

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



POLYCOPIÉ DE COURS

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Réalisé par :

Dr. OUZANDJA Djamel

Année Universitaire : 2022/2023

PRÉFACE

La Mécanique des structures est une discipline très ancienne, qui s'est développée pour répondre à des besoins de construction, initialement dans le domaine du Génie Civil. Elle repose sur l'utilisation de modèles simplifiés, qui permettent l'analyse des structures de façon rapide.

Le présent polycopié intitulé "Mécanique des structures" s'adresse aux étudiants de Master 1 en génie civil, système "L.M.D", option "Structures". Il est élaboré conformément au programme officiel fixé par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique (République Algérienne). Ce support de cours est conçu dans le but de permettre de renforcer les connaissances de l'étudiant en calcul des structures, d'acquérir des méthodes matricielles et itératives visant la résolution des systèmes hyperstatiques.

Ce polycopié est divisé en sept chapitres. Le contenu du premier chapitre concerne une introduction sur l'analyse des structures. Le deuxième chapitre est consacré à déterminer les relations différentielles, calcul des flèches et rotations, théorie du potentiel interne, Théorème de Castigliano et Énoncé de Menabrea. La méthode des forces et méthode des déplacements sont présentées, respectivement, aux chapitres trois et quatre. Le chapitre cinq est consacré à exposer les méthodes itératives. Le sixième et le dernier chapitre présentent respectivement les poutres continues sur appuis élastiques et le calcul des structures en arc.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	i
Table des matières	ii

CHAPITRE : 1 INTRODUCTION SUR L'ANALYSE DES STRUCTURES

1.1. Introduction	2
1.2. Définition de structure	2
1.3. Définitions et hypothèses	2
1.4. Propriétés des matériaux	4
1.5. Classification géométrique des structures	4
1.6. Réaction d'appui (types de liaisons)	6
1.6.1. Appui simple	6
1.6.2. Appui double (articulation)	7
1.6.3. Encastrement	7
1.7. Conditions d'équilibre	8
1.8. Résolution d'un problème de statique	8
1.9. Efforts internes	8
1.9.1. Effort normal	9
1.9.2. Efforts tranchants	9
1.9.3. Moments fléchissants	10
1.9.4. Moment de torsion	10
1.10. Méthode des sections	11

Chapitre : 2 DÉFORMÉE DES POUTRES

2.1. Généralités	13
2.1.1. But de l'étude	13
2.1.2. Rappels mathématiques	13
2.1.3. Définitions	13
2.2. Hypothèses	14
2.3. Notations	15
2.4. Etude de la déformée	15
2.4.1. Relation entre la flèche et la rotation	15
2.4.2. Relation entre la rotation et le rayon de courbure	15
2.4.3. Relation entre le moment et le rayon de courbure	16
2.4.4. Relation entre la flèche et le moment	17
2.4.5. Conditions limites	17
2.5. Théorie du potentiel interne (méthodes énergétiques)	20
2.5.1. Hypothèses	20
2.5.2. Rappels	21
2.5.3. Expression du potentiel interne en fonction de sollicitations internes	22

2.5.4. Théorème de Castigliano	24
2.5.5. Théorème de Ménabréa	26
2.6. Exercices	27

CHAPITRE : 3 MÉTHODE DES FORCES

3.1. Méthode des forces	30
3.2. Principe de la méthode des forces	30
3.3. Degré d'hyperstaticité	31
3.4. Système de base	31
3.5. Différentes possibilités des systèmes de base	31
3.6. Exemples	33
3.7. Equations canoniques	34
3.8. Evaluation des intégrales du type $\int^l m_i m_j dx$ par l'emploi de tableaux	34
3.9. Procédure de la méthode des forces	40
3.10. Exercices	41

CHAPITRE : 4 MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS

4.1. Introduction	55
4.2. Nombre d'inconnues de la méthode	55
4.3. Intérêt de la méthode des déplacements	55
4.4. Principe de la méthode des déplacements	56
4.5. Classification des structures	58
4.6. Principe du nœud fixe	59
4.7. Principe du nœud mobile	60
4.8. Sollicitations des barres	61
4.9. Moments fléchissants et réactions des barres soumises à des déplacements et des charges	61
4.10. Equations d'équilibre	64
4.11. Étapes de calcul par la méthode des déplacements	65
4.12. Exercices	66

Chapitre : 5 MÉTHODES ITÉRATIVES

5.1. Introduction	73
5.2. Notion de rigidité-Relation de rigidité	74
5.2.1. Concept de Rigidité	74
5.2.2. Analogie avec une barre	76
5.2.3. Matrice de rigidité d'un ressort	77
5.2.4. Matrice de rigidité d'un ensemble de plusieurs ressorts	79
5.3. Matrice de rigidité d'une barre et d'un ensemble de barres	82

5.4. Structures formées de barres non alignées (Notion de repère local et global)	85
5.5. Procédure d'assemblage des barres	90
5.6. Exemples d'assemblages avec des éléments de barres	91

CHAPITRE : 6 POUTRES CONTINUES SUR APPUIS ÉLASTIQUES

6.1. Introduction	96
6.2. Méthode des trois moments	96
6.3. Principe de la méthode des trois moments	96
6.4. Calcul des moments fléchissant dans les appuis	98
6.5. Exercices	102

CHAPITRE : 7 CALCUL DES STRUCTURES EN ARC

1.7. Arc isostatique	110
7.1.1. Cas d'une charge uniformément répartie	110
7.1.2. Cas d'une charge ponctuelle horizontale	110
7.1.3. Cas d'une charge ponctuelle verticale	111
7.1. Arcs hyperstatiques	112
7.2.1. Arc circulaire à deux articulations sans tirant	112
7.2.2. Arc parabolique à deux articulations sans tirant	113

BIBLIOGRAPHIE	113
----------------------	-----

Chapitre 1

INTRODUCTION SUR L'ANALYSE DES STRUCTURES

1.1. Introduction

La Mécanique des Structures est une discipline très ancienne, qui s'est développée pour répondre à des besoins de construction, initialement dans le domaine du Génie-Civil. Elle repose sur l'utilisation de modèles simplifiés, qui permettent l'analyse des structures de façon rapide.

Analyser une structure signifie, pour le concepteur-projeteur, en comprendre le fonctionnement, le jeu des forces, savoir justifier l'arrangement des composants, leurs formes et proportions, saisir les principes de résistance et de stabilité essentiels en liaison avec les matériaux sélectionnés. Ce cours donne une initiation à l'analyse des structures.

1.2. Définition de structure

- Au sens strict, on appelle structure un quelconque assemblage de corps capable d'être en équilibre sous l'action d'un système quelconque de forces appliquées (dans la limite de la résistance des matériaux qui la composent).
- La caractéristique essentielle d'une structure est donc celle d'être en mesure d'assurer l'équilibre, pour n'importe quel ensemble de forces appliquées: une structure ne se met pas en mouvement! (mises à part les déformations dues aux forces, déformations modestes en HPP et qui, en régime élastique, sont toujours récupérées une fois le chargement terminé).
- Cette distinction permet donc de différencier une structure d'un mécanisme qui, lui, est un assemblage conçu pour permettre le déplacement.

1.3. Définitions et hypothèses

La résistance des matériaux (RDM) est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie.

La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux qui ne peuvent être disponibles qu'à travers les résultats des travaux expérimentaux comme le témoigne l'histoire du développement de la résistance des matériaux qui constitue une combinaison fascinante de la théorie et l'expérience.

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes.

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

- **L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau:** On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.

- **L'élasticité et la linéarité du matériau:** On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.
- **La petitesse des déformations:** Les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.
- **Hypothèse des sections planes (hypothèse de Navier-Bernoulli):** Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.
- **Hypothèse de Saint Venant:** Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

L'action extérieure est caractérisée par les différents types de forces connues agissant sur une structure ou un élément de structure défini par ses caractéristiques géométriques et mécaniques. Pour une structure isostatique, les efforts internes sont déterminés directement en utilisant les équations de la statique. Par contre pour une structure hyperstatique, il est nécessaire de faire intervenir les déformations de la structure pour déterminer les réactions. L'effort interne qui agit au niveau d'une section d'un élément de structure peut-être décomposé en effort normal de traction ou de compression, moment fléchissant, moment de torsion, effort tranchant ou une combinaison de ces sollicitations. A partir de ces efforts internes, nous pouvons obtenir des informations sur la répartition des contraintes et des déformations dans la section droite. Les valeurs extrêmes de ces contraintes et déformations sont les mesures de base des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité pour vérifier ou dimensionner les éléments des structures.

