

Année universitaire : 2019/2020

Matière : Validation des méthodes analytiques

Master 1 : NSA

Dr BOUAOUDIA-MADI

Chapitre : Les plans d'expériences

I. Processus d'acquisition des connaissances

Augmenter ses connaissances, c'est trouver la réponse à une question posée. On commence donc par se poser une ou plusieurs questions (schéma 1).

Par exemple, si l'on désire connaître l'influence d'un engrais sur le rendement en blé d'une parcelle de terrain, on pourra se poser les questions suivantes qui, bien sûr, ne sont pas limitatives :

- Peut-on obtenir 10 quintaux de blé de plus à l'hectare en augmentant la quantité d'engrais ?
- Quelle est l'incidence de la pluie sur l'efficacité de l'engrais ?
- La qualité du blé restera-t-elle bonne si j'utilise cet engrais ?
- Combien dois-je utiliser d'engrais pour obtenir la quantité maximale de blé par hectare ?

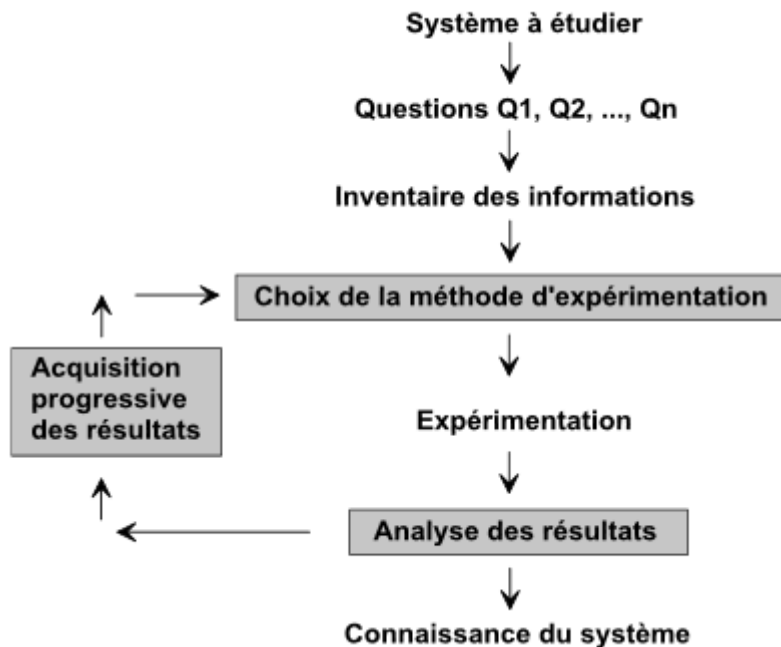
Ces questions délimitent le problème à résoudre et fixent les travaux à exécuter.

Il est donc important de se poser les questions qui correspondent réellement au problème. Bien sûr, avant d'entreprendre des expériences, il est prudent de vérifier que l'information cherchée n'existe pas déjà ailleurs. Dans ce but, on effectue un inventaire des connaissances, soit une bibliographie, soit une consultation d'experts, soit un calcul théorique, soit toute autre démarche ayant pour but de répondre, aux questions posées. Après cette phase d'enquête, les questions initiales peuvent être entièrement résolues et il n'y a plus de problème.

Dans le cas contraire, certaines questions restent entières ou elles sont modifiées : il est alors nécessaire d'entreprendre des expériences pour obtenir les réponses complètes que l'on souhaite. Ce travail préalable fait partie du métier d'expérimentateur et nous n'insisterons pas. Ce n'est pas sur cette phase du processus que nous voulons faire porter notre effort de réflexion et d'amélioration.

N'ayant plus que les questions sans réponse immédiate, il faut faire des expériences. Comment peut-on choisir ces expériences pour :

- arriver rapidement aux meilleurs résultats possibles,
- éviter de réaliser des expériences inutiles,
- obtenir la meilleure précision possible sur les résultats
- permettre d'avancer à coup sûr,
- établir la modélisation du phénomène étudié,
- découvrir la solution optimale



Donc \longrightarrow Les plans d'expériences optimisent les trois parties encadrées du processus d'acquisition des connaissances.

Les plans d'expériences permettent d'organiser au mieux les essais qui accompagnent une recherche scientifique ou des études industrielles. Ils sont applicables à de nombreuses disciplines et à toutes les industries à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt, y , et des variables, x_i . Il faut penser aux plans d'expériences si l'on s'intéresse à une fonction du type :

$$y = f(x_i)$$

Avec les plans d'expériences on obtient le maximum de renseignements avec le minimum d'expériences. Pour cela, il faut suivre des règles mathématiques et adopter une démarche rigoureuse. Il existe de nombreux plans d'expériences adaptés à tous les cas rencontrés par un expérimentateur. Les principes fondamentaux de cette science seront indiqués et les principaux plans seront passés en revue.

