Examen de Rattrapage

Exercice N°1

Calculer l' intégrale $\iint_D \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy$

Avec $D = \{(x, y)/\ y \geq 0, x^2 + y^2 - x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

Exercice N°2

Etudier la convergence ou la divergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+|\cos x|} \quad , \int_0^{\pi} \frac{1-cosx}{x}dx \ , \quad \int_1^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \ , \ \int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2}dx$$

Exercice N°3

I. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge et chercher sa somme.

II. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1} \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(n+1)e^n} \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}$$

Bonne Chance

Corrigé type du Rattrapage

Exercice N°1

On fait le changement des variables, en utilisant les coordonnés polaires

1. $x = \rho\cos\theta \; et \; y = \rho\sin\theta$ ……….. **(1pt)** ; Alors on aura le Jacobien $J = \rho$ ……….. **(1pt)**

L'intersection entre $y \geq 0, x^2 + y^2 - x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ donne :

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};\ \cos\theta \leq \rho \leq 2\cos\theta \text{ ……….. } \mathbf{(2pt)}$$

Dans ce cas on trouve :

1. $J = \iint_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{\rho=\cos\theta}^{2\cos\theta}(\cos\theta - \sin\theta)d\rho\right]d\theta$ **(2pt)** $=$

   $\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}[(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)]\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - \sin\theta\cos\theta\right)\right]d\theta = \left|\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta -\right.$

   *12*sin2*θ0π2*…………**(2pt)**

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{ …. } \mathbf{(2pt)}$$

Exercice N°2 (7pts)

1. On a $\forall x \in [0, +\infty[: \frac{1}{2+|\cos x|} \geq \frac{1}{3}$ et on a $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{3} = \left|\frac{x}{3}\right|_0^{+\infty} = +\infty$ alors l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{3}$ diverge donc par comparaison $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{2+|\cos x|}$ diverge également. ……………………………. **(2pt)**
2. On a $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$ alors $x = 0$ est une fausse singularité $\Rightarrow$l'intégrale $\int_0^{\pi}\frac{1-cosx}{x}dx$est une intégrale propre. ………………………….. **(1.5pt)**
3. On applique la règle de Riemann $\lim_{x\to+\infty} x^p \times \left(ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\frac{1}{x^p}} = k$, on prend $p = 2 > 1 \Rightarrow k = 1 \neq \infty$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ est convergente. ………………………….. **(1.5pt)**

4. $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}dx$ intégrale impropre en $x=1$(seconde espèce), en utilisant la règle de Riemann : $\lim_{x\to1^-}(1-x)^p \times \left(\frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}\right) = k$,on prend $p=1 \Rightarrow k=\frac{1}{3}\neq 0$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx$ est divergente. …………………………. $(\mathbf{2pt})$

5. On fait un changement de variable $x=-y \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x^2}dx = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y^2}dy$,

on utilise la règle de Riemann : $\lim_{y\to+\infty} y^p \times \left(\frac{e^{-y}}{y^2}\right) = k$ on prend $p=2>1 \Rightarrow k=0\neq\infty$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y^2}dy$ est convergente$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x^2}dx$ converge également. ……………………….. $(\mathbf{3pt})$

Exercice N°3(7pts):

I. Démontrer que la série $\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge et chercher sa somme.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)(\mathbf{1pt})$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1(\mathbf{1pt})$$

Donc la série est convergente et sa somme égale à $1\left(\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1\right)$ $(\mathbf{1pt})$

II.

1. On remarque que le terme général

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \text{ ……………. } (\mathbf{1pt})$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0$ *la série* $\sum_{n\geq1}\frac{n}{n+1}$ *est divergente.*

2. en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|e^{-2n-1}\right| = 0 < 1 \text{ ……………. } (\mathbf{2pt})$$

Alors la série est convergente.

3. en appliquant la règle de d'Alembert :

Alors la série est convergente. $\dots\dots\dots\dots.(\mathbf{1pt})$

4. en appliquant la règle de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n\right|}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+1}{3n+4}\right|=\frac{2}{3}<1\dots\dots\dots\dots.(\mathbf{1pt})$$

Alors la série est convergente.

5. en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}\times n!}{n^n\times(n+1)\times n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^n}{n^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e>1\dots\dots\dots\dots.(\mathbf{2pt})$$

Alors la série est divergente.