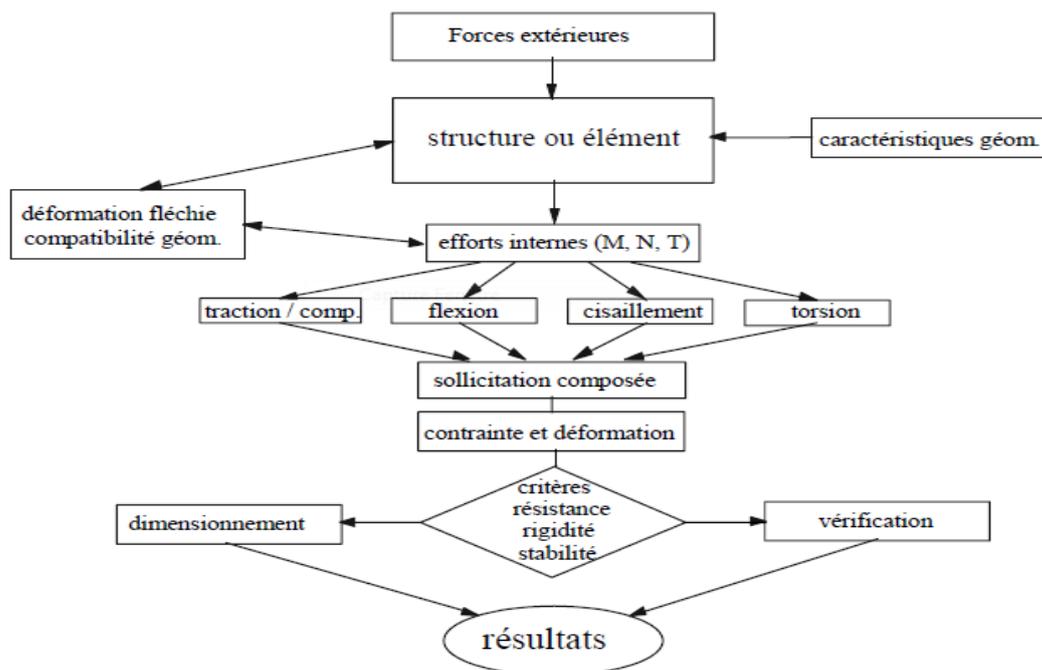


Fig. 1

La résistance des matériaux a donc pour but d'assurer qu'on utilise dans une structure donnée, une quantité minimale de matériaux, tout en satisfaisant aux exigences suivantes:

1. **Résistance** : La pièce doit supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées, (la capacité qu'a un corps de résister aux forces appliquées).
2. **Rigidité** : La pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée, (la propriété qu'a un corps à résister aux déformations).
3. **Stabilité** : La pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement).
4. **Endurance** : La pièce, si elle est soumise à un chargement répété, doit pouvoir tolérer sans rupture un certain nombre de cycles de sollicitation variable (fatigue).
5. **Résiliences** : Enfin, dans le cas où un chargement dynamique (impact) est à prévoir, la pièce doit pouvoir absorber une certaine quantité d'énergie sans s'en trouver trop endommagée.

1.4. Propriétés des matériaux

Les matériaux résistent, dans la plupart des cas, aux sollicitations auxquelles ils sont soumis car les forces extérieures qui leur sont appliquées, constituent un système en équilibre. Parmi ces forces, il ne faut noter les réactions d'appuis ainsi que les liaisons. Mais ce n'est pas tout, c'est aussi parce que ces matériaux sont doués de propriétés physiques données.

On note parmi les propriétés physiques importantes en résistance des matériaux : l'élasticité, la résistance, la rigidité, la ductilité, la malléabilité, ... Grâce à ces propriétés, les efforts internes engendrées dans les matériaux, sont capables de s'opposer à l'action des forces extérieures, où :

1. **Élasticité** : La propriété physique d'un corps à reprendre sa forme après suppression de la sollicitation (charge).
2. **Ductilité** : La capacité d'un matériau, d'une section, d'un élément ou d'une structure de subir avant rupture des déformations irréversibles sans perte significative de résistance sous sollicitations alternées.
3. **Malléabilité** : La propriété d'un corps de pouvoir être réduit en feuilles minces. Un corps ductile est généralement malléable. Un corps qui n'est pas ductile, ni malléable est un corps dit cassant.

1.5. Classification géométrique des structures

Les structures peuvent être classifiées selon la géométrie des corps qui les composent. La classification suivante prend en compte cet aspect mais aussi d'autres particularités, liées par exemple aux types de lien entre les corps constituant la structure. D'autres classifications des structures sont possibles, une exclusivement mécanique, qui sera présentée ci-après et qui permettra de mieux comprendre la différence entre mécanisme et structure, une autre typiquement technologique, sur la base du type de matériau utilisé.

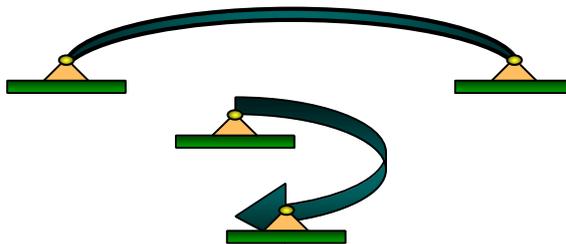
- Poutre: on appelle poutre un corps qui a la caractéristique essentielle d'avoir une dimension nettement plus grande que les deux autres. Une poutre est donc une structure linéaire, qui peut

être identifiée avec son axe: c'est un corps monodimensionnel. Il existe plusieurs types de poutres:

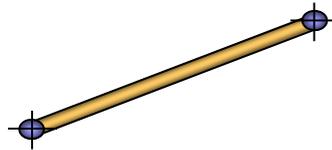
- Poutre droite: c'est une poutre à axe rectiligne; la section transversale peut être constante ou non;



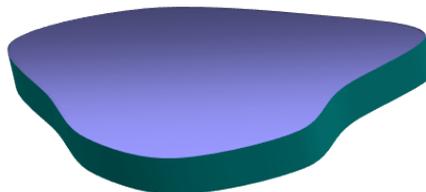
- poutre courbe: c'est une poutre à axe courbe; encore, la section peut être constante ou non; appartiennent à cette catégorie les arcs, mais aussi des poutres qui ont pour axe une courbe tridimensionnelle, comme p.ex. certains escaliers en colimaçon;



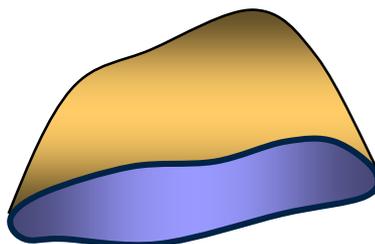
- barre: c'est une poutre droite, normalement à section constante, qui a la particularité d'avoir des rotules aux extrémités.



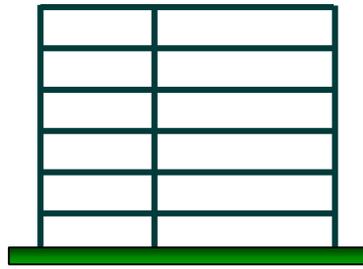
- Plaque: on appelle plaque un corps plan qui a une dimension, l'épaisseur, beaucoup plus petite que les deux autres. Une plaque est donc une structure plane qui peut être identifiée avec son plan moyen; c'est un corps bidimensionnel. Normalement, les plaques ont une épaisseur constante.



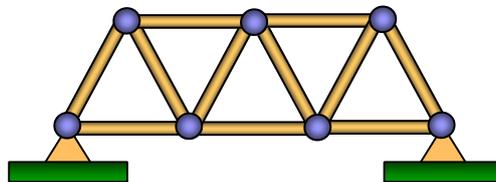
- Coque: on appelle coque un corps qui, comme une plaque, a une dimension, l'épaisseur, beaucoup plus petite que les deux autres, mais qui n'est pas plane.



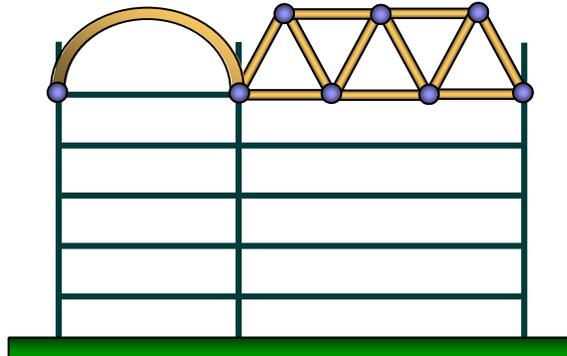
- Charpente: c'est une structure formée par un assemblage de poutres; le plus souvent, il s'agit de structures planes formées par des poutres droites.



- Treillis: ce sont des structures formées par des barres; tous les joints sont donc des rotules. Même dans ce cas il s'agit souvent de structures planes.



- Évidemment, des structures plus complexes peuvent être formées en combinant plusieurs types structuraux dans la même structure.



