République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur et de La Recherche Scientifique

Université : **MOHAMED BOUDIAF M'SILA**
Faculté **: de Technologie**
Département : **Génie Civil**
Option : **structure**

Cours Dynamique des Structures II

Module **: Dynamique des Structures II**
Option **: Structure**
Niveau : **1ER Année Master**
Présenté par: **Dr MENASRI YOUCEF**

Chapitre 2

Vibrations forcées des S.P.D.D. L

Vibrations Forcées Non Amorties

Le développement précédent n’est valable qu’en cas d’oscillations libres non amorties. Intéressons-nous maintenant au cas plus général d’oscillations forcées amorties. On considère que l’effet de l’amortissement est négligeable sur la valeur des pulsations propres. L’équation matricielle du mouvement pour un système à plusieurs degrés de liberté, dont les oscillations sont amorties et forcées, s’écrit de la manière suivante :

Découplage Des Equations Du Mouvement

L'équation générale du mouvement se réduit en l'absence de termes d'amortissement à :

$$\underline{\mathbf{M}}\,\underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

Du fait de la structure non diagonale de la matrice K, et bien que la matrice M puisse souvent être considérée comme diagonale, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang i du système (6.50) fait intervenir non seulement le degré de liberté ui mais également des degrés de liberté uk (k≠i).

Afin de découpler les équations (6.50), on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. La base des modes propres constitue une base orthogonale complète qui permet d'exprimer tout déplacement U sur cette base :

$$\underline{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{D}}_i\, y_i(t)$$

Où yi(t) joue le rôle de coordonnée généralisée et i D le rôle de fonction de forme du déplacement.

$$\underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{M}} \sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{D}}_i\, \ddot{y}_i(t) + \underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{K}} \sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{D}}_i\, y_i(t) = \underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{P}}$$

Tenant alors compte de la propriété d'orthogonalité, l'équation se réduit à :

$$\underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{M}}\,\underline{\mathbf{D}}_j\, \ddot{y}_j(t) + \underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{D}}_j\, y_j(t) = \underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{P}} \quad , \quad j = 1, N$$

Définissant les quantités suivantes :

- Masse généralisée $m_j = \underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{M}}\,\underline{\mathbf{D}}_j$
- Raideur généralisée $k_j = \underline{\mathbf{D}}_j^{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{D}}_j$

- Chargement généralisé $p_j = \underline{D}_j^T \underline{P}$

En divisant chaque ligne du système d'équations découplées par la masse généralisée, on obtient l'équation bien connue de l'oscillateur simple amorti et forcé :

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j} \quad , \quad j = 1, N$$

Ainsi, l'utilisation de la base modale a permis la transformation du système de N équations différentielles couplées en N équations différentielles découplées. La solution yi de chacune de ces équations est obtenue par l'intégrale de Duhamel et la solution générale est donnée par l'équation :

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{N} \underline{D}_i \, y_i(t)$$

Notion de spectre d'oscillateur

La méthode spectrale pour l'étude de la réponse d'une structure sous l'effet de mouvements imposés de type sismique s'appuie sur la notion de spectre d'oscillateur d'un accélérogramme de séisme.

Spectre de réponse :

Un oscillateur est caractérisé par sa pulsation propre ω_0 , son amortissement réduit ζ et sa masse *m*. Il est soumis à une force variable $p(t) = -m\,\gamma s(t)$ avec $\gamma s(t)$ l'accélération imposée à l'appui.

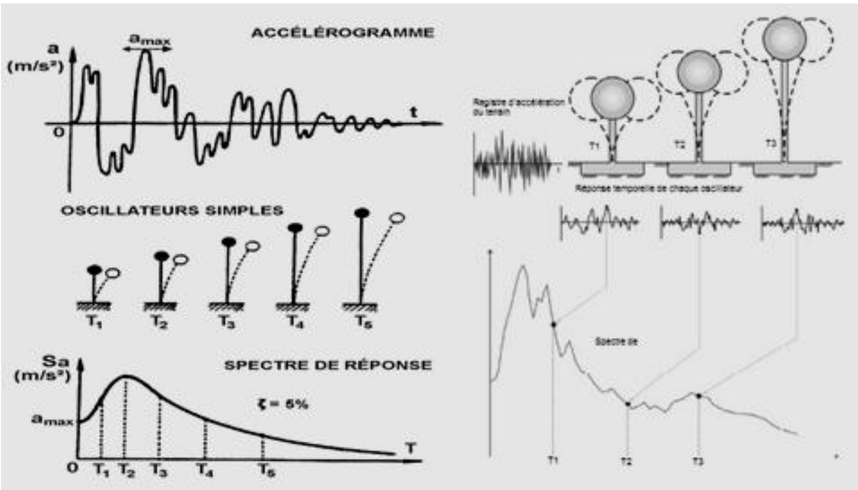
Le déplacement obtenu *u(t)* est donné par l'intégrale de Duhamel [20] :