La compréhension de la méthode des plans d'expériences s'appuie sur deux notions essentielles, celle d'espace expérimental et celle de modélisation mathématique des grandeurs étudiées.

II.2. Terminologie

La grandeur d'intérêt, qui est généralement notée y , porte le nom de réponse. Les variables qui peuvent modifier la réponse sont appelées facteurs. On parle donc des facteurs qui influent sur une réponse. Les termes facteur et réponse sont universellement employés dans le domaine des plans d'expériences.

II.2.1. Les différents types de facteurs

La construction des plans et l'interprétation des résultats dépendent en grande partie des types de facteurs rencontrés dans l'étude. On distingue plusieurs types de facteurs. Nous retiendrons les types de facteurs suivants :

- **Facteurs continus**

La pression est un exemple de facteur continu. Dans un intervalle de pression donné, on peut choisir toutes les valeurs possibles. Il en est de même d'une longueur, d'une concentration ou d'une température. Les valeurs prises par les facteurs continus sont donc représentées par des nombres continus.

- **Facteurs discrets**

Au contraire, les facteurs discrets ne peuvent prendre que des valeurs particulières. Ces valeurs ne sont pas forcément numériques : on peut représenter un facteur discret par un nom, une lettre, une propriété ou même par un nombre qui n'a alors en soi aucune valeur numérique mais qu'une signification de repère. Par exemple, on peut s'intéresser aux couleurs d'un produit : bleu, rouge et jaune sont des facteurs discrets.

- **Facteurs ordonnables**

Il s'agit de facteurs discrets que l'on peut mettre dans un ordre logique. Par exemple, grand, moyen, petit, ou encore premier, deuxième, troisième et quatrième.

- **Facteurs booléens**

Les facteurs booléens sont des facteurs discrets qui ne peuvent prendre que deux valeurs : haut ou bas, ouvert ou fermé, blanc ou noir, etc

II.1.2.Espace expérimental

Pour présenter l'espace expérimental nous utiliserons un espace à deux dimensions, ce qui facilitera les représentations graphiques. Il est ensuite facile d'étendre les notions introduites à des espaces multidimensionnels. Un facteur continu peut être représenté par un axe gradué et orienté. S'il y a un second facteur continu, il est représenté, lui aussi, par un axe gradué et orienté. Ce second axe est disposé orthogonalement au premier. On obtient ainsi un repère cartésien qui définit un espace euclidien à deux dimensions. Cet espace est appelé l'espace expérimental (figure 1). L'espace expérimental comprend tous les points du plan « facteur 1 × facteur 2 » et chacun d'eux représente une expérience

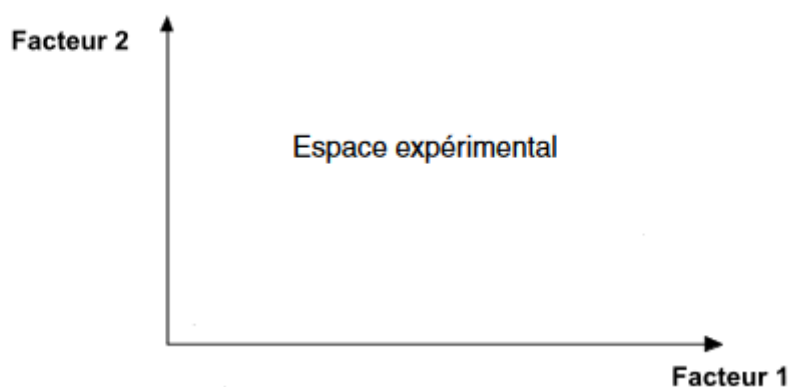


Figure 1. Chaque facteur est représenté par un axe gradué et orienté. Les axes des facteurs sont orthogonaux entre eux. L'espace ainsi défini est l'espace expérimental.

S'il y a un troisième facteur, on le représente aussi par un axe orienté et gradué, et on le positionne perpendiculairement aux deux premiers. À partir de quatre facteurs, on opère de

même, mais il n'y a plus de représentation géométrique possible et l'on doit adopter une représentation purement mathématique de l'espace expérimental qui est un hyper volume à quatre dimensions.

II.1.3 Domaine d'un facteur

La valeur donnée à un facteur pour réaliser une expérience est appelée niveau

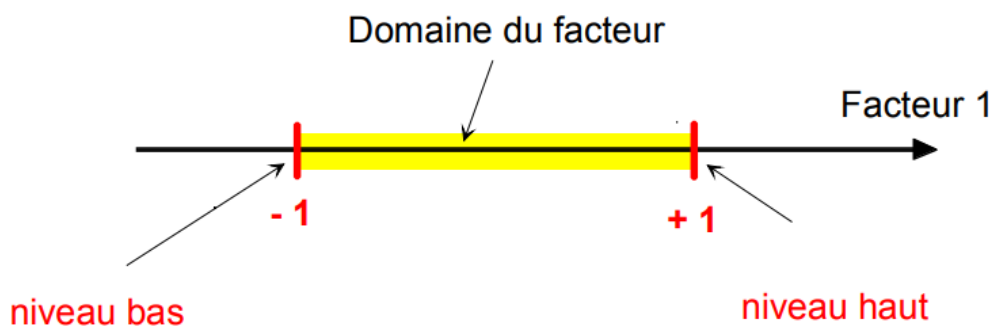


Figure 2 : Le niveau bas du facteur est noté par - 1 et le niveau haut par +1. Le domaine de variation du facteur est constitué de toutes les valeurs comprises entre le niveau bas et le niveau haut.

