Université de M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

Le : 08 /06/2023
Durée : **1h30**

Examen de Rattrapage de : Fonction de la variable complexe (MATH4)

Exercice N° 1: (6pts)

1) Démontrer que la fonction $f(z) = \cos(iz)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2) Déduire sa dérivée.

Exercice N° 2: (6 pts)

1) Chercher la série de Laurent de la fonction $f(z) = z^2 sin\frac{2}{z^2} cos\frac{2}{z^2}$ autour de point $z = 0$
2) Indiquer le type de singularité de 0
3) Déduire le Résidu de $f(z)$ en 0 $(\mathrm{Res}(f, 0))$

Exercice N° 3 : (8 pts)

Calculer les intégrales :

$$\oint_C \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z^2+1}}\,\boldsymbol{dz} \quad , \quad \oint_C \frac{\mathbf{Arctgz}}{(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^2}\,\boldsymbol{dz}$$

Ou C est le cercle $|z| = 10$

Bonne Chance

Correction de l'Examen de Rattrapage

Solution de l'exercice N° 1:

$f(z) = \cos iz = \cos(ix - y) = \cos ix \cos y + \sin ix \sin y$ ... ... (0.5pt)

avec : $\sin ix = i \operatorname{sh} x$ ... ... (0.5pt) *et* $\cos ix = \operatorname{ch} x$ ... ... (0.5pt)

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\operatorname{ch} x \cos y}_{P} + i \underbrace{\operatorname{sh} x \sin y}_{Q} \text{ ... ... } (1pt)$$

$f(z)$ *holomorphe* $\Leftrightarrow$ $f(z)$ *vérifiée les conditions de Cauchy – Riemann :* $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$ ....(0.5pt)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \operatorname{sh} x \cos y = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \text{ ... ... } (0.5pt) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\operatorname{ch} x \sin y = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \text{ ... ... } (0.5pt) \end{cases}$$

$\Rightarrow$Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiée alors $f(z)$est holomorphe, et sa dérivée égale à :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y = i(-i \operatorname{sh} x \cos y + \operatorname{ch} x \sin y) \text{ ... } (1pt)$$

$$\Rightarrow f'(z) = i(\cos i x \sin y - \sin ix \cos y) = -i \sin(ix - y) \text{ ... ... } (0.5pt)$$

$$\Rightarrow f'(z) = -i \sin i(x + iy) = -i \sin iz \text{ ... ... } (0.5pt)$$

Solution de l'Exercice N° 2:

$$f(z) = z^2 \sin\frac{2}{z^2}\cos\frac{2}{z^2} = \frac{z^2}{2}\sin\left(\frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^2}\right) = \frac{z^2}{2}\sin\left(\frac{4}{z^2}\right) \text{..... } (1pt)$$

On pose $t = \frac{4}{z^2} \Longrightarrow z^2 = \frac{4}{t}$ *et* $f(t) = \frac{2}{t}\sin(t)$

On a $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \cdots$ ... ... (1pt)

$$\Rightarrow f(t) = \left(\frac{2}{t}\right)\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \cdots\right)$$

$$f(t) = 2 - \frac{2t^2}{3!} + \frac{2t^4}{5!} - \frac{2t^6}{7!} + \cdots + \cdots$$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\ldots + \cdots \frac{-2\times 4^6}{7!\,z^{12}} + \frac{2\times 4^4}{5!\,z^8} - \frac{2\times 4^2}{3!\,z^4}}_{Parie\ Principale(0.5pt)} + \underbrace{2}_{Partie\ \ Analytique(0.5pt)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1pt)$$

- La partie principale est infinie $(0.5pt)$ alors $z_0 = 0$ *est* ***un point singulier essentiel*** $(0.5pt)$
- le Résidu de $f(z)$ en 0 est égal au coefficient a_{-1} de la série de Laurent:

$$\mathrm{Res}(f,0) = a_{-1} = 0 \ \ (1pt)$$

<u>Solution de l'exercice 3:</u>

En appliquant Le théorème des résidus :

$$I = \oint_C g(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)) \ldots (0.5pt)$$

1) $\boldsymbol{I_1 = \oint_C \frac{z}{z^2+1} dz}$

La fonction $g_1(z) = \frac{\mathbf{z}}{(\mathbf{z^2+1})} = \frac{\mathbf{z}}{(\mathbf{z+i})(\mathbf{z-i})}$ a 2 pôles simples en $z_1 = -i\ \ et\ z_2 = i$ $\ldots(0.25pt)$:

Pour le cercle $C: |z| = 10$, tous les pôles sont à l'intérieur de C $\ldots(0.5pt)$, alors :

Le résidu de $g_1(z)$ au pôle simple $z_1 = i$:

$$Res(g_1(z), i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\times\frac{\mathrm{z}}{(z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{z}{(z+i)}\right] = \frac{1}{2} \ldots (1pt)$$

Le résidu de $g_1(z)$ au pôle simple $z_2 = -i$:

$$Res(g_1(z), -i) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\times\frac{\mathrm{z}}{(z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\to -i}\left[\frac{z}{(z-i)}\right] = \frac{1}{2}) \ldots (1pt)$$

$$I_1 = \oint_{|z|=10} \frac{\mathbf{z}}{(\mathbf{z^2+1})} dz = 2\pi i \times \left(Res(g_1(z), i) + Res(g_1(z), -i)\right) \ldots (0.5pt) = 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\pi i \ldots (0.5pt)$$

2) $\boldsymbol{I_2 = \oint_C \frac{\mathrm{Arctgz}}{(z-1)^2} dz}$

La fonction $g_2(z) = \frac{\mathbf{Arctgz}}{(\mathbf{z-1})^2}$ a un pôle double en $z_0 = 1$ $\ldots(0.5pt)$:

Pour le cercle $C: |z| = 10$, le pole $z_0 = 1$ est à l'intérieur de C $\ldots(0.5pt)$, alors :

Le résidu de $g_2(z)$ au pôle double $z_0 = 1$:

$$Res(g_2(z), 1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\times\frac{\mathbf{Arctgz}}{(\mathbf{z-1})^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[\mathbf{Arctgz}]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2} \ldots (1.25pt)$$

$$I_2 = \oint_{|z|=10} \frac{\mathbf{Arctgz}}{(\mathbf{z}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}\,dz = 2\pi i \times \left(Res(g_2(z),1)\right) \ldots (0.5pt) = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right) = \pi i \ldots (1pt)$$