1.6. Réaction d'appui (types de liaisons)

Les appuis sont destinés à bloquer les déplacements d'une structure. Dans le plan, trois possibilités de déplacements sont possibles ; deux translations suivant les deux axes X et Y et la rotation autour de l'axe Z ; donc trois degrés de libertés (d.d.l.).

Les appuis peuvent être :

1.6.1. Appui simple

Ce type d'appui illustré par la Fig. 1.2, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui est dans la direction de la droite de contact, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.

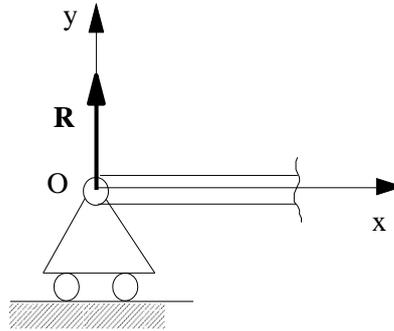


Fig. 1.2

1.6.2. Appui double (articulation)

Illustré par une rotule (Fig. 1.3) cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation.

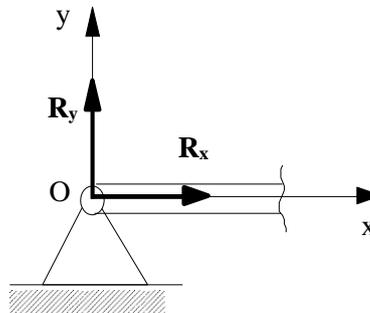


Fig. 1.3

1.6.3. Encastrement

L'encastrement schématisé sur la Fig. 1.4 interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section. En vertu du principe de Saint Venant, ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R , et leur moment M rapportés au centre de gravité G . Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

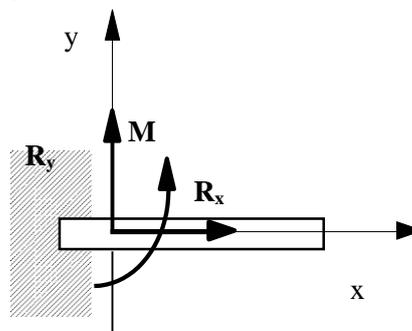


Fig. 1.4

1.7. Conditions d'équilibre

• Systèmes dans le plan

Puisque l'ensemble des forces peut être remplacé par une résultante unique ou dans certain cas par deux forces formant un couple M , donc pour qu'un système soit en équilibre dans le plan (OXY) on doit avoir :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{et} \quad \sum M_{F/O} = 0$$

• Systèmes spatiaux

Un solide est en équilibre si le système des forces qui lui sont appliquées est équivalent à zéro. Donc un solide dans l'espace pour qu'il soit en équilibre les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \text{et} \quad \sum M_z = 0$$

M_x , M_y et M_z sont les moments de toutes les forces par rapport aux axes X, Y, Z respectivement.

1.8. Résolution d'un problème de statique

La résolution d'un problème de statique consiste à déterminer toutes les actions extérieures au système de solides isolé, notamment les composantes des torseurs mécaniques de liaison.

Il est possible d'écrire les trois équations (vus précédemment) du principe fondamental de statique pour chaque solide isolé, on dispose donc de $3n$ équations pour un système comportant n solides.

Les équations du principe fondamental de statique permettront de déterminer les actions de liaison à condition que le nombre total d'inconnues ne soit pas supérieur à $3n$.

Il existe trois cas :

- **Système hypostatique** : si le nombre total d'inconnues de liaison i est inférieur au nombre d'équations de la statique $3n$. Le système est un mécanisme.
- **Système isostatique** : le nombre d'inconnue de liaison i est égal au nombre d'équations de la statique $3n$. On dispose alors d'autant d'équations que d'inconnues et il est possible de déterminer toutes les inconnues de liaison.
- **Système hyperstatique** : le nombre d'inconnue de liaison i est supérieur au nombre d'équations de la statique $3n$. il est donc impossible de déterminer les inconnues de liaison en utilisant uniquement les équations de la statique. Il faut alors avoir recours à des principes énergétiques afin d'obtenir $(i - 3n)$ équations manquantes.

1.9. Efforts internes

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent-être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi les réactions d'appuis. Sous l'effet de ces

charges, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces efforts internes.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle, on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation (Fig.1.5). Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force F (N , T_z , T_y) et le vecteur moment M (M_x , M_y , M_z) résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.

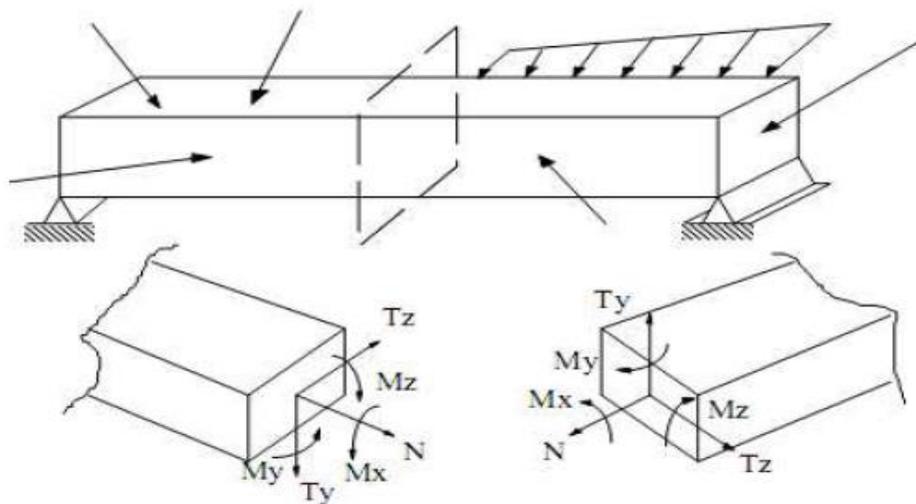


Fig.1.5

1.9.1. Effort normal

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positive s'il s'agit d'une traction et négative dans le cas contraire.

1.9.2. Efforts tranchants

Les forces transversales T_z , et T_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y . Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la Fig. 1.6.

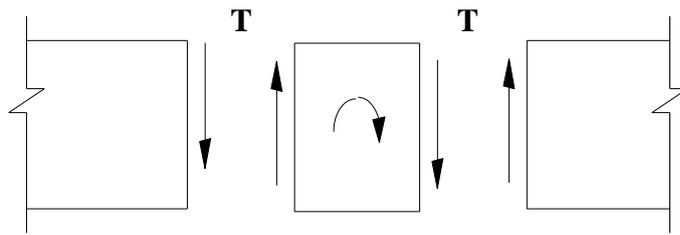


Fig.1.6

1.9.3. Moments fléchissants

Les composantes M_y , et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. La Fig. 1.7 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

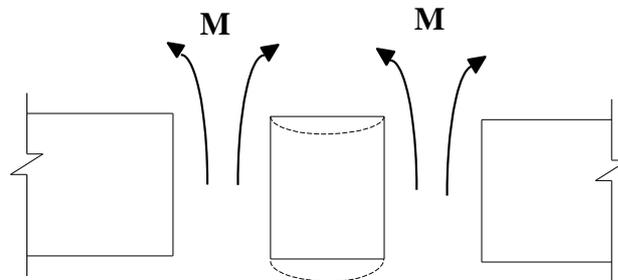


Fig. 1.7

1.9.4. Moment de torsion

Le moment de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X. Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure (Fig. 1.8)

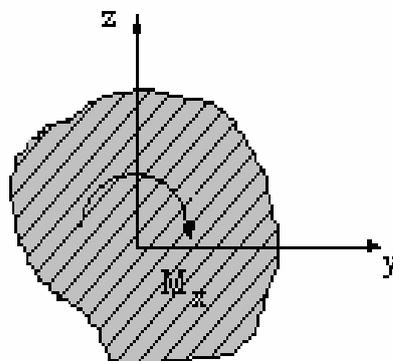


Fig. 1.8

1.10. Méthode des sections

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode des sections. Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures (Fig.1.9). Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N , T et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

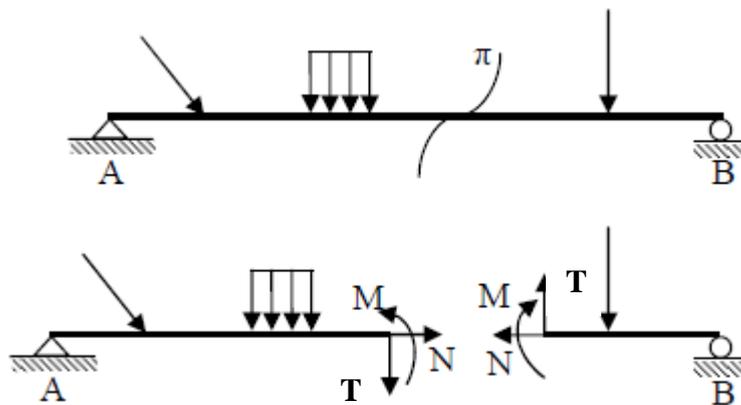


Fig.1.9

Chapitre 2

DÉFORMÉE DES POUTRES

2.1. Généralités

2.1.1. But de l'étude

Lorsque les structures reçoivent des charges, elles se déforment. Il est nécessaire de limiter leurs déplacements pour des raisons d'exploitation des constructions. En effet, un changement de position trop important peut engendrer, entre autre, des contrepenes, des fissurations dans certains éléments (cloisons), des vibrations sous les charges variables telles que le vent . . .