L'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre le facteur entre le niveau bas et le niveau haut, s'appelle le domaine de variation du facteur ou plus simplement le domaine du facteur. On a l'habitude de noter le niveau bas par -1 et le niveau haut par $+1$.

II.1.4. Domaine d'étude

Dans la pratique, l'expérimentateur sélectionne une partie de l'espace expérimental pour réaliser son étude. Cette zone particulière de l'espace expérimental est le domaine d'étude (figure 3). Ce domaine est défini par les niveaux hauts et les niveaux bas de tous les facteurs et éventuellement par des contraintes entre les facteurs.

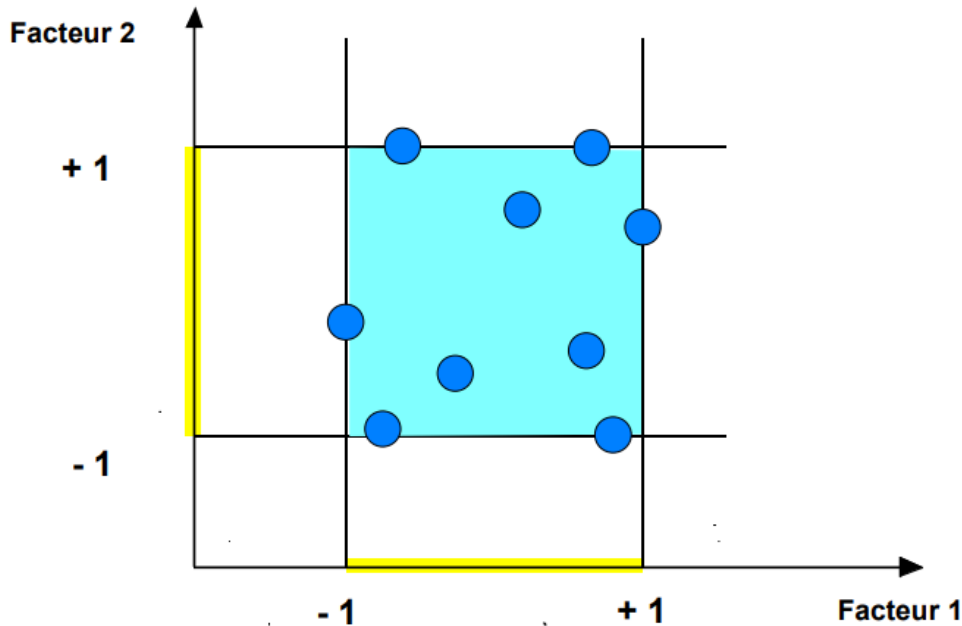


Figure 3 : l'espace expérimental est le domaine d'étude

II.1.5. Notion de surface de réponse

À chaque point du domaine d'étude correspond une réponse. À l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localise sur une surface appelée surface de réponse

Les niveaux x_i représentent les coordonnées d'un point expérimental et y est la valeur de la réponse en ce point. On définit un axe orthogonal à l'espace expérimental et on l'attribue à la réponse. La représentation géométrique du plan d'expériences et de la réponse nécessite un espace ayant une dimension de plus que l'espace expérimental. Un plan à deux facteurs utilise un espace à trois dimensions pour être représenté : une dimension pour la réponse, deux dimensions pour les facteurs.

A chaque point du domaine d'étude correspond une réponse. A l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localisent sur une surface appelée la surface de réponse (Figure 4). Le nombre et de l'emplacement des points d'expériences est le

problème fondamental des plans d'expériences. On cherche à obtenir la meilleure précision possible sur la surface de réponse tout en limitant le nombre d'expériences

