Chapitre 3

Caractéristiques dynamiques d'un système

3.1 Introduction

Un système est défini par ses constituants et les interactions qui existent entre eux, l'ensemble représentant une entité individualisée. Par **système**, on signifie souvent **processus**. L'importance de la notion de système réside dans sa généralité. En effet, un système/processus peut être de nature quelconque : mécanique, électrique, électromécanique, biologique, chimique, physico-chimique, sociologique, économique, industriel, etc.

On appelle système linéaire, un système tel que si le signal **d'entrée** $\boldsymbol{x_1(t)}$ donne $\boldsymbol{y_1(t)}$ **en sortie**, et $x_2(t)$ donne $y_2(t)$:

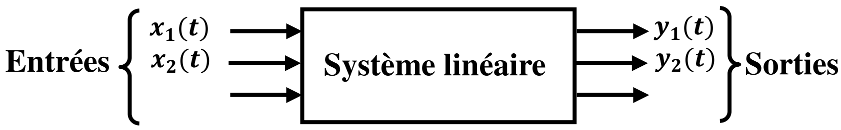


Figure 3.1 Système Linéaire

Par grandeur de sortie, on entend la grandeur que l'on souhaite réguler ou asservir. Par grandeur d'entrée, on entend les signaux qui permettent d'agir sur le système, c'est-à-dire qui affectent l'état de sa grandeur de sortie. La grandeur de sortie peut être modifiée par l'action des grandeurs d'entrées ou sous l'effet de perturbations provenant de l'environnement ou encore sous l'effet de la variation des constituants du système lui-même.

Les entrées et les sorties sont en générale multiples (systèmes multi-variable ou en anglais système **MIMO**, *Multi Inputs Multi Outputs*). Lorsqu'il n'y a qu'une entrée de commande et une sortie, le système est dit mono-variable ou en anglais système **SISO** (*Single input single output*). Dans ce qui suit nous allons considérer uniquement les systèmes mono-variables.

3.2 Fonction de transfert d'un Système Linéaire

Les systèmes étudiés sont considérés linéaires et monovariables. L'équation liant la sortie à l'entrée d'un système linéaire est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

La forme générale de cette équation différentielle est :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) \qquad = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \tag{3.1}$$

Les paramètres $a_n, a_{n-1}, \dots\dots, a_1, a_0 \quad b_n, b_{n-1}, \dots\dots, b_1, b_0$ sont constants (ils ne varient pas avec le temps) et dépendent des éléments internes du système.

La réalisabilité physique impose d'avoir $\boldsymbol{m \leq n}$. $\boldsymbol{n}$ est appelé l'ordre du système. Partant de conditions initiales nulles (système au repos à l'origine), par transformée de Laplace, l'équation (3.1) devient :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) E(p)$$

On en déduit la transmittance ou la fonction de transfert H(p) du système :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{3.2}$$

Les racines du numérateur $N(p)$ sont les **zéros** de la fonction de transfert, Les racines du dénominateur $D(p)$ sont appelées **pôles**.

3.2.1 Définitions liées à la fonction de transfert

a) Pôles : On appelle 'pôles' de la fonction de transfert, les valeurs de $p = p_i$ qui annulent le dénominateur ou encore: $D(p_i) = 0$. $D(p)$ peut se mettre sous la forme dite factorisée :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = \prod_i (p - p_i)^{k_i} \tag{3.3}$$

k_i est l'ordre de pôle p_i et tel que $\sum k_i = n$.

b) **Zéros :** On appelle 'zéros' de la fonction de transfert, les valeurs de $p = z_j$ qui annulent le numérateur ou encore: $N(z_j) = 0$. $N(p)$ peut se mettre sous la forme dite factorisée :

$$N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = \prod_j (p - z_j)^{k_j} \tag{3.4}$$

k_j est l'ordre de pôle z_j et tel que $\sum k_j = m$.

c) Classe :

Si $\quad p^{\alpha} \prod_i (p - p_i)^{k_i}$ (3.5)

$p = 0$ est un pôle nul, $\boldsymbol{\alpha}$ est la classe du système.

d) Gain statique : On appelle gain statique G_S du système (s'il existe) la valeur de $H(p = 0)$ soit :

$$G_S = \frac{b_0}{a_0} \tag{3.6}$$

e) Gain en vitesse : On appelle gain en vitesse, la valeur de $pH(p)$ pour $p = 0$ si elle existe. $pH(p)$ est la dérivée de $h(t)$ soit $h'(t)$.

