Chapitre 4

Régulation en BO et BF

4.1 Précision des systèmes asservis

La précision est une propriété fondamentale pour un système asservi. En effet, un système qui se révèle précis à tout instant et en toutes circonstances présentera en matière de stabilité, d'amortissement et de rapidité toutes les qualités souhaitées. On peut quantifier la précision d'un système par l'écart vrai $\varepsilon(t)$ existant entre l'entrée $e(t)$ et la sortie désirée $s(t)$. On distingue deux types d'écarts ou d'erreurs, l'erreur statique en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée et l'erreur dynamique qui est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation.

Le cas idéal de point de vue précision est d'avoir à chaque instant $\boldsymbol{\varepsilon(t) = 0}$ Cependant l'entrée $\boldsymbol{e(t)}$ peut varier au cours du temps et le système est soumis à divers perturbations. L'écart n'est pratiquement jamais nul.

4.2 Définitions

4.2.1 Précision statique

La précision statique d'un système asservi est définie par **l'écart** constaté lorsque $\boldsymbol{t} \to \infty$, c'est-à-dire qu'on s'intéresse plus particulièrement au comportement asymptotique. Pour la précision statique, la nature de la fonction de transfert de la chaîne de retour n'a pas d'influence, elle est toujours définie par la différence : $\boldsymbol{\varepsilon(t) = e(t) - s(t)}$.

4.2.2 Précision dynamique

La précision dynamique concerne la valeur atteinte par **l'écart** pendant les **régimes transitoires** qui dépendent eux-mêmes de la nature des sollicitations imposées au système.

Remarque

La démarche pour l'étude de la précision dynamique d'un système est différente suivant que l'on s'intéresse à :

- un système **suiveur** (précision vis-à-vis de l'entrée principale ou précision en poursuite)
- un système **régulateur** (précision vis-à-vis des perturbations ou précision en régulation).

4.3 Précision Statiques des Systèmes bouclés

Soit un système asservi stable à l'entrée duquel on injecte un signal de consigne. Nous voulons que le système ait des performances: précision et rapidité.

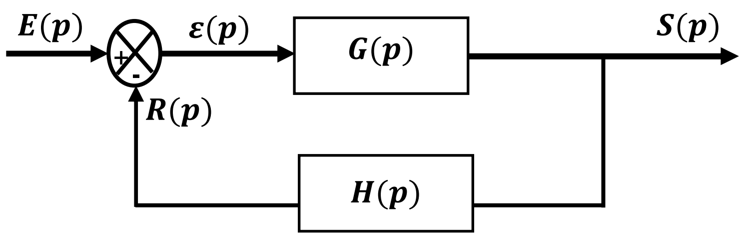

Figure 4.1 Système asservi sans perturbation

Expression de l'écart $\boldsymbol{\varepsilon(p)}$

$$\boldsymbol{\varepsilon(p)} = E(p) - R(p) \qquad , \boldsymbol{S(p)} = G(p).\varepsilon(p), \qquad \boldsymbol{R(p)} = H(p).S(p)$$

Soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon(p)} = E(p) - \boldsymbol{R(p)} = E(p) - H(p).\boldsymbol{S(p)} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon(p)} = E(p) - H(p).G(p).\varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p).[1 + G(p).H(p)] = E(p) \Rightarrow \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + G(p).H(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \tag{4.1}$$

L'écart, comme la variable de sortie s(t), comporte une partie transitoire et une partie permanente.

- Au cours du régime permanent, il est appelé l'écart statique $\boldsymbol{\varepsilon_s}$ (précision statique).
- Au cours du régime transitoire, il est appelé l'écart dynamique $\boldsymbol{\varepsilon_d}$ (précision dynamique).

4.3.1 Ecart statique

L'écart en régime permanent est la valeur de $\varepsilon(t)$ quant t tend vers l'infini :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) \tag{4.2}$$

Pour obtenir ε_s à partir de $\varepsilon(p)$, il faut appliquer le théorème de la valeur finale:

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \tag{4.3}$$

4.3.2 Ecart de position $(\boldsymbol{\varepsilon_p})$

C'est l'écart quand l'entrée $e(t)$ est un échelon.