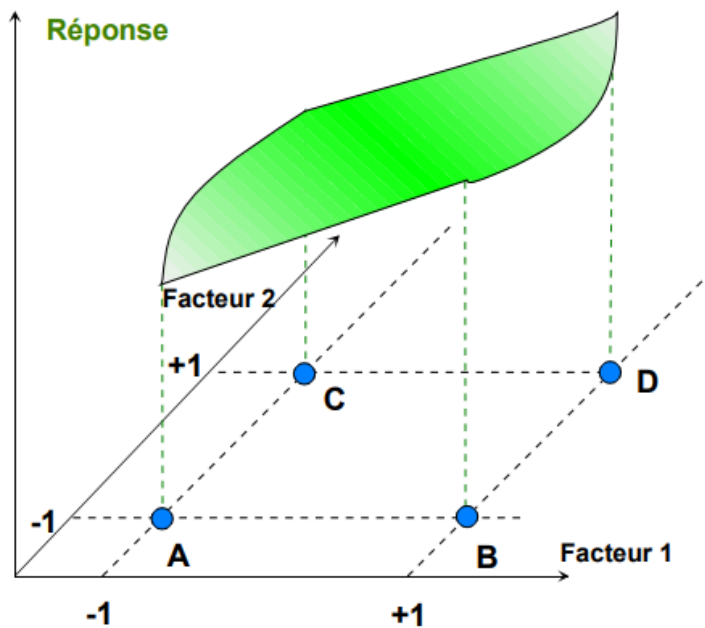


Figure 4 : Les réponses associées aux points du domaine d'étude forment la surface de réponse. Les quelques réponses mesurées aux points du plan d'expériences permettent de calculer l'équation de la surface de réponses.

II.1.6. Modélisation mathématique a priori de la réponse

- **Modélisation mathématique**

En l'absence de toute information sur la fonction qui lie la réponse aux facteurs, on se donne a priori une loi d'évolution dont la formulation la plus générale est la suivante :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

On choisit a priori une fonction mathématique qui relie la réponse aux facteurs. On prend un développement limité de la série de Taylor-Mac Laurin. Les dérivées sont supposées constantes et le développement prend la forme d'un polynôme de degré plus ou moins élevé :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum a_{ij} x_i^2 + a_{ij\dots z} x_i x_j \dots x_z \quad \{1\}$$

- y est la réponse ou la grandeur d'intérêt. Elle est mesurée au cours de l'expérimentation et elle est obtenue avec une précision donnée.
- xi représente le niveau attribué au facteur i par l'expérimentateur pour réaliser un essai. Cette valeur est parfaitement connue. On suppose même que ce niveau est déterminé sans erreur (hypothèse classique de la régression).
- a₀, a_i, a_{ij}, a_{ii} sont les coefficients du modèle mathématique adopté a priori. Ils ne sont pas connus et doivent être calculés à partir des résultats des expériences.

L'intérêt de modéliser la réponse par un polynôme est de pouvoir calculer ensuite toutes les réponses du domaine d'étude sans être obligé de faire les expériences. Ce modèle est appelé "modèle postulé" ou "modèle a priori".

II.1.7. Le modèle de l'expérimentateur

Deux compléments doivent être apportés au modèle précédemment décrit. Le premier complément est le "manque d'ajustement". Cette expression traduit le fait que le modèle a priori est fort probablement différent du modèle réel qui régit le phénomène étudié. Il y a un écart entre ces deux modèles. Cet écart est le manque d'ajustement (lack of fit en anglais). Le second complément est la prise en compte de la nature aléatoire de la réponse. En effet, si l'on mesure plusieurs fois une réponse en un même point expérimental,

on n'obtient pas exactement le même résultat. Les résultats sont dispersés. Les dispersions ainsi constatées sont appelées erreurs expérimentales. Ces deux écarts, manque d'ajustement et erreur expérimentale, sont souvent réunis dans un seul écart, notée e. Le modèle utilisé par l'expérimentateur s'écrit alors :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum a_{ii} x_i^2 + a_{ij\dots z} x_i x_j \dots x_z + e$$

II.1.8. Système d'équations

Chaque point expérimental permet d'obtenir une valeur de la réponse. Cette réponse est modélisée par un polynôme dont les coefficients sont les inconnues qu'il faut déterminer. A la fin du plan d'expériences, on a un système de n équations à p inconnues (s'il y a p coefficients dans le modèle choisi a priori). Ce système s'écrit d'une manière simple en notation matricielle:

$$y = X + e + a$$

y est le vecteur des réponses.

X est la matrice de calcul, ou matrice du modèle, qui dépend des points expérimentaux choisis pour exécuter le plan et du modèle postulé.

a est le vecteur des coefficients.

e est le vecteur des écarts.

Ce système possède un nombre d'équations inférieur au nombre d'inconnues. Il y a n équations et p + n inconnues. Pour le résoudre, on utilise une méthode de régression basée sur le critère des moindres carrés. On obtient ainsi les estimations des coefficients que l'on note :

$$\hat{a}$$

Le résultat de ce calcul est :

$$\hat{a} = (X' X)^{-1} X' y$$

Formule dans laquelle la matrice X est la matrice transposée de X. De nombreux logiciels exécutent ce calcul et donnent directement les valeurs des coefficients.

Deux matrices interviennent constamment dans la théorie des plans d'expériences :

- La matrice d'information XX' . '
- La matrice de dispersion $(X'X)^{-1}$. .

II.2. PLANS FACTORIELS COMPLETS A DEUX NIVEAUX

Ces plans possèdent un nombre de niveaux limité à deux pour chaque facteur. Toutes les combinaisons de niveaux sont effectuées au cours de l'expérimentation. Ces plans peuvent être utilisés indistinctement pour les variables continues et pour les variables discrètes.