3.3 Résolution d'équations différentielles à coefficients Constants

3.3.1 Equation du premier ordre

On considère un système linéaire de 1er ordre régi par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} e(t) = \dot{y} + ay \\ y(0^+) = y_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

On a: $TL\{e(t)\} = TL\{\dot{y} + ay\} = TL\{\dot{y}\} + a.TL\{y\}$

$$\Rightarrow E(p) = pY(p) - y_0 + aY(p)$$

$$\Rightarrow E(p) = (p + a)Y(p) - y_0$$

D'où:

$$Y(p) = \frac{E(p)}{p + a} + \frac{y_0}{p + a} \quad \text{où } y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\}$$

3.3.2 Equation du Second ordre

On considère un système linéaire de 2ème ordre régi par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} e(t) = \ddot{y} + a\dot{y} + by \\ y(0^+) = y_0 \; et \; \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

On a $TL\{e(t)\} = TL\{\ddot{y} + a\dot{y} + by\} = TL\{\ddot{y}\} + a.TL\{\dot{y}\} + b.TL\{y\}$

$$\Rightarrow E(p) = p^2Y(p) - py_0 - \dot{y}_0 + apY(p) - ay_0 + bY(p)$$

$$\Rightarrow E(p) = (p^2 + ap + b)Y(p) - py_0 - ay_0 - \dot{y}_0$$

D'où:

$$Y(p) = \frac{E(p)}{p^2 + ap + b} + \frac{(p + a)y_0 + \dot{y}_0}{p^2 + ap + b} \quad \text{où } y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\}$$

Exemple 1 :

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation aux différences suivante lorsque le signal d'entrée est un échelon unité:

$$\begin{cases} e(t) = \dot{y} + 2y \\ y(0^+) = 1 \end{cases}$$

Solution :

On a: $TL\{e(t)\} = TL\{\dot{y} + ay\}$ $\Rightarrow E(p) = pY(p) - y_0 + 2Y(p)$

$$\Rightarrow E(p) = (p+2)Y(p) - y_0$$

$$e(t) = u(t) = 1 \Rightarrow TL\{e(t)\} = TL\{u(t)\} \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

d'où $$Y(p) = \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{p+2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{1}{p+2}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1/2}{p} + \frac{-1/2}{p+2} + \frac{1}{p+2} = \frac{1/2}{p} + \frac{1/2}{p+2}$$

$$y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t)$$

Exemple 2 :

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation aux différences suivante lorsque le signal d'entrée est une impulsion unité:

$$\begin{cases} e(t) = \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y \\ y(0^+) = 1 \; et \; \dot{y}(0^+) = -1 \end{cases}$$

Solution :

On a $TL\{e(t)\} = TL\{\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y\}$

$$\Rightarrow E(p) = p^2Y(p) - py_0 - \dot{y}_0 + 2pY(p) - 2y_0 + 5Y(p)$$

$$\Rightarrow E(p) = (p^2 + 2p + 5)Y(p) - p - 2 + 1$$

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow TL\{e(t)\} = TL\{\delta(t)\} \Rightarrow E(p) = 1$$

D'où:

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} + \frac{1}{(p+1)^2 + 4}$$

D'après la table de la transformée de Laplace :

$$TL^{-1}\left(\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}\right) = e^{-at}\,cos(\omega_0 t)\,.\,u(t) \; et \; TL^{-1}\left(\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}\right) = e^{-at} sin(\omega_0 t)\,.\,u(t)$$

$$y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\} = e^{-t}[cos(2t) + 0.5\sin(2t)]u(t)$$

3.4 Modélisation des systèmes

3.4.1 Exemple électrique : Circuit RC

Considérons le système (simple) électrique suivant, où l'on définira l'entrée $\boldsymbol{v_e}$ et la sortie $\boldsymbol{v_s}$:

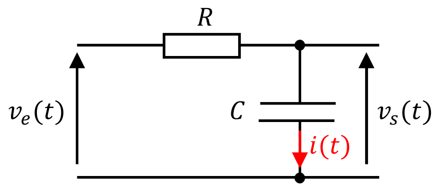


Figure 3.2 Circuit RC

On peut écrire la relation entre la tension d'alimentation $\boldsymbol{v_e(t)}$ de ce circuit et le courant qui y circule $\boldsymbol{i(t)}$ ainsi la tension de sortie $\boldsymbol{v_s(t)}$:

$$v_e(t) = R.i(t) + v_s(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt}$$

