p+\frac{1}{\tau})}$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau}TL^{-1}\left\{\frac{\tau}{p}+\frac{-\tau}{(p+\frac{1}{\tau})}\right\} = TL^{-1}\left\{\frac{K}{p}+\frac{-K}{(p+\frac{1}{\tau})}\right\}$$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale est :

$$s(t) = K\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad pour\ t \geq 0 \tag{2.27}$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous

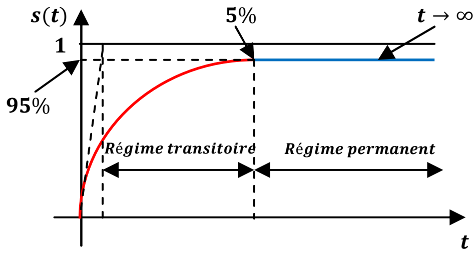

Figure 2.5 Réponse indicielle d'un système du premier ordre

Les points particuliers de cette réponse sont:

- **Point de départ:** en utilisant le théorème de la valeur initiale

$$s(0) = \lim_{p \to +\infty} pS(p) = 0$$

- **Point d'arrivés:** en utilisant le théorème de la valeur finale

$$s(\infty) = \lim_{p \to 0} pS(p) = K$$

Temps de réponse t_r du système : temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $\mathbf{0.95\, s(\infty)}$. C'est le temps de réponse à 5% :

$$t_r \simeq 3\tau \qquad (2.28)$$

Remarque : Le signal de sortie atteint 63% de la valeur finale en τ unités de temps.

Temps de montée t_m : temps au bout duquel la réponse passe de $\mathbf{0.1 s(\infty)}$ à $\mathbf{0.9\, s(\infty)}$.

$$t_m \simeq 2,2\tau \qquad (2.29)$$

On constate donc que la sortie $s(t)$ atteint pratiquement le régime permanent au bout d'un temps qui dépend de la constante τ . Cette constante τ, appelée **constante de temps**, caractérise donc la **rapidité du système** à atteindre son régime permanent.

c) Réponse à une rampe

Supposons que le système du premier ordre soit excité par un signal de type rampe :

Dans ce cas-là :

$$e(t) = r(t) = t.u(t) \qquad \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2}$$

Donc

$$S(p) = E(p)\frac{K}{1+\tau p} = \frac{1}{p^2} \times \frac{K}{1+\tau p} = \frac{\frac{K}{\tau}}{p^2(p+\frac{1}{\tau})}$$

$$S(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{(p+\frac{1}{\tau})} = \frac{-\tau K}{p} + \frac{K}{p^2} + \frac{\tau K}{(p+\frac{1}{\tau})}$$

La sortie temporelle correspondante $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{p^2(p+\frac{1}{\tau})}\right\} = TL^{-1}\left\{\frac{-\tau K}{p} + \frac{K}{p^2} + \frac{\tau K}{(p+\frac{1}{\tau})}\right\}$$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale est :

$$s(t) = K\left(-\tau + t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad pour\ t \geq 0 \tag{2.30}$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous

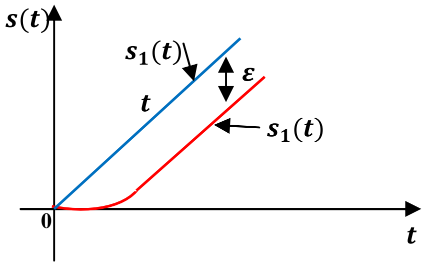

Figure 2.6 Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

L'écart $\boldsymbol{\varepsilon}$, en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $+\infty\ si\ \boldsymbol{K} < 1$, $-\infty\ si\ \boldsymbol{K} > 1$ et $\boldsymbol{\tau}\ si\ \boldsymbol{K} = \mathbf{1}$. Il est baptisé **erreur de traînage** lorsque $\boldsymbol{K} = \mathbf{1}$.

En général : **erreur de traînage** :

$$\boldsymbol{\varepsilon = K\tau} \tag{2.31}$$

Donc, un système du 1er ordre suit les variations linéaires de l'entrée avec un certain retard, d'où leur nom de système à retard.

2.6.2 Système du second ordre

Un système est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \tag{2.32}$$

En supposant que les conditions initiales soient nulles, il est possible de calculer la fonction de transfert $G(p)$ du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (2.32):

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left[p^2S(p) - ps(0) - \dot{s}(0)\right] + \frac{2\zeta}{\omega_0}\left[pS(p) - s(0)\right] + S(p) = K.E(p)$$

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1\right)S(p) = K.E(p)$$

$$G(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1} \tag{2.33}$$

Avec :

K : le gain statique, ζ le facteur ou coefficient d'amortissement et $\omega_0$la pulsation naturelle.