II. 2.1 Plan à deux facteurs

Pour deux facteurs, le domaine d'étude est un carré. Le modèle mathématique postulé est un modèle du premier degré par rapport à chaque

facteur :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + e$$

- y est la réponse
- xi représente le niveau attribué au facteur i.
- a_0 est la valeur de la réponse au centre du domaine d'étude.
- a_1 est l'effet (ou effet principal) du facteur 1.
- a_2 est l'effet (ou effet principal) du facteur 2.
- a_{12} est l'interaction entre les facteurs 1 et 2.
- e est l'écart.

II.2.2 Plans factoriels à k facteurs à 2 niveaux

On peut augmenter le nombre de facteurs. L'espace expérimental possède autant de dimensions qu'il y a de facteurs et le modèle mathématique correspond à la relation

Un plan comportant k facteurs à deux niveaux est noté 2^k

.

- Le k en exposant signifie qu'il y a k facteurs étudiés.
- Le 2 indique le nombre de niveaux par facteur.

On remarquera que cette notation indique également le nombre d'essais à réaliser. Ce nombre devient rapidement très important. Pour seulement 7 facteurs, il faudrait exécuter 128 essais. Pour diminuer le nombre des essais en conservant la possibilité d'étudier tous les facteurs, les plans factoriels fractionnaires à deux niveaux ont été introduits.

II.3. PLANS FACTORIELS FRACTIONNAIRES A DEUX NIVEAUX 2^{k-q}

Les plans factoriels fractionnaires sont des plans factoriels qui permettent d'étudier tous les facteurs mais dont le nombre d'essais est réduit par rapport aux plans factoriels complets. Un plan factoriel fractionnaire à 2 fois moins, ou 4 fois moins ou 2^q fois moins d'essais que le factoriel complet correspondant.

II.3.1. Notation des plans factoriels fractionnaires

Le plan fractionnaire, moitié du plan complet possède $1/2 \cdot 2^k$ ou 2^{k-1} essais. On peut donner une signification à chaque caractère de cette notation :

Le k signifie qu'il y a k facteurs étudiés.

Le 2 signifie que chaque facteur prend deux niveaux.

Le 1 signifie que le nombre d'essais du plan a été divisé par 2^1

.

Un plan 2^{5-2} permet d'étudier cinq facteurs prenant chacun deux niveaux en 8 essais.

Le plan complet a été divisé par $2^2 = 4$.

Un plan 2^{k-q} permet d'étudier k facteurs prenant chacun deux niveaux. Le plan complet a été divisé par 2^q

II.4 plans à plusieurs niveaux

Les plans à deux niveaux sont très utilisés parce qu'ils sont économiques en nombre d'essais. Mais il n'y a aucune raison de ne pas considérer des plans ayant des facteurs prenant plus de deux niveaux. Il faut donner à chaque facteur le nombre de niveaux nécessaires aux exigences de l'étude. Il existe, là aussi, des plans complets et des plans fractionnaires qui permettent de réduire le nombre des essais malgré l'augmentation du nombre de niveaux.

II.4.1. Les tables de Taguchi

A l'origine ces plans étaient utilisés avec un modèle sans interaction. Aujourd'hui, certaines personnes leur appliquent les résultats et les principes de la théorie classique. La présentation des plans d'expériences selon les principes de Taguchi est très prisée dans le domaine de la qualité.

II.4.2. Les plans sursaturés

Un plan saturé est un plan qui comporte autant d'essais que de coefficients à déterminer dans le modèle mathématique. Les plans de Rechtschaffner, les plans de Plackett et Burman et les tables de Taguchi sont souvent des plans saturés. Un plan sursaturé est un plan qui comporte moins d'essais que de coefficients à déterminer dans le modèle mathématique. A ce titre les plans factoriels fractionnaires peuvent être considérés comme sursaturés. Mais, il existe des plans encore plus sursaturés que les plans factoriels fractionnaires. Ce sont des plans dont les facteurs principaux sont alaisés entre eux. Ces plans sont utiles lorsqu'il y a beaucoup de facteurs à examiner et lorsqu'on est sûr que peu d'entre eux sont influents sur la réponse. Certains plans proposent l'étude de 66 facteurs en 12 essais ou de 272 facteurs en 24 essais. La théorie des aliases est applicable à ces plans puisqu'on regroupe les coefficients dans des contrastes. Mais l'interprétation n'est pas toujours facile.

II.4.3. Plans complets à trois niveaux

S'il y a deux facteurs prenant chacun trois niveaux, il faut exécuter 9 essais. On note ce plan 3². S'il y a trois facteurs prenant chacun trois niveaux (plan 3³), il faut exécuter 27 essais. Ce qui commence à faire beaucoup. C'est la raison pour laquelle on a introduit les plans fractionnaires correspondants qui portent le nom de carrés latins.