Ou bien encore :

$$v_e(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$$

et si l'on calcule la transformée de Laplace de cette équation :

$$V_e(p) = RCpV_s(p) + V_s(p) = (RCp + 1)V_s(p)$$

On obtient ainsi la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

3.4.2 Exemple mécanique : Masse-Ressort-Amortisseur

Considérons le système décrit par la figure ci-dessous :

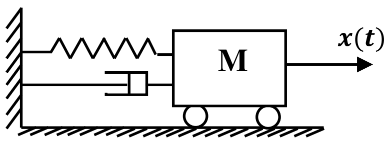


Figure 3.3 Amortisseur

Par application du Principe Fondamental de la Dynamique, l'équation différentielle régissant le comportement de la masse M soumise à une force $x(t)$ est donnée par :

$$M\frac{dy^2(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation et en choisissant la position $y(t)$ de la masse comme sortie, on obtient la fonction de transfert du système comme le rapport de $Y(p)$ sur $X(p)$, soit :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{Mp^2 + fp + K}$$

3.5 Propriétés d'un Système Linéaire Continu Invariant

3.5.1 Système linéaire

Un système linéaire en automatique est un système qui obéit aux propriétés suivantes :

- **principe de superposition** : si l'entrée du système se décompose en une somme de plusieurs entrées alors la sortie du système sera la somme des sorties correspondant à chaque entrée séparée.
- **causalité** : toutes les valeurs sont nulles avant le début de l'expérience (correspondant à l'application de la première consigne).

Pour résumer, un système est linéaire s'il peut être modélisé par des fonctions de transferts linéaires.

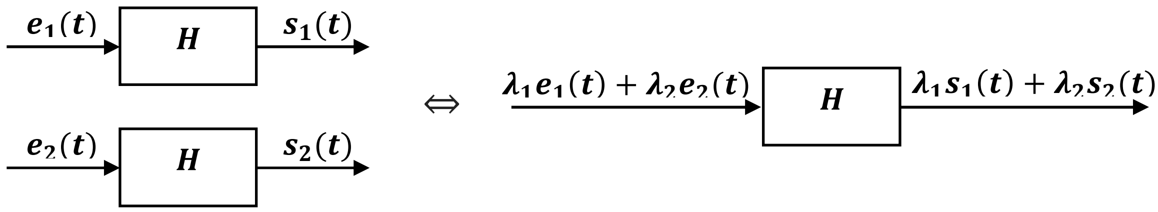


Figure 3.4 Illustration du principe de superposition

3.5.2 Système continu

Un Système continu est un système mettant en jeu des signaux continus. Ainsi les signaux mis en jeux ne seront que des grandeurs analogiques. La mesure et la commande sont donc effectuées en continu .On parle de systèmes continus par opposition aux systèmes échantillonnés.

3.5.3 Système invariant

Un système invariant (ou **stationnaire**) est un système dont la réponse à une excitation ne varie pas dans le temps (ie lorsqu'une translation du temps appliquée à l'entrée se retrouve à la sortie).

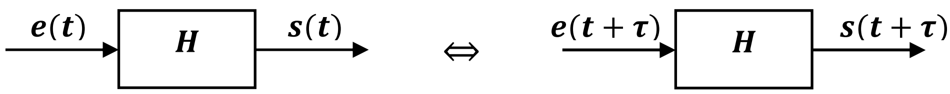


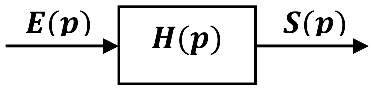
Figure 3.5 Système invariant

3.6 Représentation par le schéma fonctionnel - Fonction de transfert

La représentation par le schéma fonctionnel permet de représenter de manière graphique un système linéaire. Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions du système, l'allure globale du schéma renseigne aussi sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée). Les équations différentielles du comportement sont traduites par la fonction de transfert de chaque constituant. Le système d'équations est remplacé par un ensemble de blocs représentant les fonctions du système. Les branches entre les blocs portent les variables intermédiaires globales du système.