Le présent chapitre à donc pour but de quantifier les déformées des structures.

2.1.2. Rappels mathématiques

Dans cette partie de cours, nous aurons besoins de maîtriser les intégrales. Les fonctions étudiées sont généralement assimilées à des polynômes. L'intégration d'une fonction polynomiale du type x^n est :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$

2.1.3. Définitions

a. Déformée

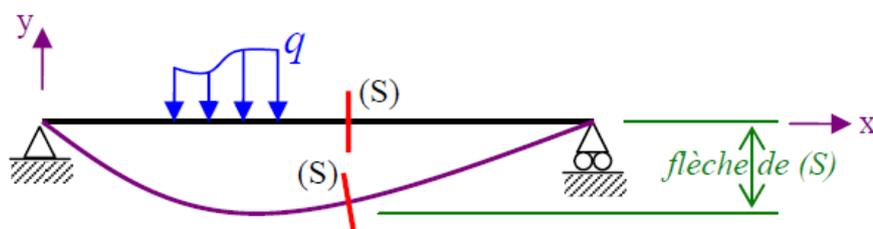
La déformée d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (si l'intensité, le type de chargement... change, la déformée changera).

Remarque

Il est très important de ne pas confondre "déformée" et "déformations". En effet, la déformation est un allongement par unité de longueur, alors qu'une déformée est la combinaison entre une translation en (m) et une rotation en (rad).

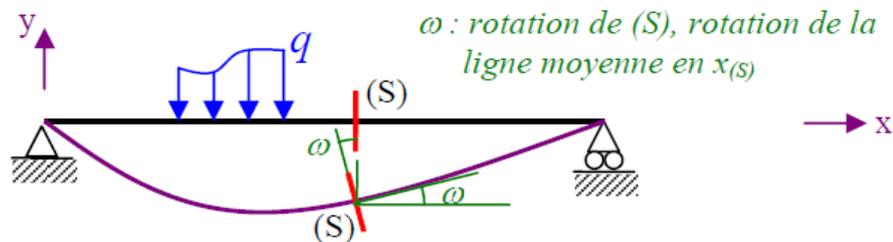
b. Flèche

Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle "flèche".



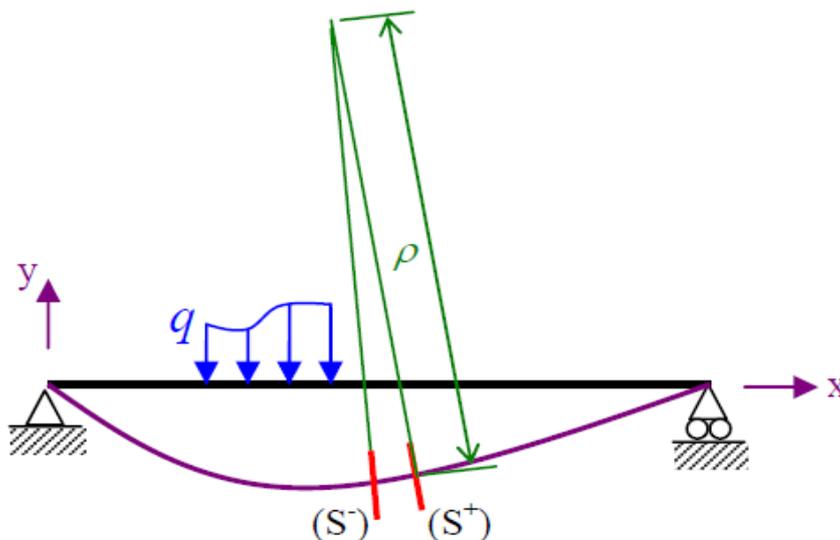
c. Rotation

Certaines sections subissent une rotation. Cette rotation est naturellement la même que celle de la ligne moyenne:



d. Rayon de courbure

Considérons deux sections $(S+)$ et $(S-)$ infiniment proches. Une fois la structure déformée, les axes de ces sections se croisent à une distance ρ de la ligne moyenne. Cette distance s'appelle "rayon de courbure".



2.2. Hypothèses

De nombreuses hypothèses doivent être posées:

- les structures sont composées de poutres (c.f. théorie des poutres);
- les charges sont appliquées de manière très lente et progressive;
- les déplacements et rotations sont petits;
- la structure reste dans le domaine élastique;
- les appuis et liaisons internes sont parfaits;
- nous négligerons les effets dus à l'effort normal et à l'effort tranchant;
- nous nous limiterons à l'étude des poutres homogènes (un seul matériau).

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

2.3. Notations

Nous poserons:

- la longueur d'un tronçon infiniment petit de la poutre dx ;
- l'équation de la rotation en fonction de l'abscisse de la section $\omega(x)$;
- l'équation de la flèche $f(x)$;
- le rayon de courbure $\rho(x)$;
- la rigidité de la poutre $EI_{GZ}(x)$ (si celle-ci est variable) et EI_{GZ} (si elle est constante);

2.4. Etude de la déformée

2.4.1. Relation entre la flèche et la rotation

Prenons un tronçon dx infiniment petit de la poutre :

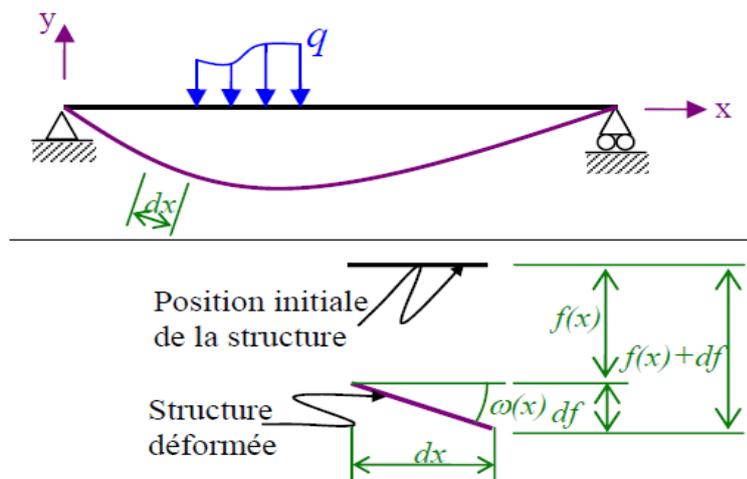
La variation de la flèche vaut df

La déformée de cet élément peut être assimilée à un segment droit :

Nous démontrons donc que :

$$\tan(\omega(x)) = \frac{df}{dx} \approx \omega(x)$$

$$\omega(x) = f'(x)$$



Remarque

La rotation ω peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment petite.

2.4.2. Relation entre la rotation et le rayon de courbure

Soient deux sections infiniment proches dont la variation d'abscisse vaut dx .

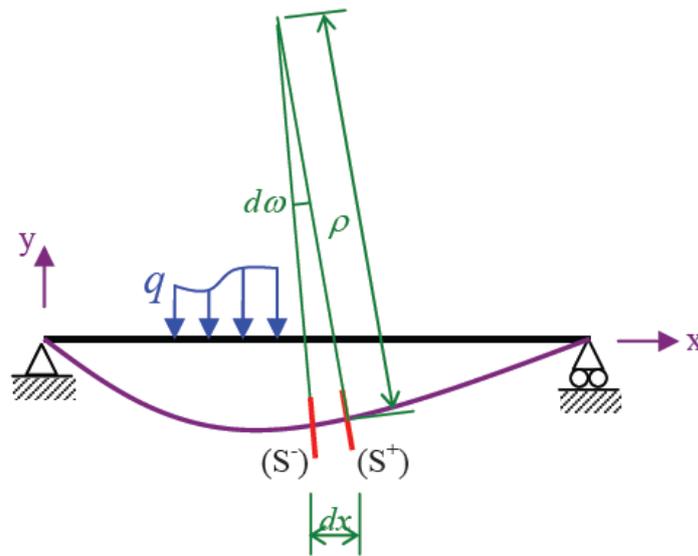
La variation de la rotation de la section en x à la section en $x+dx$ vaut $d\omega$.