II.4.4. Carrés latins

Les carrés latins sont des plans pour étudier 3 facteurs prenant chacun 3 niveaux. On réalise 9 essais au lieu de 27 pour le plan complet. Ce sont des plans fractionnaire 3³⁻¹. La disposition des points expérimentaux est telle que tous les niveaux sont représentés et qu'il n'y a pas de répétition. Ces plans sont souvent utilisés pour les variables discrètes et le modèle mathématique est souvent un modèle sans interaction.

II.5. Les plans pour surfaces de réponse

Les plans du second degré ou plans pour surfaces de réponse permettent d'établir des modèles mathématiques du second degré. Ils sont utilisés pour les variables continues. Pour deux facteurs, on a

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + e$$

Ces plans sont utiles à chaque fois que l'on se trouve près d'un maximum ou d'un minimum. La théorie développée au cours de la première partie de cet article s'applique à ces plans. A la fin des essais, on a un système d'équations dont les coefficients sont obtenus grâce à la relation

$$\hat{a} = (X' X)^{-1} X' y$$

Il existe plusieurs types de plans du second degré dont les principaux sont décrits ci dessous.

II.5.1. Les plans composites

Un plan composite est constitué de trois parties :

1. Un plan factoriel dont les facteurs prennent deux niveaux.
2. Au moins un point expérimental situé au centre du domaine d'étude.
3. Des points axiaux. Ces points expérimentaux sont situés sur les axes de chacun des facteurs.

La Figure 5 suivante représente un plan composite pour deux facteurs. Les points A, B, C et D sont les points expérimentaux d'un plan 2². Le point E est le point central. Ce point peut avoir été répliqué une ou plusieurs fois. Les points F, G, H et I sont les points axiaux. Ces quatre derniers points forment ce que l'on appelle le plan en étoile. On réalise 9 essais et 6 coefficients doivent être déterminés. Il faut donc résoudre un système de 9 équations à 6 inconnues.

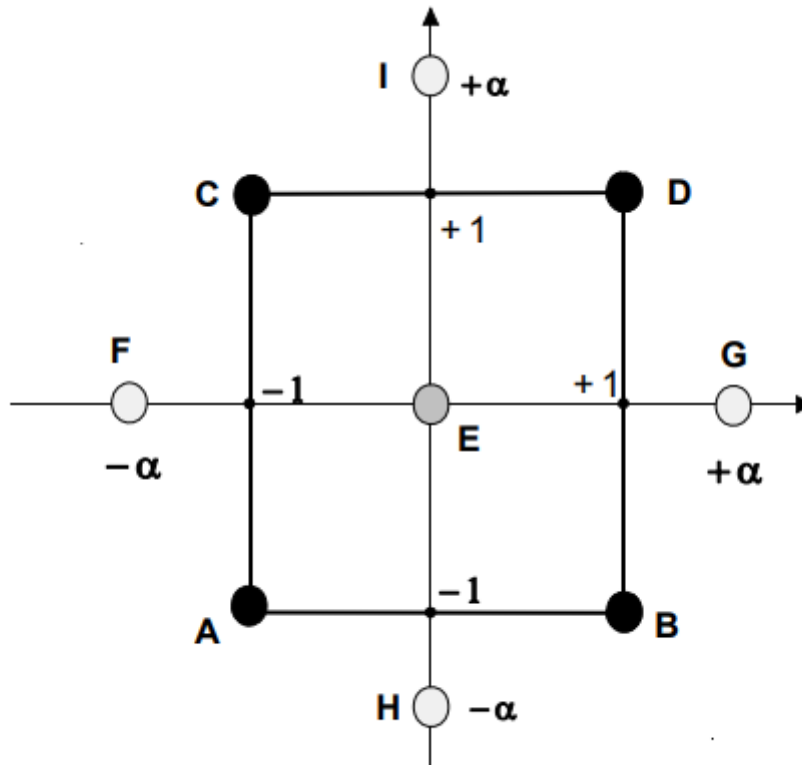


Figure 5 ; plan composite pour deux facteurs

II.5.2. Les plans de Box-Behnken

Les points expérimentaux sont au milieu des arêtes de chacun des côtés du cube. Ce plan comporte douze essais auxquels on peut ajouter un (ou plusieurs) point central. Dans la pratique on réalise souvent 3 ou 4 points au centre.

Les plans de Box-Behnken répondent à un critère d'optimisation particulier :

l'erreur de prévision des réponses est la même pour tous les points d'une sphère (ou une hyper sphère) centrée à l'origine du domaine expérimental. C'est le critère d'isovariance par rotation. Le plus connu des plans de Box-Behnken est celui qui permet d'étudier trois facteurs figure 6.