D'une manière générale, un schéma fonctionnel est constitué par un assemblage de quatre types d'éléments : des rectangles, des comparateurs, des points de dérivation et les flèches représentants la circulation orientée des signaux.

3.6.1 Le bloc : Le bloc possède une entrée et une sortie. $H(p)$ est la fonction de transfert du bloc est déterminée d'après les équations de fonctionnement.



$$S(p) = H(p).E(p)$$

3.6.2 Le sommateur: Les sommateurs permettent d'additionner et soustraire des variables, ils possèdent plusieurs entrées mais une seule sortie. **Le comparateur** c'est un cas particulier de sommateur qui permet de faire la différence de deux entrées (de comparer).

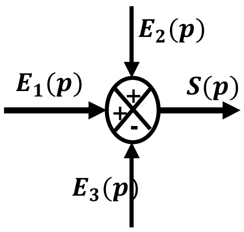


Figure 3.6 Sommateur

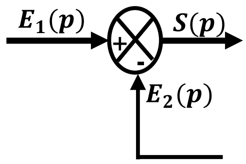
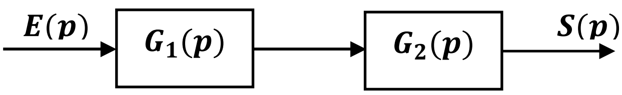


Figure 3.7 Comparateur

$$S(p) = E_1(p) + E_2(p) - E_3(p)$$

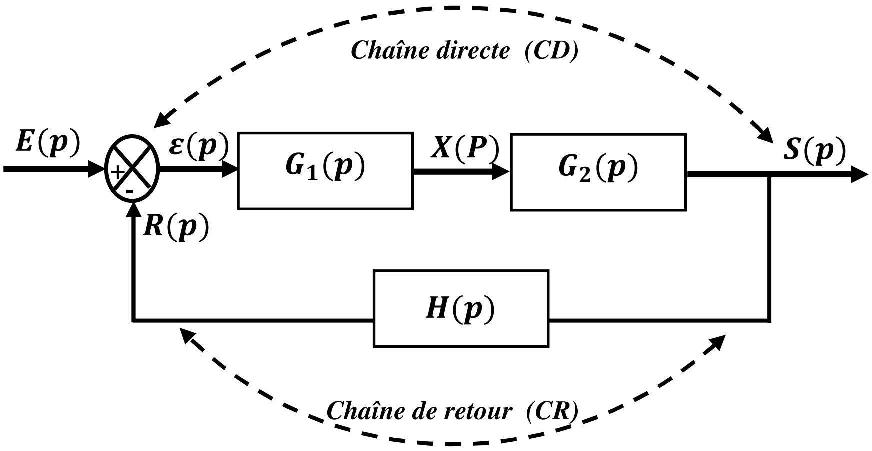
$$S(p) = E_1(p) - E_2(p)$$

3.6.3 Eléments en série :

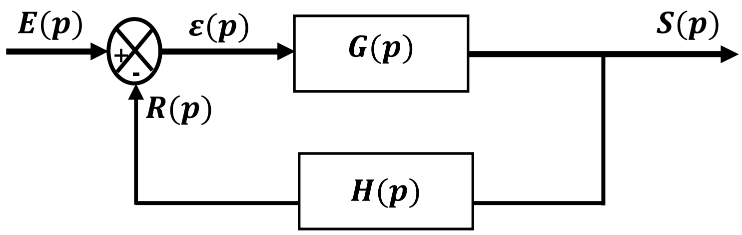


$$S(p) = G_1(p).G_2(p).E(p)$$

On peut de la même manière tracer le schéma bloc d'un système asservi :



En notant $\boldsymbol{G(p) = G_1(p).G_2(p)}$, le schéma bloc du système ci-dessous peut se simplifier et se mettre sous une forme dite **forme canonique** :



$\boldsymbol{\varepsilon(p)} = E(p) - R(p)$, $S(p) = G(p).\varepsilon(p)$, $\boldsymbol{R(p)} = H(p).S(p)$

Soit :

$$S(p) = G(p).\boldsymbol{\varepsilon(p)} = G(p).[E(p) - \boldsymbol{R(p)}] = G(p).[E(p) - H(p).S(p)]$$

$$\Rightarrow S(p) = G(p).E(p) - G(p).H(p).S(p)$$

$$\Rightarrow S(p).[1 + G(p).H(p)] = G(p).H(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)}$$