$u(t) = \frac{-1}{\omega} \int_0^1 \gamma_s\ (\tau) e^{-\zeta\omega_0(1-\tau)} \sin\omega(1-\tau) d\tau$ Avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ pulsation du système amorti.

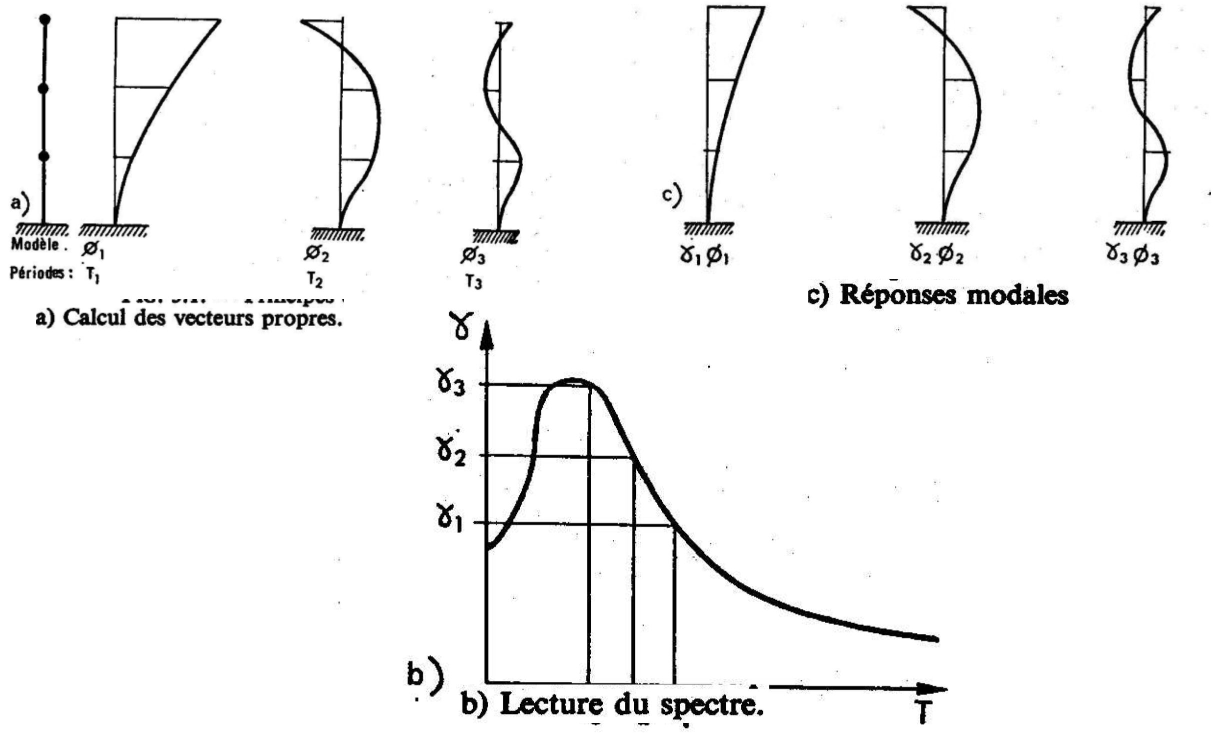
Le déplacement U_{max} ne dépend que de ω_0 et de ζ. Pour un amortissement donné, on fait varier la pulsation propre et on trace la courbe $(U_{max}\,;\,(\omega_0))$, spectre de déplacement élastique de l'oscillateur.

Les accélérogrammes mesurés au cours des séismes ne permettent pas de construire des spectres directement exploitables. En effet, les mesures effectuées pour un séisme ne seront jamais les mêmes que pour un autre séisme. Les spectres construits à partir d'accélérogrammes distincts ne peuvent être que différents, il faut donc fixer des critères afin de définir des spectres normalisés. Ceux-ci sont obtenus en considérant un assez grand nombre de spectres naturels pour des mouvements dont les caractéristiques sont proches de celles de la zone considérée. Les spectres naturels sont eux normalisés sur la base de l’accélération maximale, ou de l’accélération efficace.