Nous avons de ce cas:

$$e(t) = a.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p} \quad \text{avec a: Amplitute de l'échelon}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \frac{\frac{a}{p}}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{1 + FTBO(p)}$$

La forme générale de $FTBO(p)$ est :

$$FTBO(p) = K\frac{1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + \cdots + b_mp^m}{p^\alpha(1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \cdots + a_np^n)} \quad (4.4)$$

$\boldsymbol{\alpha}$: **correspond à la classe du système** ou encore au nombre d'intégrateurs présents dans la fonction de transfert en boucle ouverte et ***K* est la gain** de la fonction de transfert $FTBO(p)$.

$$FTBO(p) = K\frac{N(p)}{p^\alpha D(p)} \qquad avec\ N(0) = D(0) = 1$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\frac{a}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{a}{1 + K\frac{N(p)}{p^\alpha D(p)}} = \lim_{p\to 0}\frac{a.p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\frac{a.p^\alpha}{p^\alpha + K} \quad (4.5)$$

Si $\boldsymbol{\alpha = 0}$; $FTBO(p)$ est **de $\boldsymbol{classe}$ 0 , alors**

$$\varepsilon_p = \frac{a}{1 + K}$$

Si $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$; $FTBO(p)$ est **de $\boldsymbol{classe}$ $\geq$ 0 , alors**

$$\varepsilon_p = 0$$

NB : Pour annuler l'erreur de position, il faut au moins une intégration dans la fonction de transfert boucle ouverte $FTBO(p)(\alpha \geq 1)$. Si $FTBO(p)$ est de classe 0, l'erreur diminue quand le gain K augmente.

4.3.2 Ecart de vitesse (traînage) ($\boldsymbol{\varepsilon_v}$)

Cet **écart** est défini pour une **entrée en rampe**

Nous avons de ce cas:

$$e(t) = a.tu(t) \ \Rightarrow\ E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} p\frac{\frac{a}{p^2}}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{a}{p\big(1 + FTBO(p)\big)}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0}\frac{a}{p\left(1 + K\frac{N(p)}{p^\alpha D(p)}\right)} = \lim_{p\to 0}\frac{a.p^{\alpha-1}D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0}\frac{a.p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \quad (4.6)$$

Si $\boldsymbol{\alpha = 0}$; $FTBO(p)$ est **de $\boldsymbol{classe}$ 0 , alors**

$$\varepsilon_v = \infty$$

Si $\boldsymbol{\alpha = 1}$; $FTBO(p)$ est **de $\boldsymbol{classe}$ 1 , alors**

$$\varepsilon_v = \frac{a}{K}$$

Si $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{2}$; $FTBO(p)$ est **de** $\boldsymbol{classe} \ \geq \mathbf{2}$ **, alors**

$$\varepsilon_v = 0$$

NB : Pour annuler l'erreur de position, il faut au moins deux intégration dans la fonction de transfert boucle ouverte $FTBO(p)(\alpha \geq 2)$. Si $FTBO(p)$ est de classe 1, l'erreur de vitesse diminue quand le gain K augmente.

4.3.3 Ecart d'accélération ($\boldsymbol{\varepsilon_a}$)

Cet écart est défini pour une entrée sous forme parabolique.

Nous avons de ce cas:

$$e(t) = a.t^2 u(t) \ \Rightarrow \ E(p) = \frac{a}{p^3}$$

On trouve :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \frac{a.p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \tag{4.7}$$

Si $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$; $FTBO(p)$ est **de** $\boldsymbol{classe}$ $\mathbf{0}$ $\boldsymbol{ou}$ $\mathbf{1}$ **, alors**

$$\varepsilon_a = +\infty$$

Si $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2}$; $FTBO(p)$ est **de** $\boldsymbol{classe}$ $\mathbf{2}$ **, alors**

$$\varepsilon_a = \frac{a}{K}$$

Si $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{3}$; $FTBO(p)$ est **de** $\boldsymbol{classe} \ \geq \mathbf{3}$ **, alors**

$$\varepsilon_a = 0$$

NB : Pour **annuler l'erreur de position**, il faut au **moins trois intégrations** dans la fonction de transfert boucle ouverte $FTBO(p)(\alpha \geq 3)$. Si $FTBO(p)$ est de classe 2, l'erreur en accélération diminue quand le gain K augmente.