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)} \tag{3.9}$$

est la fonction de transfert en boucle fermée ($FTBF$)

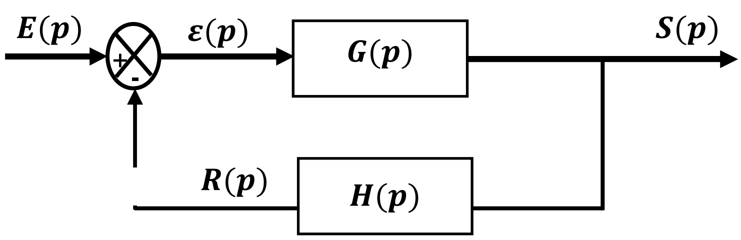
Ou encore :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p)FTCR(p)}$$

$FTCD(p)$: **F**onction de **T**ransfert de la **C**haîne **D**irecte

$FTCR(p)$: **F**onction de **T**ransfert de la Chaîne de **R**etour

Fonction de Transfert en Boucle Ouverte $FTBO$ d'un système asservi **:**



Le système mis sous forme canonique, étant considéré en boucle ouverte, on a :

$$\varepsilon(p) = E(p), \quad R(p) = \varepsilon(p).G(p).H(p)$$

$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{E(p)} = G(p).H(p)$$

$$FTBO(p) = T(p) = G(p).H(p) = FTCD(p).FTCR(p)$$

Alors

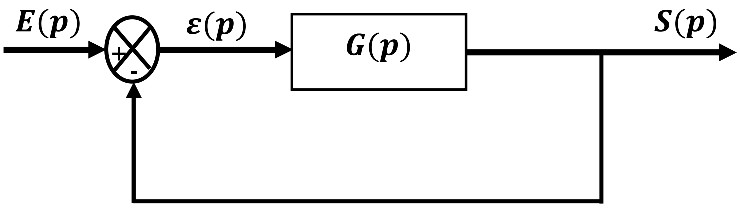
$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)} = \frac{G(p)}{1 + T(p)}$$

$$F(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte a une grande importance dans l'étude de la stabilité des systèmes ; de plus, elle est directement accessible à la mesure.

Fonction de transfert avec retour unitaire

Comme précédemment, mais avec $\boldsymbol{H(p) = 1}$

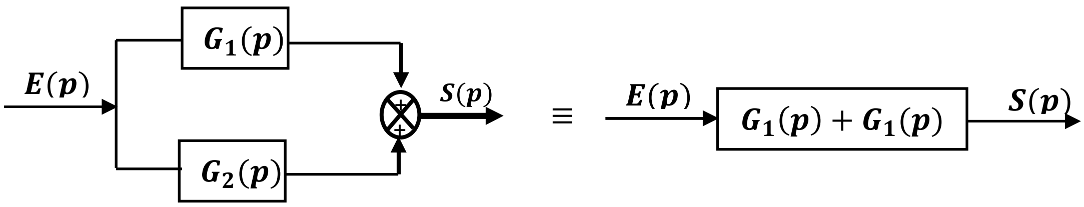


La fonction de transfert en boucle ouverte est : $T(p) = G(p)$

Et la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

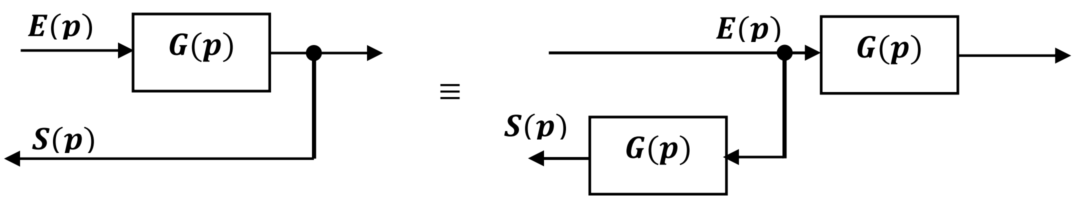
3.6.4 Eléments en parallèle :