Pour expliquer de manière conceptuelle la procédure de construction d'un spectre de réponse on considère des structures avec un degré de liberté (ou oscillateurs simples) avec différentes périodes de vibration T, tous avec le même facteur d'amortissement. Si on soumet tous ces oscillateurs à l'action d'un même séisme (en utilisant un registre d'accélérations, $\ddot{u}_g$ (t)), chacun d'eux montrera une réponse différente, laquelle peut être représentée, par exemple, au travers de l'histoire de déplacements *u (t).* Une fois la réponse des oscillateurs calculée il est possible de déterminer le maximum (en valeur absolue, puisque le signe n'a pas d’importance) de chacun d'eux et les mettre dans un graphique en fonction de la période de vibration, pour obtenir un spectre de réponse. En effet, chaque point du spectre représente la réponse maximale de chaque oscillateur avec période T (Figure). Chaque séisme a un spectre qui lui est propre. Mais suivant le type de sismicité, il est possible d’établir des spectres enveloppes qui décrivent le séisme qu’il est possible d’envisager.



Graphique indicatif de la méthode de détermination du spectre de réponse



a) Calcul des vecteurs propres.

c) Réponses modales

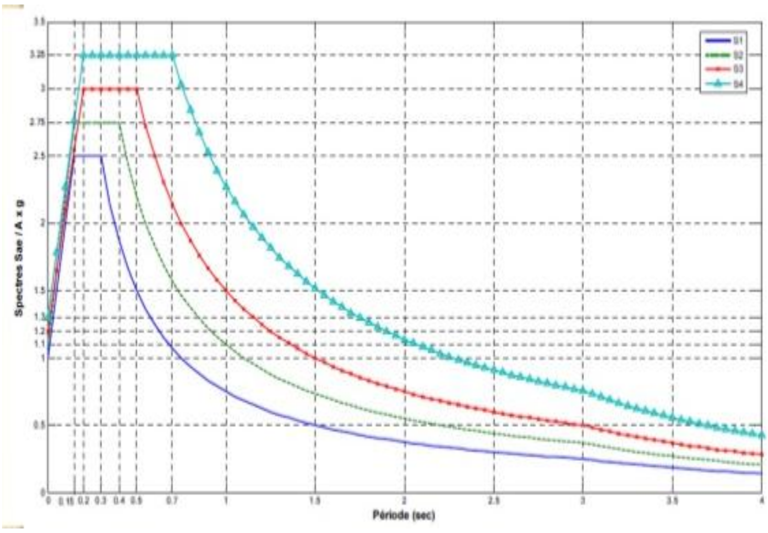
b) Lecture du spectre.

Spectre de calcul du code parasismique RPA 99 Version 2003

L’évaluation de l’action du tremblement de terre sur une structure de bâtiment, selon le règlement parasismique algérien RPA99 Version 2003, s’effectue à l’aide des paramètres suivants:

- ✓ l’accélération maximale du sol A obtenue à partir du zonage sismique et le groupe d'usage du bâtiment (voir tableau 2.1, RPA99 Version 2003 art. 4.2.3)
- ✓ un spectre de réponse en termes d’accélération -période pour le mouvement horizontal relatif à un type de site (D-T) (art. 4.3.3 du RPA99 Version 2003)
- ✓ un spectre de réponse du mouvement vertical déduit du spectre horizontal par un coefficient de 2/3.

Le spectre de réponse élastique (D-T) ou spectre de calcul est défini pour un amortissement relatif ξ =5% où D est le facteur d’amplification dynamique, il représente l'amplification des accélérations dans la structure par rapport à celle du sol. D'autres paramètres interviennent dans le spectre de réponse élastique: le coefficient de comportement R et le facteur de qualité Q.



Spectre de réponse élastique (sa/g-T) RPA99 Version 2003

Amortissement relatif ξ =5%

Le spectre inélastique est obtenu en réduisant le spectre élastique de calcul afin de tenir compte de la capacité de dissipation d'énergie de la structure.