Comme le dénominateur de la fonction de transfert est d'ordre 2, il est nécessaire d'´etudier le lieu de ces racines afin de connaître le comportement du système. Le discriminant du dénominateur est :

$$\Delta = \frac{1}{\omega_0^2}(\zeta^2 - 1) \tag{2.34}$$

Donc : $$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1 = (p - p_1)(p - p_2)$$

Pour $\boldsymbol{\zeta > 1}$

Les polynômes $p_1\ et\ p_2$ sont deux racines réelles négatives ou positives

⇒ Le système est **stable**. (**Régime sur amorti**).

La réponse est alors qualifiée **d'apériodique** puisqu'elle ne présente **aucun dépassement** relativement à la valeur finale. Plus le facteur d'amortissement est grand, plus le temps de réponse est conséquent.

Pour $\boldsymbol{\zeta = 1}$

Les polynômes $p_1\ et\ p_2$ sont deux racines doubles

⇒ Le système est juste **oscillant**. (**Régime amorti critique**).

Il s'agit d'une réponse **apériodique** la plus rapide. C'est le régime **apériodique critique**.

Pour $\boldsymbol{\zeta < 1}$

Les polynômes $p_1\ et\ p_2$ sont deux racines complexes

⇒ Le système est **instable**. (Il oscille : amortissement sur critique).

NB : - si $\boldsymbol{\zeta} < 0.7$ **:** Systèmes oscillants (Les oscillations sont visibles)

- **si** $\boldsymbol{\zeta} > 0.7$: Pas d'oscillations.

a) Réponse indicielle

Soit un système linéaire du deuxième ordre. L'entrée du système est un échelon $e(t) = 1$.

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1}$$

Discussion suivant la valeur de ζ :

Cas1 : $\boldsymbol{\zeta} > 1$

On a : $D(p) = \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1 = (p - p_1)(p - p_2)$

Avec $p_1 = -\zeta\omega_0 + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ et $p_2 = -\zeta\omega_0 - \sqrt{\zeta^2 - 1}$

Le système est **stable** si les pôles p_1 et p_2 sont négatifs, ce qui correspond à la condition $\zeta > 1$.

Comme $p_1 \times p_2 = \omega_0^2$, et on a

$$G(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La fonction de transfert du système du 2e ordre apériodique est équivalent à la mise en série de deux systèmes du 1er ordre de constantes de temps :

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} \quad et \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2}$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} \times \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La réponse temporelle $\boldsymbol{s(t)}$ correspondante s'´ecrit :

$$s(t) = K.\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right] \quad pour\ t \geq 0 \tag{2.35}$$

Avec :

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{2\zeta}{\omega_0} \quad et \quad \tau_1 \times \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$$

Cas2 : $\boldsymbol{\zeta = 1}$

Les racines sont doubles $p_{1,2} = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$

On a : $D(p) = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 = (1+\tau p)^2$

$$S(p) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} \times \frac{K}{(1+\tau p)^2}$$

La réponse temporelle $\boldsymbol{s(t)}$ correspondante s'´ecrit :

$$s(t) = K.\left[1 - (1-\omega_0 t)\, e^{-\omega_0 t}\right] \quad pour\ t \geq 0 \tag{2.36}$$

Cas3 : $\boldsymbol{\zeta} < 1$

Les racines sont doubles sont complexes conjuguées :

$$p_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{et } p_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Le système est **stable** si $Re(p_1) < 0$ et $Re(p_2) < 0$, soit $\mathbf{0} < \zeta < \mathbf{1}$, on a :

$$S(p) = \frac{K}{p\left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1\right)} = \frac{K\omega_0^2}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = (p-p_1)(p-p_2)$$

La réponse temporelle $\boldsymbol{s(t)}$ correspondante s'´ecrit :

$$s(t) = K.\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} sin\left(\omega_p t + \varphi\right)\right] \quad pour\ t \geq 0 \tag{2.37}$$

Avec $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ et $\varphi = arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = arccos(\zeta)$

La courbe de $s(t)$ est une sinusoïde amortie.

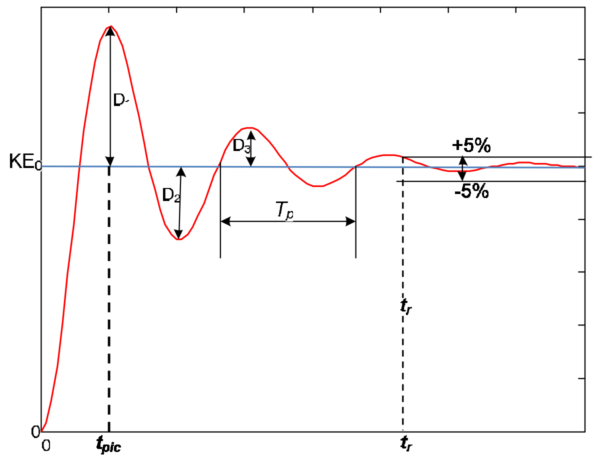

Figure 2.7 Réponse oscillatoire amortie d'un système du second ordre