On démontre donc que :

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} \approx d\omega$$

$$\text{donc } \rho = \frac{dx}{d\omega}$$

$$\frac{1}{\rho} = \omega'(x)$$

**Remarque**

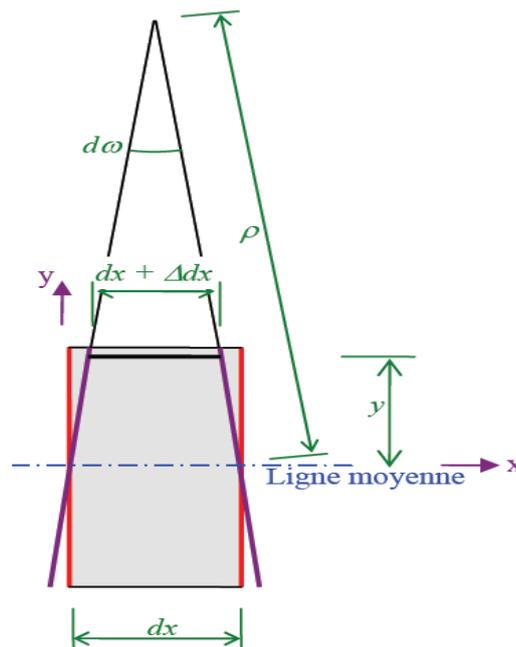
La rotation $d\omega$ peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment faible.

2.4.3. Relation entre le moment et le rayon de courbure

Soit un tronçon dx infiniment petit de la poutre:

Considérons une fibre à l'ordonnée y .

Sous l'action du moment de flexion, cette fibre de longueur initiale dx s'allonge d'une valeur de Δdx .

**Remarque**

Dans le schéma de droite, la valeur de Δdx est négative.

Nous savons que :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \text{ (c.f. contraintes).}$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x(y)}{E} = -\frac{1}{E} \times \frac{M_z(x)}{I_{GZ}(x)} y$$

Dans le schéma de droite :

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{\rho - y}$$

$$\frac{\rho - y}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{dx} \quad 1 - \frac{y}{\rho} = 1 + \frac{\Delta dx}{dx}$$

Donc :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

Au final :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} y$$

2.4.4. Relation entre la flèche et le moment

En combinant les différentes relations démontrées :

$$\omega(x) = f'(x) \qquad \frac{1}{\rho} = \omega'(x) \qquad \frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z}{EI_{GZ}} y$$

On montre que :

$$f''(x) = \omega'(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$$

En conclusion :

$$f(x) = \iint \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx^2$$

$$\omega(x) = f'(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx$$

2.4.5. Conditions limites

En intégrant deux fois l'expression $\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$, des constantes d'intégration apparaissent.

Afin de déterminer leurs valeurs, il est nécessaire de connaître la flèche ou la rotation en certains points particuliers.

Remarque :

Le nombre de constantes d'intégration est égal à 2 x le nombre de tronçons.

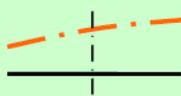
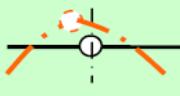
a) **Conditions aux appuis :** Nous savons que les appuis bloquent des mouvements :

<i>Appui – liaison externe</i>		
<i>encastrement</i>	<i>articulation</i>	<i>appui simple</i>
		
$\omega = 0$ $f = 0$	$f = 0$	$f = 0$

Nous allons donc appliquer les équations au niveau des appuis et ainsi déterminer certaines constantes d'intégration.

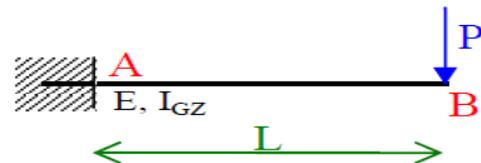
b) Conditions de continuité:

Le reste des constantes d'intégration peut être résolu à l'aide des conditions de continuité. En effet, lorsque l'équation du moment change, 2 nouvelles constantes d'intégration apparaissent. On regardera ainsi s'il y a continuité de la flèche et de la rotation au droit de ce changement d'équation:

<i>Liaison interne</i>	
<i>encastrement</i>	<i>relâchement</i>
	
$\omega_{relative} = 0$ - continuité de la rotation $f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche	$f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche

Exemple:

Soit la poutre suivante à rigidité constante :



a) Nature (décomposition minimale)

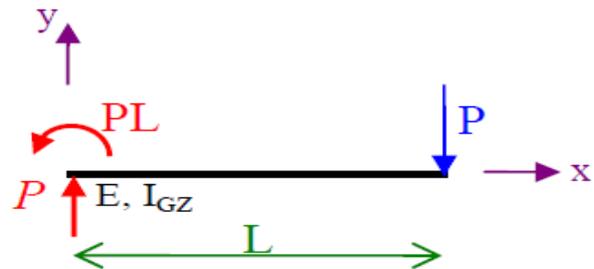
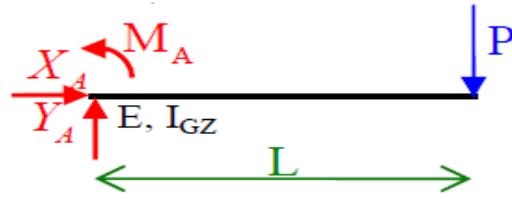
$$\left. \begin{matrix} x = 3 \\ e = 3 \end{matrix} \right\} \text{structure isostatique}$$

b) Inconnues de liaison

$$\sum F_x = 0 = X_A$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - P$$

$$\sum M_{A/z} = 0 = -PL + M_A$$

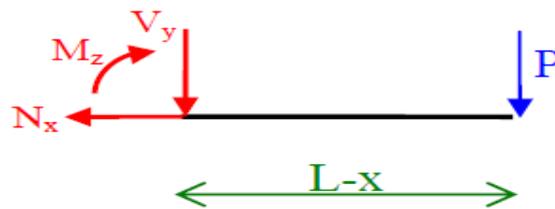


c) Sollicitation

$$N_x(x) = 0$$

$$V_y(x) = -P$$

$$M_z(x) = -P(L-x) = -PL + Px$$



d) Déformée

d.1) Allure de la déformée



d.2) Intégrations

$$M_z(x) = -P(L-x) = -PL + Px$$

$$\omega(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}} dx = \int \frac{(-PL + Px)}{EI_{GZ}} dx = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right)$$

$$f(x) = \int \omega(x) dx = \int \left[\frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 + Ax + B \right)$$

d.3) Conditions limites

- Conditions à l'appui A

Encastrement en $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

d.4) Constantes d'intégration

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}\omega(0) = 0 = +\frac{P}{2} \times 0^2 - PL \times 0 + A \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}f(0) = 0 = \frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 + B \rightarrow B = 0$$

d.5) Equations

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 \right)$$

d.6) Flèche maximale

- Rotation nulle

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right) = 0 \quad \rightarrow EI_{GZ}\omega(x) = 0 = \frac{P}{2} x^2 - PLx$$

$$Px \left(\frac{1}{2} x - L \right) = 0$$

Solutions : $x = 0$, $x = 2L$

Nous ne pouvons retenir que $x = 0$, ce qui donne

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

- Extrémité de tronçon

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

$$f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} L^3 - \frac{PL}{2} L^2 \right) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

On en conclue que pour cette poutre

$$f_{max} = f(L) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

2.5. Théorie du potentiel interne (méthodes énergétiques)

2.5.1. Hypothèses

Lorsque des forces sont appliquées à une structure, elles effectuent un travail pour :

- déformer la structure,
- produire de l'énergie cinétique,
- vaincre les résistances de frottement (dissipation en chaleur).

Nous nous placerons dans des conditions telles que l'énergie cinétique et celle dissipée en chaleur soient nulles. Il faut pour cela supposer :

- 1°- que les forces sont appliquées "statiquement", c'est-à-dire sans produire d'accélération,
- 2°- que les frottements aux liaisons sont négligeables,
- 3°- que les frottements internes sont aussi négligeables, c'est-à-dire que le système est parfaitement élastique.

Nous supposerons en outre :

- 4° -que les déplacements sont petits et sans effet sur les forces extérieures,
- 5°-que le passage de l'état initial à l'état final de déformation est réversible (nous pourrons ainsi appliquer la loi de Hooke).
- 6°-qu'il ne se produit aucune variation de température.

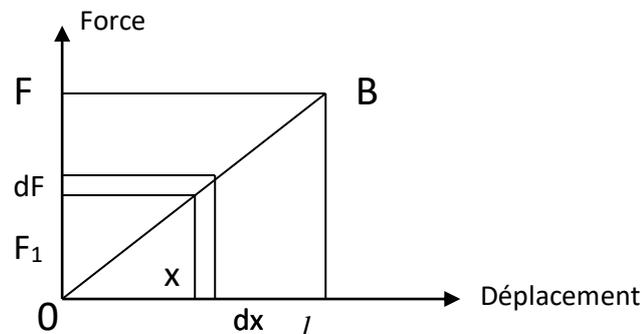
Soit une structure constituée d'une ensemble de poutres. Pour amener cette structure, par application d'un système de forces extérieures, d'un état initial naturel à un état final caractérisé par un tenseur contrainte et un tenseur déformation, il faut dépenser un travail W . Si le passage de l'état initial à l'état final se fait de façon réversible, le travail ne dépend que de l'état final (principe de thermodynamique). Ce travail est par définition le potentiel interne de la structure. C'est l'énergie potentielle emmagasinée par la structure pendant la déformation.