Ce spectre inélastique peut être obtenu de plusieurs façons:

- En réduisant le spectre de réponse élastique par un coefficient empirique indépendant de la période de vibration de la structure connue aussi comme facteur de comportement R afin de considérer la déformation inélastique de la structure.
- En réduisant le spectre de réponse élastique par un coefficient variable en fonction de la période de vibration de la structure connue comme le facteur de comportement R afin de considérer la déformation inélastique de la structure.

Méthode modale spectrale

Étant donné que dans l'analyse modale, la réponse de la structure dans chaque mode de vibration est dérivée d'un système SDOF, la réponse maximale dans ce mode peut être obtenue directement à partir du spectre de réponse de la conception du tremblement de terre.

La réponse maximale dans le n-ième mode peut être exprimée en termes des ordonnées des déplacements S_{dn}, de la pseudo vitesse S_{vn} et de la pseudo accélération S_{an} qui correspondent à la fréquence ω_n et au rapport d'amortissement ξ_n. Les trois quantités sont liées par:

$$S_{\mathrm{an}} = \omega_n S_{\mathrm{vn}} = \omega_n^2 S_{\mathrm{dn}}$$

Les valeurs maximales des quantités de réponse modale deviennent alors, à partir des équations:

$$\ddot{Y}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 Y_n(t) = \frac{L_n(t)}{M_n} \ddot{u}_g(t)$$

Où:

$$L_n = \{a_n\}^T [M][I] = \sum_{j=1}^{n} m_j a_{jn}$$

la masse modale

$$M_n = \{a_n\}^T [M]\{a_n\} = \sum_{j=1}^{n} m_j a_{jn}^2$$

Où $\ddot{u}_g(t)$ est l'accélération du sol.

Le rapport L_n/M_n est défini comme le facteur de participation pour le n ème mode. le facteur de participation représente alors la contribution effective de la masse pour le mode particulier considéré.

Donc Déplacement modal:

$$Y_n \max = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} = \frac{L_n}{M_n} \frac{S_{an}}{\omega_n^2}$$

Déplacement au j ème étage

$$u_{jn} = Y_n \max a_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} a_{jn} = \frac{L_n}{M_n} \frac{S_{an}}{\omega_n^2} a_{jn}$$

Déplacement inter étage au J ème étage

$$\Delta_{jn} = u_{jn} - u_{j-1,n} = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} (a_{jn} - a_{j-1,n})$$

Force latérale effective du séisme au j ème étage

$$F_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{an} m_j a_{jn}$$

Effort tranchant modale à la base

$$V_{0n} = \sum_{j=1}^{N} F_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{an} \sum_{j=1}^{N} m_j a_{jn} = \frac{L_n^2}{M_n} S_{an} = \overline{m}_n S_n$$

Moment modal de renversement à la base

$$M_{0n} = \sum_{j=1}^{N} h_j F_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{an} \sum_{j=1}^{N} h_j m_j a_{jn}$$

Où hj est la distance entre le j ème étage et la base et $\overline{m}_n$ est la masse modale effective.

La réponse modale maximale peut ainsi être évaluée en utilisant les déplacements spectraux et / ou les accélérations obtenus à partir du spectre de réponse de dimensionnement pour la fréquence particulière et le facteur d'amortissement pour le mode.

Réponse maximale totale:
Les quantités maximales de réponse modale représentées par les combinaisons. L'une de ces combinaisons qui a été utilisée consiste à prendre la somme des valeurs absolues des réponses modales. Cette combinaison peut être exprimée par:

$$r \leq \sum_{n=1}^{N} |r_n|$$

où r et r_n représentent respectivement les quantités de réponse totale et modale.

Puisque cette combinaison suppose que les maxima se produisent en même temps et qu'ils ont également le même signe, elle produit une estimation de la limite supérieure de la réponse qui est trop conservatrice pour l'application du plan.

Une estimation plus raisonnable, basée sur la théorie des probabilités, peut être obtenue en utilisant les racines carrées de la somme des carrés (SRSS), qui est exprimée par:

$$r \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{N} r_n^2}$$

La combinaison SRSS donnera généralement des estimations réalistes de la réponse de crête pour les structures dans lesquelles les fréquences naturelles de vibration sont bien séparées, propriété qui est généralement valable pour les structures de bâtiment idéalisées dans lesquelles les déplacements latéraux dans un plan sont considérés [7]. Si ce n'est pas le cas et que certaines fréquences naturelles sont si proches, la méthode de combinaison SRSS peut conduire à des erreurs importantes. C'est souvent le cas lorsque les bâtiments avec des plans d'étage symétriques sont soumis à une réponse en torsion en raison de la masse excentrique. Dans de tels cas, il a été démontré qu'une combinaison plus correcte est fournie par la méthode de combinaison quadratique complète (CQC) .