4.4 Récapitulatif des erreurs statiques

Le tableau suivant récapitule les valeurs de l'erreur statique en fonction :

- ✍ de la classe α du système
- ✍ de l'ordre du signal d'entrée canonique
- ✍ du gain K de la $FTBO$ du système

	classe 0 α=0	classe 1 α=1	classe 2 α=2	classe 3 α=3
Ecart de position	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Ecart de vitesse	+∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Ecart en accélération	+∞	+∞	$\frac{a}{K}$	0

4.5 Précision Dynamique - Rapidité

4.5.1 La Rapidité : une qualité essentielle

La précision dynamique est caractérisée par l'évolution du signal d'erreur pendant le régime transitoire ; précision et rapidité sont intimement liées durant cette phase d'évolution du système. L***e couple précision-rapidité résulte d'un compromis*** dans le réglage du gain de la chaîne.

Un système automatique doit de réagir le plus rapidement possible à toute sollicitation de la commande et de corriger également très vite toute déviation due aux perturbations subies. La rapidité d'un système se mesure par son ***temps de réponse.***

4.5.2 Définition du temps de réponse

Très peu de systèmes sont à réponse instantanée. La plupart des systèmes physiques évoluent d'un état stable à un autre état stable selon leurs propriétés intrinsèques et les réglages (de gain en particulier) qui les affectent.

Ainsi en ce qui concerne **la Rapidité,** celle-ci répond à la définition suivante :

Le temps de réponse à 5% est le temps au bout duquel, pour une entrée en échelon de position, le système de fonction de transfert H(p) atteint sa valeur définitive à 5% près et reste ensuite compris entre 95% et 105%.

• Si le système est du *premier ordre,* de constante de temps T, un calcul simple montre que le temps de réponse à 5% est : $t_r \approx 3\tau$

• Dans le cas d'un *système du second ordre,* deux paramètres dynamiques interviennent : *la pulsation propre non amortie con et le coefficient d'amortissement* ξ qui, suivant sa valeur par rapport à l'unité, engendre un régime oscillatoire amorti ($\xi < 1$) ou un régime apériodique ($\xi > 1$).

On constate qu'un système, décrit par une fonction de transfert du second ordre, présente la plus grande rapidité pour un réglage à 0,707 de son facteur d'amortissement réduit. $Pour\ \xi = 0{,}707, Tr\omega n = 2{,}93$

4.5.3 Relation entre Rapidité et Bande passante

Soit un système de fonction de transfert $H(j\omega)$, soumis à une analyse harmonique (sollicitation sinusoïdale). Le signal de sortie recueilli est lui-même sinusoïdal (après disparition du régime transitoire).

Si le signal d'entrée est de la forme : $e(t) = E0.sin(\omega t)$, le signal de sortie permanent sera :

$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \sin[\omega t + Arg(H(j\omega))]$

La bande passante d'un système peut se définir comme sa faculté à transmettre sans atténuation notable les signaux sinusoïdaux qui le traverse.

- ***La bande passante est définie à -3db*** (atténuation tolérée de 30%). Elle s'étend, pour les systèmes habituellement traités en Automatique, entre zéro et la pulsation de coupure ω_c. Ces systèmes sont dits passe-bas. D'une façon générale, plus la bande passante d'un système est étendue plus il est rapide.
- ***Dans le cas d'un système du premier ordre,*** sa pulsation de coupure est l'inverse de sa constante de temps :

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \qquad Et \qquad t_r = 3.\tau$$

- ***Dans le cas d'un système du second ordre,*** pour un facteur ξ donné sa bande passante est proportionnelle à sa pulsation propre non-amortie ω_0, tandis que son temps de réponse lui est inverse.