2.5.2. Rappels

a. Travail d'une force constante

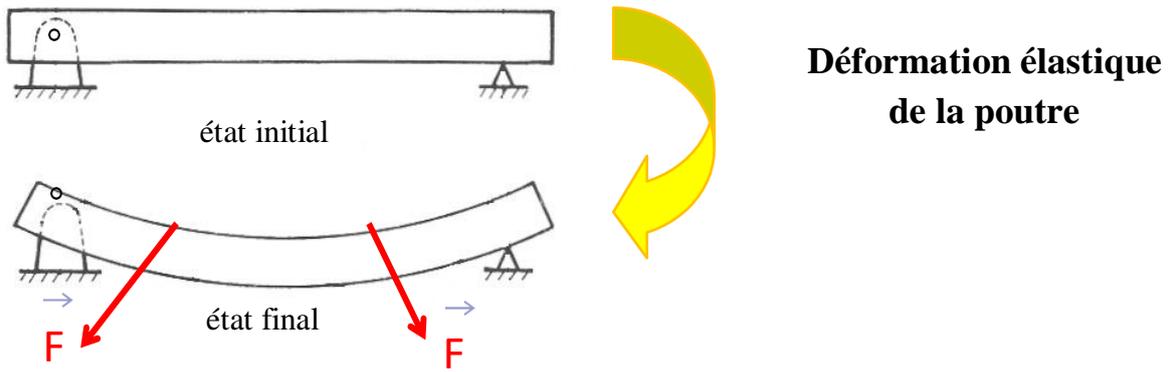
$W = F \cdot \text{déplacement projeté sur sa direction}$. Unité : Nm (comme un moment)

b. Travail d'une force qui varie de O à F pour un déplacement l:



Calculons le travail pour un accroissement dF à partir d'une valeur intermédiaire F_1 : le déplacement est dx et le travail $dW = F_1 dx$, il se mesure par l'aire hachurée.

Calculons le travail total de O à F : $W = \frac{1}{2} Fl$: mesure de l'aire du triangle OAB.



$$\boxed{\text{Théorème de l'énergie cinétique}} \rightarrow \boxed{\text{Travail des forces extérieures } W_{\text{ext}}} + \boxed{\text{Travail des forces intérieures } W_{\text{int}}} = 0$$

$$\boxed{\text{Énergie de déformation : } W_d = -W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}}$$

2.5.3. Expression du potentiel interne en fonction de sollicitations internes

On peut donc calculer le potentiel interne d'une poutre en déterminant les déplacements par les équations de Bresse. On peut procéder plus simplement dans le cas d'une poutre droite.

a. Effort normal N(x)

$$W = 1/2 N \Delta \ell$$

Considérons un tronçon dx :

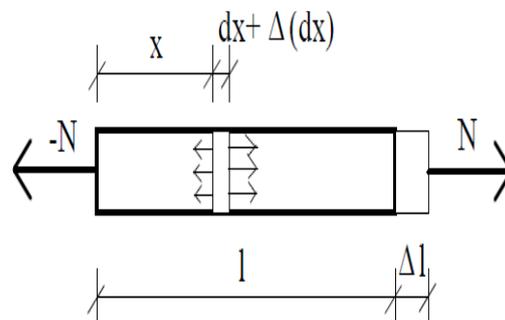
$$dW = 1/2 N \Delta d(x)$$

$$\Delta d(x) = N dx / ES \quad (\text{la loi de Hooke})$$

$$dW = 1/2 N^2 dx / ES$$

et pour la poutre entière :

$$W_N = 1/2 \int_0^l \frac{N^2}{ES} dx$$



b. Moment de flexion $M(x)$

On a de même pour un tronçon dx :

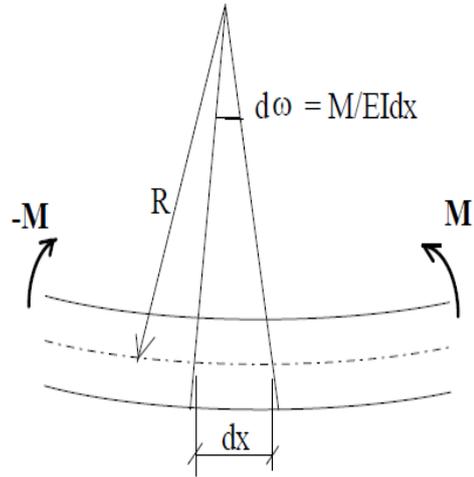
$$dW = \frac{1}{2} M d\omega$$

$$d\omega/dx = M/EI$$

$$dW = \frac{1}{2} M^2 dx/EI$$

et pour la poutre entière

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

**c. Effort tranchant $T(x)$**

$$dW = \frac{1}{2} T \lambda dx$$

avec : $\lambda = T/GS_r$

λ : Déformation

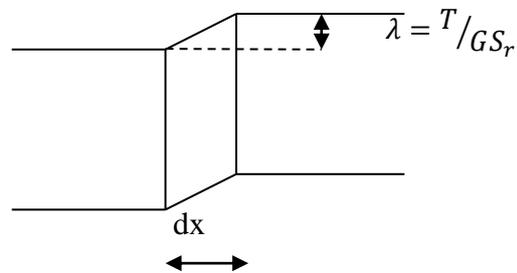
S_r : Section réduite

G : Module d'élasticité transversale

$$dW = \frac{1}{2} T^2 dx/GS_r$$

et pour la poutre entière

$$W_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GS_r} dx$$



Déformation dû à l'effort tranchant

d. Moment de Torsion M_t

L'énergie emmagasinée dans le tronçon dx se calcule comme le travail effectué par M_t lors du déplacement $d\varphi_t$:

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_p} dx$$

Où I_p : moment quadratique polaire

et pour l'ensemble de la poutre

$$W_T = \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx$$

q : coefficient de torsion est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section ($q = 40 I_p/A^4$), A : surface de section. Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

d. Cas général

Si toutes ces actions sont appliquées ensemble on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_r} + \frac{M^2_t}{GI_0} \right) dx$$

N, M et T sont en général des fonctions de x.

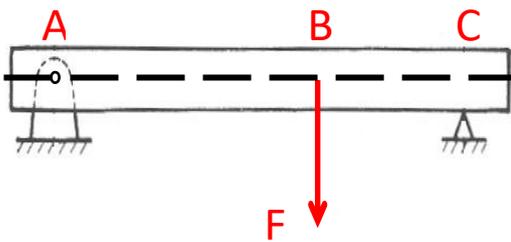
Remarque

Dans le cas d'une poutre en flexion simple on néglige en général les déformations dues à T, on a donc :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

2.5.4. Théorème de Castigliano**a. Première forme du théorème**

Théorème : Dans un système élastique à appuis indéformables, la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces agissant sur le système est égale à la projection sur la direction de cette force du déplacement élastique de son point d'application.



$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i$$

b. Deuxième forme du théorème**Théorème**

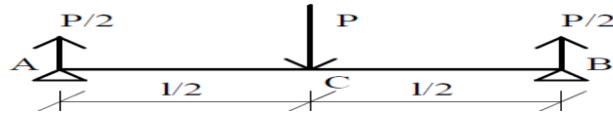
La dérivée de l'énergie de déformation, exprimée en fonction des déplacements des points sur les quels agissent des forces extérieures, par rapport à un de ces déplacements, est égale à la force correspondante, calculée suivant la direction du déplacement.