Résumé des équations
Toutes les équations nécessaires à l'analyse du spectre de réponse sont résumées ici.

- *Masse modal:*

$$M_n = \sum_{i=1}^{N} m_i a_{in}^2$$

- *Le facteur L_n:*

$$L_n = \sum_{i=1}^{N} m_i a_{in}$$

- *Facteur de participation modale*

$$\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i a_{in}}{\sum_{i=1}^{N} m_i a_{in}^2}$$

- *Masse modal effective :*

$$\overline{m}_n = \frac{L_n^2}{M_n} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i a_{in}\right]^2}{\sum_{i=1}^{N} m_i a_{in}^2}$$

- *Masse totale de la structure :*

$$M = \sum_{i=}^{N} m_i = \sum_{i=}^{N} \overline{m}_i$$

- *Effort tranchant modal à la base*:

$$V_{0n} = \overline{m}_n S_{an}$$

Où S_{an} est l'accélération spectrale correspondant au n ème mode; obtenu à partir d'un spectre de réponse de conception.

- *Force latérale effective modale au j ème étage*

$$F_{jn} = \Gamma_n S_{an} m_j a_{jn}$$

.

- *Déplacement modal au j ème étage*

$$u_{jn} = \Gamma_n S_{an} a_{jn} / \omega_n^2$$

- *Combinaison modale (SRSS):*

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} r_n^2}$$

Exigences des codes sismiques :

A. *<u>Nombres des Modes</u>*:

Tous les modes qui contribuent de manière significative à la réponse doivent être inclus. Une règle pratique consiste à inclure un nombre suffisant de modes r pour que la masse modale effective soit égale ou supérieure à 90% de la masse totale du bâtiment, c'est-à-dire:

$$\frac{\sum_{n=1}^{r} \overline{m}_n}{M} \geq 0.9$$

Application

Figure 1 présente la modélisation d' un bâtiment réel à deux étages dont seul le comportement dans le plan est analysé. Le contreventement horizontal est assuré par des portiques est soumis aux effets d'un séisme dont la composante horizontale est définie par un spectre d'accélération calé à 0.1 g **(figure . 2)** . Le portique est étudié sous l'effet d'un séisme agissant dans son plan (direction horizontale)

Les données de la structure sont les suivantes : m=60 t , E=32164 Mpa , h_1 et h_2= 3 m

Questions :

1. Identifier les matrices de raideur K et d'inertie M
2. En utilisant les matrices K et M trouvées en 1, écris l'équation matricielle du mouvement
3. Déduire les expressions et valeurs numériques des 02 pulsations , fréquences et périodes propres du système (séisme horizontal).
4. Calculer les modes propres.
5. Calculer la repense modale (déplacements horizontaux)

