*République Algérienne Démocratique et Populaire*
*Ministère de l'Enseignement supérieur et de La Recherche Scientifique*

Université : **MOHAMED BOUDIAF M'SILA**
Faculté **: de Technologie**
Département : **Génie Civil**
Option : **structure**

# Cours Dynamique des Structures II

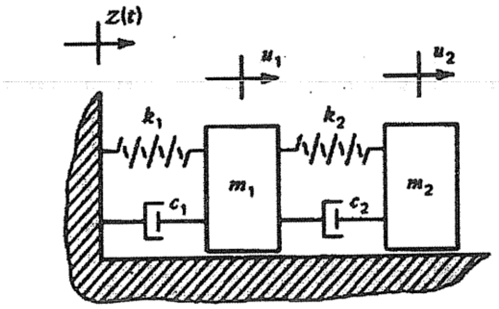
Module **: Dynamique des Structures II**
Option **: Structure**
Niveau : **1$^{ER}$ Année Master**
Présenté par: **Dr MENASRI YOUCEF**

# Chapitre 1

## Vibrations libres des Systèmes à plusieurs degrés de liberté (S.P.D.D.L)

### 1. Introduction

Un système réel comprend généralement plusieurs masses reliées entre elles par des éléments de types ressort et amortisseur.
Le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour déterminer la position relative de chaque masse est appelé « nombre de degrés de liberté » ; un système comportant N masses susceptibles de se déplacer dans un plan possède donc 2N degrés de liberté.
Pour chaque degré de liberté, on établira les conditions d'équilibre, comportant les effets dus à l'accélération et ceux dus aux autres actions extérieures du système (Newton), au point considéré.




L'équation d'équilibre dynamique d'un système du type de celui de la figure peut être obtenue par la méthode directe en écrivant en chaque nœud et pour chaque degré de liberté que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de:

- forces élastiques fs
- forces d'amortissement fd
- forces d'inertie fi
- forces appliquées extérieures p

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté i :

$$f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} = p_1(t)$$
$$f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} = p_2(t)$$
$$f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} = p_3(t)$$

$$f_{Si} + f_{Di} + f_{Ii} = p_i$$

En supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté i s'exprime par :

$$f_{Si} = k_{i1}\,u_1 + k_{i2}\,u_2 + \ldots. \quad = \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\,u_j$$

soit pour l'ensemble des degrés de liberté, sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ . \\ f_{Si} \\ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & . & . & k_{1j} & . \\ k_{21} & k_{22} & . & : & k_{2j} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ k_{i1} & k_{i2} & . & . & k_{ij} & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_j \\ \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{F}}_S = \underline{\mathbf{K}}\;\underline{\mathbf{U}}$$

En supposant que les forces d'amortissement sont d'origine visqueuse, et dépendent donc de la vitesse, on peut écrire de façon similaire :

$$f_{Di} = c_{i1}\,\dot{u}_1 + c_{i2}\,\dot{u}_2 + \ldots. \quad = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\,\dot{u}_j \tag{6.3a}$$

Les coefficients cij sont les coefficients de la matrice d'amortissement du système.
soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ . \\ f_{Di} \\ . \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & c_{1j} & . \\ c_{21} & c_{22} & . & . & c_{2j} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{i1} & c_{i2} & . & . & c_{ij} & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ . \\ \dot{u}_j \\ . \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{F}}_D = \underline{\mathbf{C}}\;\underline{\dot{\mathbf{U}}}$$

Les forces d'inertie peuvent être exprimées de façon similaire :

$$f_{Ii} = m_{i1}\,\ddot{u}_1 + m_{i2}\,\ddot{u}_2 + \ldots. \quad = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\,\ddot{u}_j$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ . \\ f_{Ii} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & . & . & m_{1j} & . \\ m_{21} & m_{22} & . & . & m_{2j} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m_{i1} & m_{i2} & . & . & m_{ij} & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_j \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{F}}_I = \underline{\mathbf{M}}\;\underline{\ddot{\mathbf{U}}}$$

Regroupant les équations précédents, l'équation d'équilibre dynamique du Système s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t)$$

Les matrices M, C et K ont pour dimensions NxN, et les matrices U et P pour dimensions Nx1 où N représente le nombre de degrés de liberté du système.