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = F_i$$

c. Applications**c.1. Calcul de flèche sous charge concentrée****Remarque**

pour calculer $v = \frac{\delta W}{\delta P}$ avec $W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$

Il est en général plus facile de calculer $\frac{\delta W}{\delta P} = \int M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta P} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

Compte tenu de la symétrie, calculons :

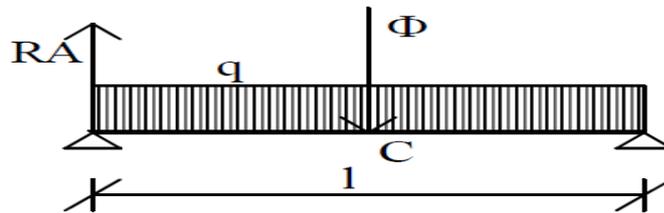
$$W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{et} \quad v_C = 2 \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$$

avec EI constant, $M = Px/2$ et $\delta M / \delta P = x/2$ on obtient :

$$v_C = \frac{Pl^3}{48EI}$$

c.2. Calcul de flèche sous charge répartie

On peut aussi calculer le déplacement d'un point où n'agit aucune force en appliquant une force fictive Φ . On calcule l'énergie potentielle avec cette force, puis sa dérivée partielle et on fait tendre Φ vers 0. Cette méthode est pratique pour calculer les flèches sous charges réparties:



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta \phi} \quad \text{et} \quad W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{en utilisant la symétrie}$$

$$M(x) = R_A x - q x^2 / 2 \quad \text{et} \quad R_A = \Phi / 2 + q l^2 / 2$$

$$\frac{\delta M}{\delta \phi} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad v_C = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta \phi} dx \quad \text{on obtient :}$$

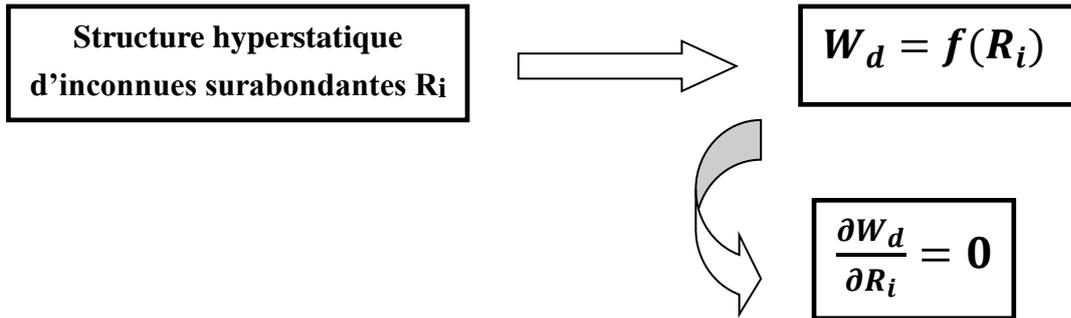
$$v_C = \frac{5ql^4}{384EI}$$

2.5.5. Théorème de Ménabréa

a. Théorème

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à chacune des inconnues surabondantes est nulle, à condition que les points d'application des forces ne bougent pas ($U_i=0$) ou que les sections ne tournent pas ($\theta_i = 0$).

$$\frac{\partial W_d}{\partial R_i} = 0$$



Il y a autant d'équations que d'inconnues hyperstatiques.

Hyperstatique	Isostatique associé	Inconnue hyperstatique	condition cinématique	Ménabréa
		C	$\omega_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial C} = 0$
		F	$u_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial F} = 0$
		N	$u_A^+ = u_A^-$	$\frac{\partial W}{\partial N} = 0$

b. Application

Poutre encadrée-appuyée

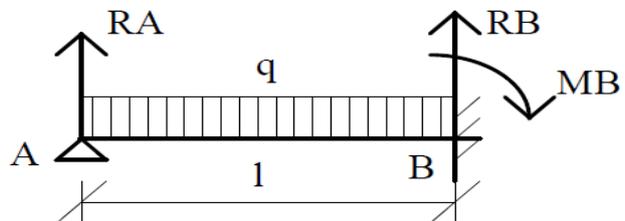
Calculons R_A avec Ménabréa : $\frac{\delta W}{\delta R_A} = 0$

$$M(x) = R_A x - qx^2/2, \quad \frac{\delta M}{\delta R_A} = x$$

$$\frac{\delta W}{\delta R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\delta M}{\delta R_A} dx = 0$$

On obtient :

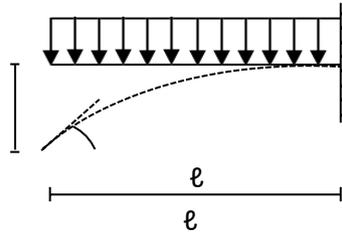
$$R_A = \frac{3ql}{8}$$



2.6. Exercices

Exercice 1

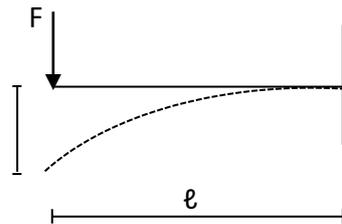
Déterminer la rotation de l'extrémité libre ainsi que la flèche d'une console soumise à une charge uniformément répartie q .



$$\theta = \frac{ql^3}{6EI}, \quad f = \frac{ql^4}{8EI}$$

Exercice 2

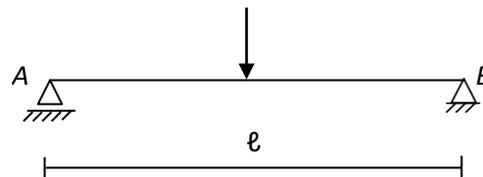
Soit une poutre homogène de section constante chargée par une force concentrée F à son extrémité libre. Calculer la flèche maximale du système ainsi que la rotation maximale.



$$\theta = \frac{Fl^2}{2EI}, \quad f = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Exercice 3

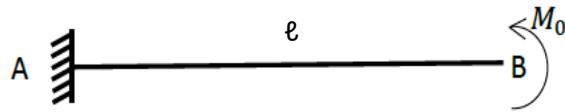
Déterminer les rotations θ_A et θ_B aux appuis et la flèche maximale d'une poutre homogène, de section constante et de longueur « l » simplement appuyée et chargée dans son milieu.



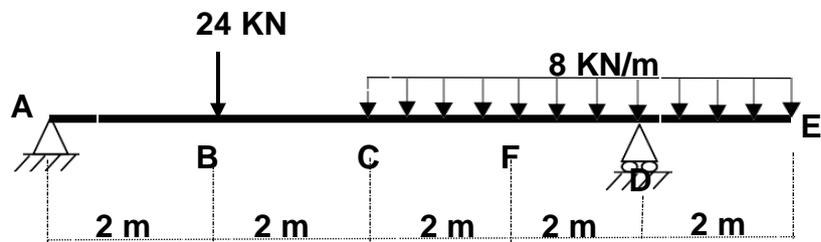
$$\theta = \frac{Fl^2}{16EI}$$

Exercice 4

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à un couple M_0 .

**Exercice 5**

Pour la poutre ABCDE, déterminer la flèche V_C au point C, et la flèche V_E au point E de la poutre illustrée à la Figure 2.

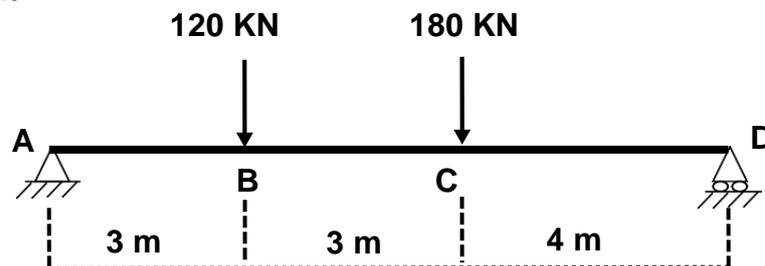


EI constant, avec $E=31000 \text{ MPa}$, et $A = (b=30) \times (h=40) \text{ cm}^2$

Exercice 6

Calculer la flèche du point C par le théorème de Castigliano pour la poutre suivante à rigidité constante.

$$EI = 1.72 \times 10^5 \text{ kN.m}^2$$



Chapitre 3

MÉTHODE DES FORCES

3.1. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

3.2. Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.

Pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base (Exemple, Figure 3.1).