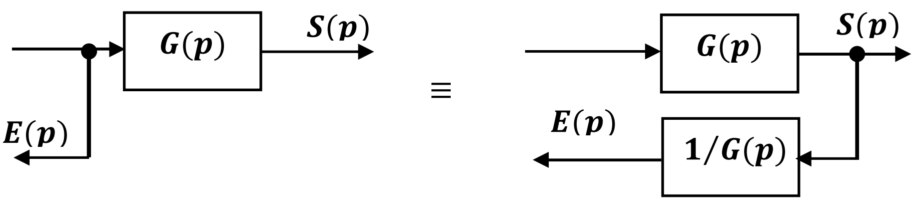
$$S(p) = (G_1(p) + G_2(p)).E(p)$$

3.6.5 Déplacement des points de prélèvement :

a) **A gauche d'un élément :**

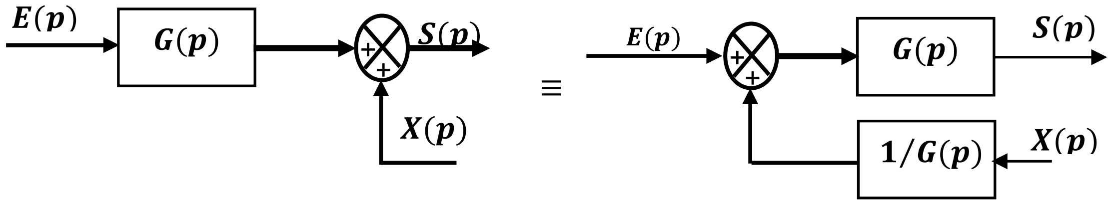


b) **A droite d'un élément :**

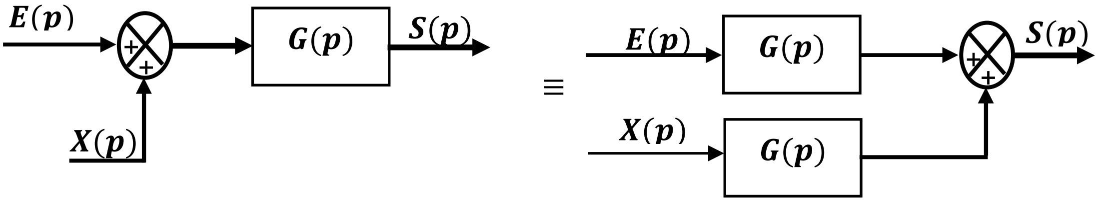


3.6.6 Déplacement des points de sommation :

a) A gauche d'un élément :



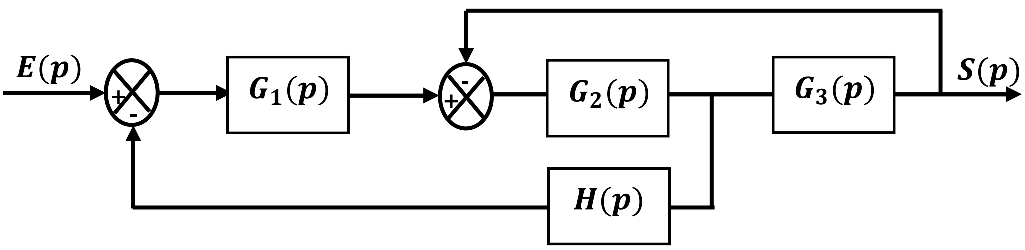
b) A droite d'un élément :



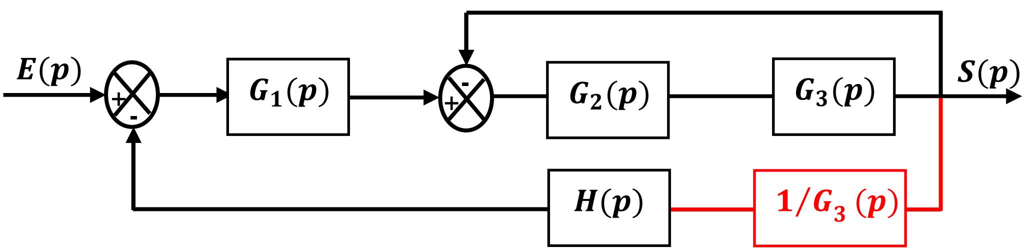
Ces équivalences sont généralement utilisées pour réorganiser des schémas-blocs qui présentent des difficultés pour calculer la fonction de transfert.