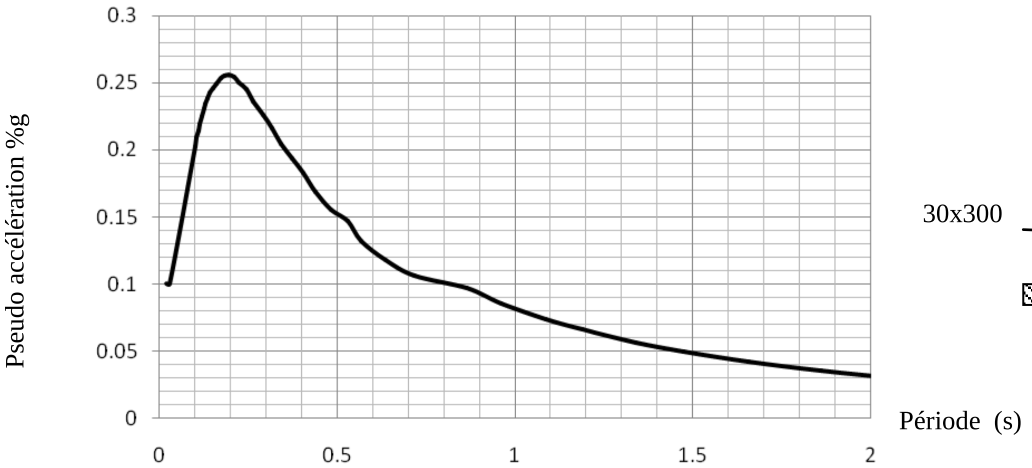


Figure 2

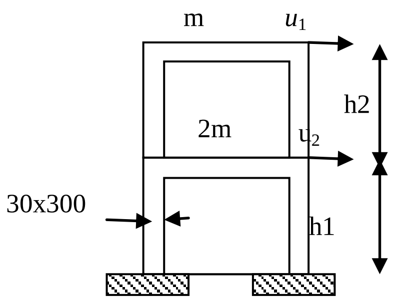


figure 1

Solution

Identification des matrices de raideur K et d'inertie M

$m\,\ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_1 u_2 = 0$

$2m\,\ddot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_2 - k_1 u_1 = 0$

la matrice des masses est $M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$, la matrice des raideurs $est\ K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$

Equation matricielle du mouvement

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Expressions et valeurs numériques des 04 pulsations et fréquences et périodes propres

Les pulsations des deux modes propre sont détreminées par résoudre l'équation

(k-Mw^2) .D=0

La solution non trivial correspond au cas où la matrice (k-Mw^2) est singulière (son déterminat est nul et elle n'a pas d'inverse).

det (k-Mw^2) =0 ,permet de determiner les polsations w^2

$$\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-2m\omega^2 \end{vmatrix} = (k-m\omega^2)(2k-2m\omega^2)-k^2=0$$

$$2m^2\omega^4-4km\omega^2+k^2 = 0$$

$\omega_1^2 = \ 0.29\ \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \ 1.71\ \frac{k}{m}$

Séisme horizontal k=24EI/l^3=24x32164000x6.75.10^{-7}/(3^3)= 19298.4 kN/m

ω_1^2 =0.29 $\frac{19298.4}{60}$ =94.21 rad^2/s^2 ⇒ ω_1 =9.71 rad/s ⇒ $T1=\frac{2\pi}{\omega_1}=0.64\ s$,$f1=1.54\ Hz$

ω_2^2 =1.71 $\frac{19298.4}{60}$ =549. 07 rad^2/s^2 ⇒ ω_2 =23.43 rad/s ⇒ $T2=\frac{2\pi}{\omega_2}=0.27\ s$,$f2=3.73\ Hz$

Calcule les modes propres associés.

1er mode

$$\begin{bmatrix} k-m\omega_1^2 & -k \\ -k & 2k-2m\omega_1^2 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.71 & -1 \\ -1 & 1.41 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ x = 0.71\,,\ \boxed{D_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix}}$$

$$a_1 = \frac{[1 \quad 0.71]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad 0.71]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{bmatrix}} = 1.20$$

$$\emptyset_1 = a_1\, D_1 \ = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.20 \\ 0.86 \end{Bmatrix}$$

2^e mode

$$\begin{bmatrix} k-m\omega_2^2 & -k \\ -k & 2k-2m\omega_2^2 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -0.71 & -1 \\ -1 & -1.41 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ x = -\,0.71\,,\ \boxed{D_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\,0.71 \end{Bmatrix}}$$

$$a_2 = \frac{[1 \quad -0.71]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad -0.71]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.71 \end{bmatrix}} = -0.21$$

$$\emptyset_2 = a_2\, D_2 \ = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.21 \\ 0.15 \end{Bmatrix}$$

Calcule de la répense modale (deplacemnets horizonteaux et verticeaux)

A partir du spectre de répense (fig 2) , Pour le séisme horizontal:

1er mode : $T_1 = 0.64\ s \Rightarrow \gamma_1 = 0.115$ g

$$0.115\text{ g}\begin{Bmatrix}1.20\\0.86\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1.35\\0.97\end{Bmatrix}$$

2e mode : $T_2 = 0.27\ s \Rightarrow \gamma_2 = 0.24$ g

$$0.24\text{ g}\begin{Bmatrix}-0.21\\0.15\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-0.49\\0.35\end{Bmatrix}$$

En aplique l'équation suivante on obtient les déplacements exprimées en mm

$$\gamma = \omega^2 u \Rightarrow u = \frac{\gamma}{\omega^2}$$

Resultats des deplacemnets horizonteaux et verticeaux

	Déplacements horizonteaux	
Mode	1	2
u1 (mm)	14.37	-0.90
u2 (mm)	10.30	0.64