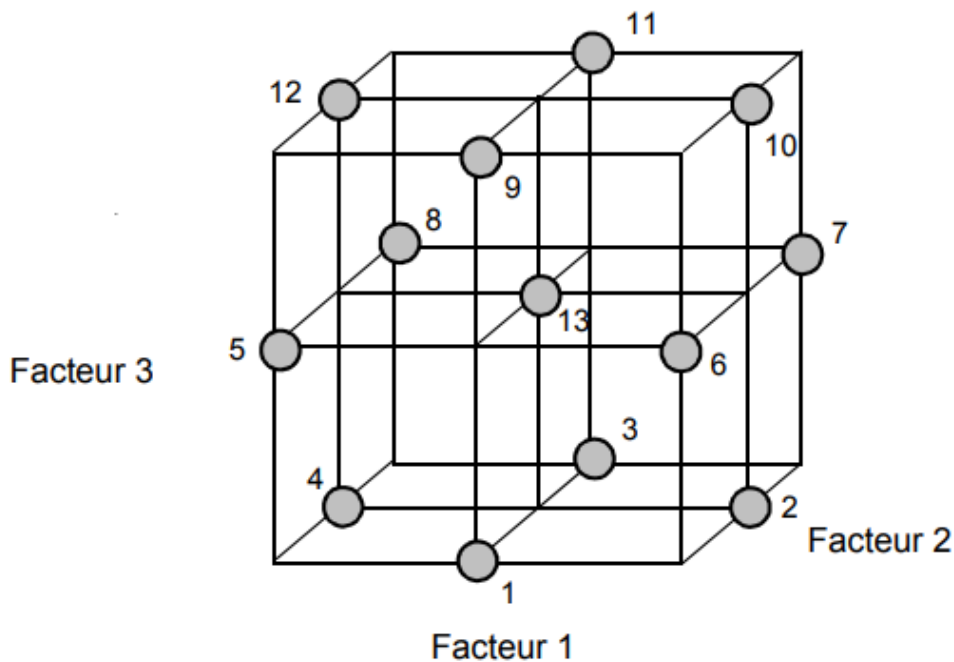


Figure 6 : Les plans de Box-Behnken

II.6. LES PLANS DE MELANGES

Les facteurs d'étude des plans de mélanges sont les proportions des constituants du mélange . Or, ces constituants ne sont pas indépendants les uns des autres. La somme des proportions d'un

mélange est toujours égale à 100%. Le pourcentage du dernier constituant est imposé par la somme des pourcentages des premiers composés. C'est la raison pour laquelle les plans de mélanges sont traités à part. Les plans de mélanges sont aussi caractérisés par de nombreuses contraintes qui peuvent peser sur le choix des proportions des constituants. Par exemple, la concentration d'un produit doit être au moins de x pour-cent ou cette concentration ne peut excéder une valeur donnée. En fonction de ces contraintes la planification de l'étude est modifiée et elle doit être adaptée à chaque cas

- **La contrainte fondamentale des mélanges**

Si l'on note par x_i la teneur en constituant i , la somme des teneurs de tous les constituants du mélange satisfait la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 100 \%$$

Si, au lieu d'utiliser les pourcentages, on ramène la somme des teneurs des différents constituants à l'unité on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 1$$

Cette relation s'appelle la contrainte fondamentale des mélanges. Les représentations géométriques des plans de mélanges sont différentes de celles utilisées pour les plans d'expériences classiques et les modèles mathématiques sont eux aussi profondément modifiés.

- **Représentation géométrique des mélanges**

On utilise un triangle équilatéral pour représenter les mélanges à trois composants. Les produits purs sont aux sommets du triangle équilatéral. Les mélanges binaires sont représentés par les côtés du triangle. Par exemple, le côté gauche du triangle (Figure 7) représente les mélanges

composés uniquement des produits A et B.