Équation du mouvement sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{12} & m_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{N1} & & & m_{NN} \end{bmatrix}}_{\text{matrice de masse}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix}}_{\text{accélérations}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{12} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{N1} & & & c_{NN} \end{bmatrix}}_{\text{matrice des amortissements}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}}_{\text{vitesses}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{12} & k_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ k_{N1} & & & k_{NN} \end{bmatrix}}_{\text{matrice de rigidité}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}}_{\text{déplacements}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}}_{\text{excitation}}$$

## 2. Vibrations libres non – amorties SPDDL (analyse modale)

La vibration libre du système est solution de l'équation (6.5), dans laquelle le terme d'amortissement est pris égal à 0 et les forces extérieures appliquées sont nulles :

$$\underline{\mathbf{M}}\,\underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{D}}\sin(\omega t + \theta)$$

A partir l'équations s , il vient :

$$\left[\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}\right]\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Le système matriciel n'a de solution non triviale (D $\neq$ 0 ) que si, et seulement si, son déterminant est nul. Les pulsations propres sont les $\omega$n telles que les solutions du système linéaire suivant soient non-triviales

$$(K - \omega 2M)\{\phi\} = \{0\}$$

Les pulsations propres $\omega$n sont alors telles que les solutions du système linéaire suivant soient non-triviales [3]:

$$(\widetilde{\mathbf{K}} - \omega_n^2\widetilde{\mathbf{M}})\{\widetilde{\phi}\} = \{0\}$$

Et donc telles que :

$$|\widetilde{\mathbf{K}} - \omega_n^2\widetilde{\mathbf{M}})| = 0$$

Le vecteur { $\phi$ } s'obtient alors sans difficulté à partir de { $\phi$ n} en tenant compte de la condition en x = 0.

### 3. Orthogonalité des modes propres

Comme pour un système continu, deux modes distincts sont orthogonaux. Soient deux modes distincts { $\phi$ n} et { $\phi$ p}. Par définition, ils vérifient :

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M})\{\phi_n\} = \{0\}$$
$$(\mathbf{K} - \omega_p^2\mathbf{M})\{\phi_p\} = \{0\}$$

En pré-multipliant par $\{\phi_p\}^T$ et par $\{\phi_n\}^T$ , et en faisant la différence des équations obtenues on obtient :

$$\{\phi_p\}^T\mathbf{K}\{\phi_n\} - \{\phi_n\}^T\mathbf{K}\{\phi_p\} = \omega_n^2\{\phi_p\}^T\mathbf{M}\{\phi_n\} - \omega_p^2\{\phi_n\}^T\mathbf{M}\{\phi_p\}$$

La transposée d'une matrice $1 \times 1$ étant cette même matrice, on a :

$$\{\phi_p\}^T\mathbf{K}\{\phi_n\} = \{\phi_n\}^T\mathbf{K}^T\{\phi_p\}$$
$$\{\phi_p\}^T\mathbf{M}\{\phi_n\} = \{\phi_n\}^T\mathbf{M}^T\{\phi_p\}$$

Enfin, puisque les matrices de raideur et de masse sont symétriques :

$$0 = (\omega_n^2 - \omega_p^2)\{\phi_n\}^T\mathbf{M}\{\phi_p\}$$

Les modes n et p étant par hypothèse distincts, l'équation précédente conduit à :

$$\{\phi_n\}^T\mathbf{M}\{\phi_p\} = 0 \text{ pour } n \neq p$$

$$\{\phi_n\}^T\mathbf{K}\{\phi_p\} = 0 \text{ pour } n \neq p$$

### 4. Masse modale et raideur modale

On définit la masse modale Mn et la raideur modale Kn par :

$$M_n = \{\phi_n\}^T\mathbf{M}\{\phi_n\}$$
$$K_n = \{\phi_n\}^T\mathbf{K}\{\phi_n\}$$

Le mode { $\phi$ n} vérifie:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M})\{\phi_n\} = \{0\}$$

et donc :

$$\{\phi_n\}^T\mathbf{K}\{\phi_n\} = \omega_n^2\{\phi_n\}^T\mathbf{M}\{\phi_n\}$$

On obtient immédiatement la relation :

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n}$$

## 5. Normalisation des modes propres

Comme dans le problème continu, on peut choisir $\phi n$ tels que :

– le vecteur propre $\{\phi n\}$ soit de norme unitaire ;

– la masse modale associée $Mn$ soit unitaire ;

– la raideur modale associée $Kn$ soit unitaire.

## 6. Application

2-Story Shear Building (2-DOF system)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g$$

$$(\mathbf{k} - \lambda\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\lambda m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\lambda m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Set Determinant = 0:

$$\begin{vmatrix} (k_1+k_2)-\lambda m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\lambda m_2 \end{vmatrix} = 0$$

or, $((k_1+k_2)-\lambda m_1)(k_2-\lambda m_2)-(-k_2)(-k_2)=0$

$$(m_1m_2)\lambda^2 - ((m_1k_2+m_2(k_1+k_2))\lambda + (k_1k_2) = 0$$