Université de M'sila	Correction d'examen de remplacement	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2022/2023
Module Analyse 4		Durée : 1h −30m

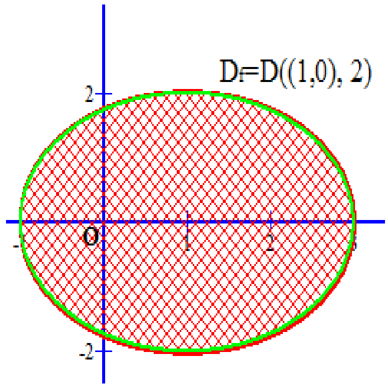
Barème

Correction d'exercice : 1 (6pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x,y)=\sqrt{3-x^2+2x-y^2}$

1 — ① $D_f=\{(x,y):3-x^2+2x-y^2\geq 0\}=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leq 2^2\}=D((1,0),2)$.

Donc, le domaine D_f est le disque fermé $D((1,0),2)$ de centre $(1,0)$ et de rayon $r=2$.



1 — ⓐ Présentation de $\mathcal{D}_f$.

1 — Pour tout $(x,y)\in D_f$, la fonction $(x,y)\mapsto 3-x^2+2x-y^2$ est dérivable (polynôme).

Donc, la fonction $(x,y)\mapsto\sqrt{3-x^2+2x-y^2}$ est dérivable dans le disque ouvert $\mathring{D}((1,0),2)$.

Car pour tout $(x,y)\in\mathring{D}((1,0),2):3-x^2+2x-y^2>0$.

et on a, alors, $\partial_x f(x,y)=\dfrac{-x+1}{\sqrt{5-x^2+2x-y^2}}$, et $\partial_y f(x,y)=\dfrac{-y}{\sqrt{5-x^2+2x-y^2}}$.

1 — L'équation du plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ au point $(0,0)$ est donner par

$$\partial_x f(0,0)(x-0)+\partial_y f(0,0)(y-0)-(z-\sqrt{5})=0\Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{5}}x+\sqrt{5}.$$

0.5 — ② Pour $c>0$, on a $f(x,y)=c\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=6-c^2$

0.5 — ⓐ Si $c>2$, les courbes de niveau c est l'ensemble vide.

0.5 — ⓑ Si $c=2$, les courbes de niveau c est le point $(1,0)$.

0.5 — ⓒ Si $0<c<2$, les courbes de niveau c sont les cercles $C((1,0),\sqrt{4-c^2})$.

Barème

Exercice : 2 (7pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & : (x,y)\neq(0,-1)\\ 0 & : (x,y)=(0,-1)\end{cases}$

① Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

0.5 — ⓐ Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$, on a f est continue, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas,(i.e, f est fractionnelle).

(b) Pour $(x,y)=(0,-1)$, on utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & \text{où } r>0 \text{ et } \theta\in[0,2\pi[. \\ y=-1+r\sin\theta \end{cases}$$

0.5 On aura donc, $|f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos^2\theta\sin^2\theta| \leq r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

0.5 C'est à dire, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = 0 = f(0,-1)$. D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

0.5 (2) (a) La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$, car quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

1 Pour $(x,y)\neq(0,-1)$, on a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x(y+1)^3}{(x^2+(y+1)^2)^2} \\ \dfrac{x^2(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^2}\end{pmatrix}$.

1 (b) Si $(x,y)=(0,-1)$, on a :

$$\nabla f(0,-1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,-1)-f(0,-1)}{x} \\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,-1)}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) C'est à dire, $\nabla f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}, & si\ (x,y)\neq(0,-1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\vec{j}, & si\ (x,y)=(0,-1)\end{cases}$

0.5 $$= \begin{cases} \dfrac{2x(y+1)^3}{(x^2+(y+1)^2)^2}\vec{i} + \dfrac{x^2(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^2}\vec{j}, & si\ (x,y)\neq(0,-1) \\ 0\vec{i}+0\vec{j}=\vec{0}, & si\ (x,y)=(0,-1)\end{cases}$$

0.5 (3) Pour prouver que f nest pas différentiable en $(0,-1)$ il faut montrer que :

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{f(x,y)-f(0,-1)-\partial_x f(0,-1)x-\partial_y f(0,-1)(y+1)}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} \neq 0$. Notons que,

0.5 $$\frac{f(x,y)-f(0,-1)-\partial_x f(0,-1)x-\partial_y f(0,-1)(y+1)}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} = \frac{x^2(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si on pose, $x=r\cos\theta$, $y=-1+r\sin\theta$, alors, on aura :

0.5 $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^2(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0}\cos^2\theta\sin\theta \neq 0$$

0.5 Donc f n'est pas différentiable en $(0,-1)$.

0.5 (4) D'après question précédente la fonction f n'est pas différentiable en point $(0,-1)$. Alors, elle n'est pas de classe C^1 en point $(0,-1)$.

Barème

Exercice : 3 7pt

Soit la courbe plane d'équation :

Université de M'sila		**Faculté : Maths-informatique**
L 2 Mathématiques	**Correction d'examen**	**Année : 2022/2023**
Module Analyse 4	**de remplacement**	**Durée : 1h −30m**

$ye^{x} + e^{y}\sin(2x) = 0. \qquad (1)$

0.5 (1) Posons $f(x,y) = ye^{x} + e^{y}\sin(2x)$. Alors, $f \in C^{1}(\mathbb{R}^{2})$.

0.5 On remarque que $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$ l'équation (1)

1 et on a aussi : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y} + e^{x}\sin(2y), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{y} + 2e^{x}\cos(2y), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1. \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2. \end{cases}$

$0.5+1.5$ Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$, il existe une et une seule fonction $y = \phi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x,\phi(x)) = 0$.

1 (2) On a $\phi'(0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\dfrac{1}{2}$

1 L'équation de la droite tangente au graphe de la fonction ϕ est :

$y = \phi(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x.$

1.5 (3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\phi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \phi'(0) = -\dfrac{1}{2}.$