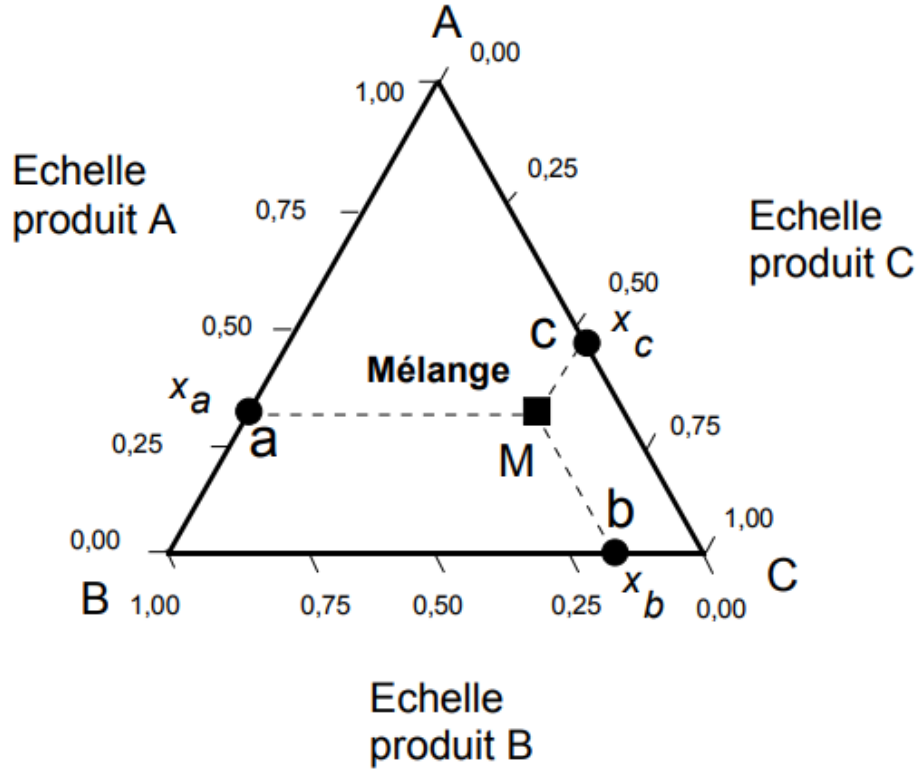


Figure 7 : Représentation géométrique des mélanges

- **Emplacement des points expérimentaux**

Il existe plusieurs manières de disposer les points expérimentaux dans le domaine d'étude : Plans de mélanges en réseaux (Simplex lattice designs), plans de mélanges centrés (Simplex-Centroid Designs), plans de mélanges centrés augmentés (Augmented Simplex-Centroid Designs) Figure 8.

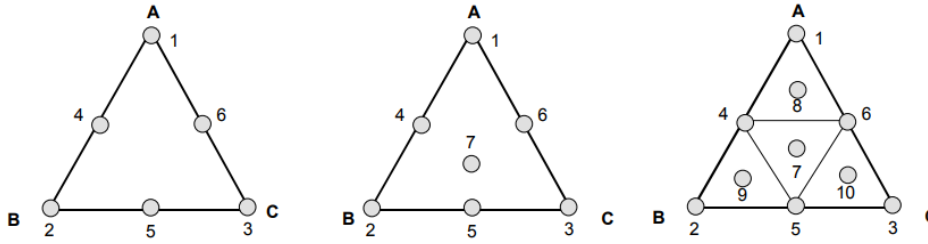


Figure 8: Plan de mélanges en réseaux (à gauche), plan de mélanges centrés (au milieu), plan de mélanges centrés augmentés (à droite).

- **Modèles mathématiques des mélanges**

La contrainte fondamentale des mélanges fait disparaître la constante et les termes du second degré se réduisent aux termes rectangles. Pour trois composants, le modèle du premier degré est donc :

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

et pour le second degré :

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

On est souvent amené à utiliser des modèles de degré supérieur, trois et même parfois quatre si les surfaces de réponses sont compliquées. Plus le degré du modèle est élevé, plus il faut réaliser de points d'expériences pour pouvoir déterminer tous les coefficients. Ces coefficients sont calculés à partir de la relation de régression :

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}$$

Les mélanges sont également caractérisés par des contraintes : contraintes basses, contraintes hautes ou contraintes relationnelles.

II.7. Les logiciels de plans d'expériences

La construction des plans d'expériences est souvent facile et il suffit de choisir parmi les matrices déjà publiées. Mais, il importe que le plan soit adapté à l'étude et non pas l'inverse. Il y a donc des situations où il faut absolument tailler un plan sur mesure. Les logiciels de plan d'expériences possèdent des bibliothèques de plans classiques et ils permettent aussi de construire les plans sur mesures. En particulier, les plans de mélanges et les plans avec contraintes sur le domaine d'étude nécessitent l'usage d'un logiciel pour construire le plan le mieux adapté à l'étude (tableau 1).

Tableau 1. Les logiciels de plan d'expériences

JMP	http://www.jmpdiscovery.com
Minitab	http://www.minitab.fr
Statistica	http://www.intesoft.com/produits/tech/statistica
Statgraphics	http://www.sigmaplus.fr
Unscrambler	http://www.camo.no
Pirouette	http://www.infometrix.com
Modde	http://www.umetrics.com

Références ;

GOUPY Jacques «Introduction aux Plans d'expériences». Dunod. Paris. 303 pages. (2001).

BOX George.E. P, HUNTER William G., HUNTER J. Stuart «Statistics for Experimenters» deuxième édition. John Wiley and Sons. New-York. 633 pages. (2005).

KOSHAL R. S. «Application of the method of maximum likelihood to the improvement of curves fitted by the method of moments» Journal of Royal Statistic Soc A96 303-313. (1933).

RECHTSCHAFFNER R. L. «Saturated Fractions of 2n and 3 Factorial Designs». Technometrics, vol. 9. (1967). 569-575.

PLACKETT R. L. and BURMAN J. P. «The design of optimum multifactorial experiments». Biometrika, n°33. (1946).

PILLET Maurice «Introduction aux Plans d'expériences par la méthode Taguchi.» Les éditions d'organisation. Paris. 224 pages. (1992).