Exemple :

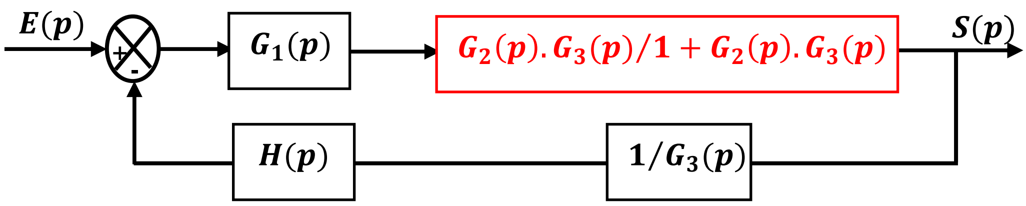
Simplifier le schéma bloc suivant puis calculer la fonction de transfert correspondante :



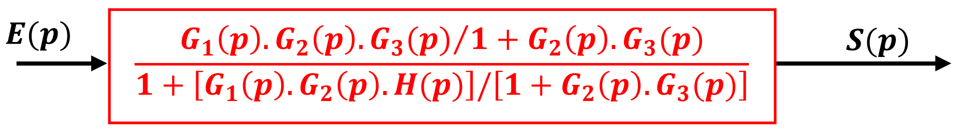
Phase 1 : Déplacement du point de prélèvement pour obtenir des boucles imbriquées



Phase 2 : Recherche de la $FTBF$ de la boucle 1 et absorption de cette boucle



Phase 3 : Recherche de la fonction de transfert globale



3.7 Systèmes à plusieurs entrées

Principe de superposition

Un système dynamique est linéaire si le principe de superposition peut être appliqué. Ainsi la réponse $s(t)$ d'un système linéaire dû à plieurs entrées appliquées simultanément est égale à la somme des réponses de chaque entrée appliquée séparément.

Exemple :

Soit à calculer la sortie $S(p)$ du système, à deux entrées, représenté ci-dessous:

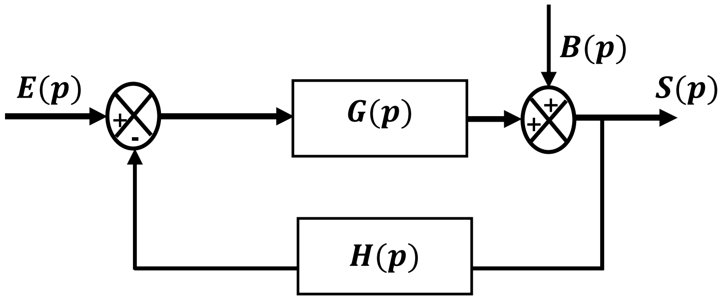
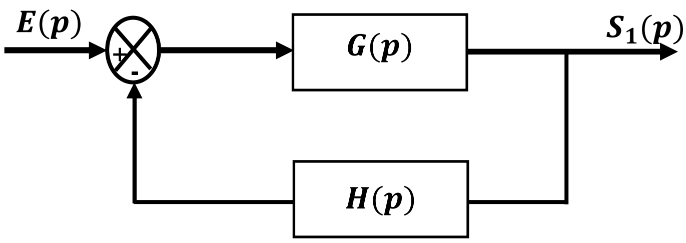


Figure 3.8 Système à deux entrées

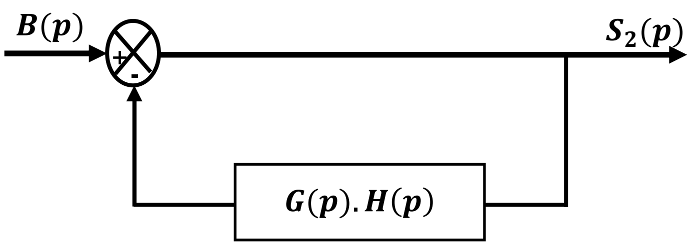
Schéma équivalent :

1er Cas $B(p)=0$ *et* $E(p)\neq 0$



$$S_1(p)=\frac{G(p)}{1+G(p).H(p)}E(p)$$

2ième Cas $E(p)=0$ *et* $B(p)\neq 0$



$$S_2(p)=\frac{1}{1+G(p).H(p)}B(p)$$

La sortie $S(p)$ du système est :

$$S(p)=S_1(p)+S_2(p)=\frac{G(p)}{1+G(p).H(p)}E(p)+\frac{1}{1+G(p).H(p)}B(p)$$