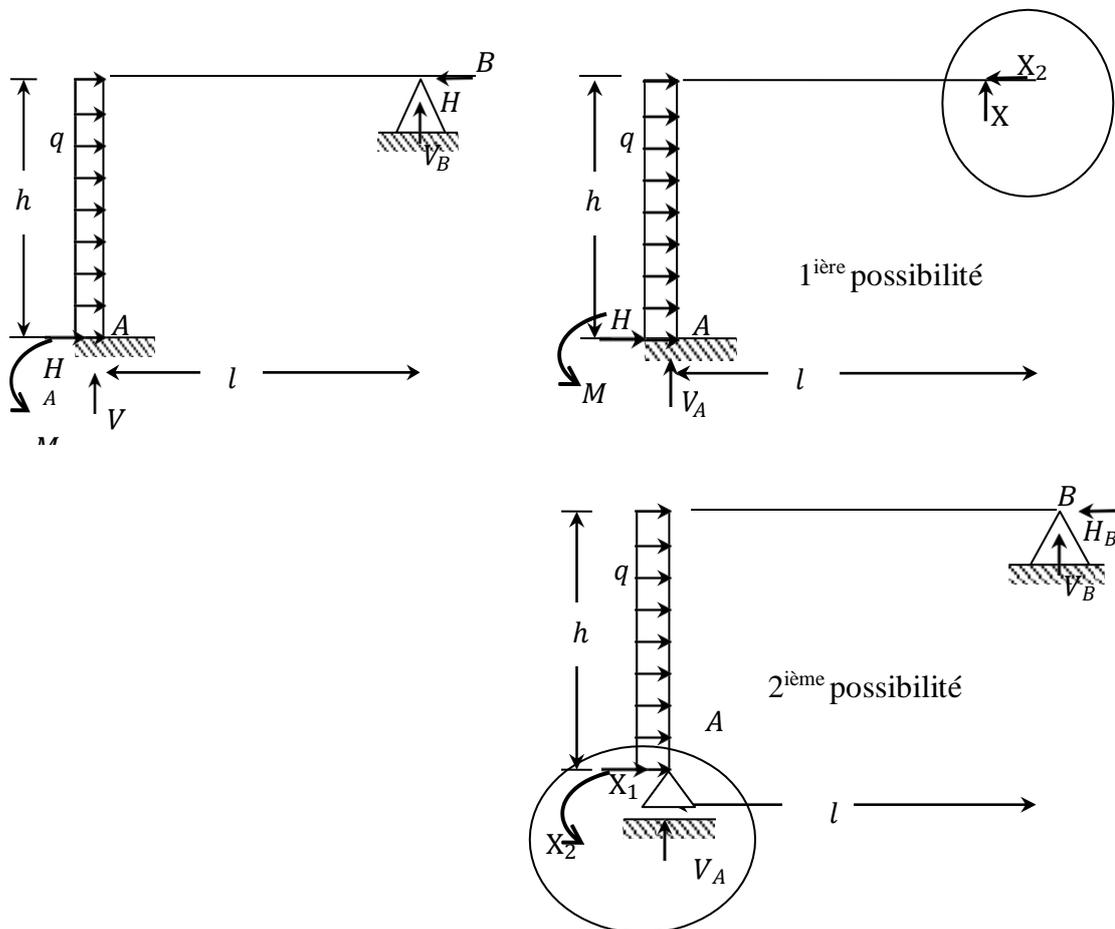


Figure 3.1. La structure initiale est transformée en une structure isostatique équivalente soumise aux charges extérieures et aux réactions choisies (les inconnues X_1 et X_2).

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par:

- Système de base,
- Système fondamental,
- Système principal.

La structure isostatique équivalente est soumise à deux catégories de forces:

- Forces extérieures de départ (les charges réparties, concentrées,...).
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

3.3. Degré d'hyperstaticité

Le degré d'hyperstaticité d représente le nombre d'équations supplémentaires qu'il faut pour calculer toutes les réactions du système.

On peut calculer d à l'aide de la formule des contours:

$$d=3c- a- 2s \quad (3.1)$$

3.4. Système de base

Le système de base est le système isostatique obtenu par suppression des liaisons sur abondantes dont les actions sont remplacées par des forces inconnues. D'une façon générale, pour une structure hyperstatique donnée, on peut choisir plusieurs systèmes isostatiques de base.

3.5. Différentes possibilités des systèmes de base

Différentes possibilités de systèmes de bases d'une même structure plane hyperstatique (Figure 3.2) sont présentées.

$$d=3c- 1a- 2s=3.2- 1.2- 2.0=4$$

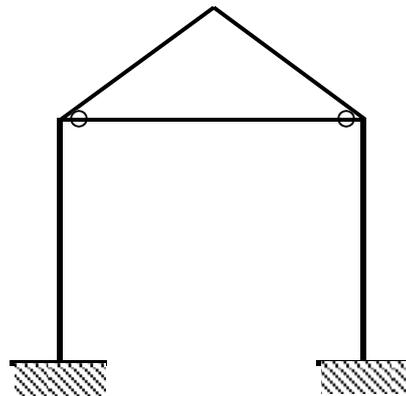


Figure 3.2. Exemple de structure hyperstatique

1^{ère} possibilité

- En effet, on peut rendre isostatique la structure de la Figure suivante en libérant totalement l'encastrement au pied du poteau gauche et en sectionnant le tirant (élément entre les 2 rotules) ; les inconnues hyperstatiques sont alors: le moment d'encastrement X_1 , les réactions respectivement verticale X_2 et horizontale x_3 au pied du poteau gauche et l'effort normal X_4 dans le tirant.

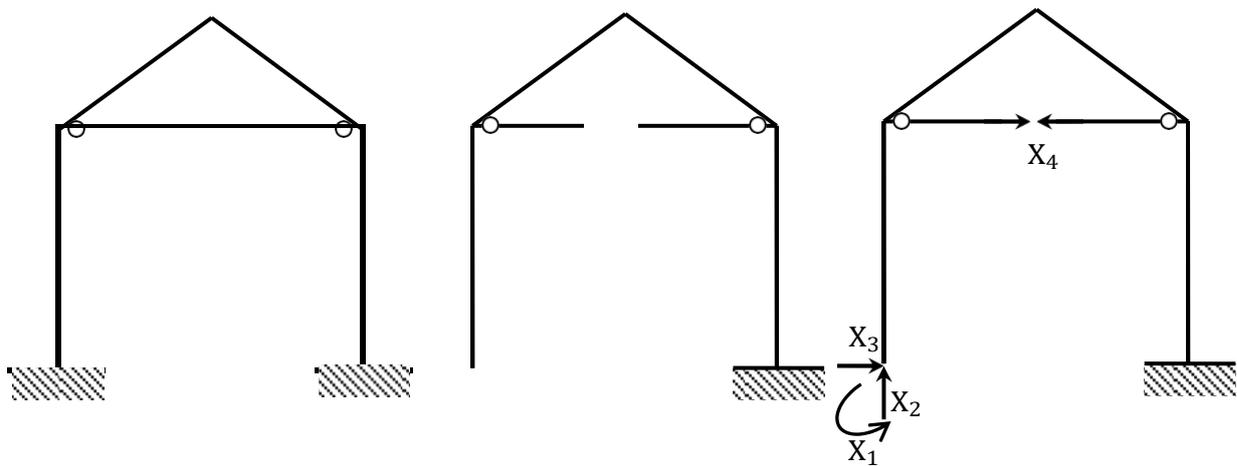


Figure 3.2.a. Type poutre sur appuis simple

2^{ème} possibilité

- Une deuxième manière est de libérer la rotation et la translation horizontale au niveau de l'encastrement gauche (X_1 (moment) et X_3 (réaction)), aussi de libérer la rotation au niveau de l'encastrement de droite X_2 (moment) et enfin de sectionner le tirant pour faire apparaître l'inconnu X_4 (l'effort normal).

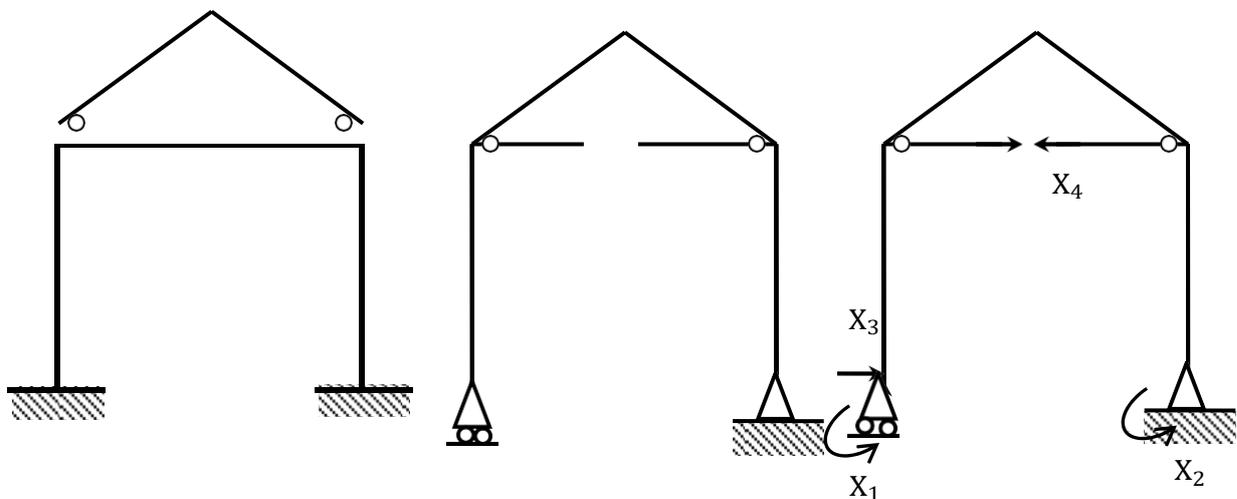


Figure 3.2.b. Type poutre cantilever

3^{ème} possibilité

- On pourrait aussi choisir les inconnues X_1 , X_2 et X_3 respectivement le moment interne, l'effort normal et l'effort tranchant de l'élément indiqué sur la figure ci-dessous et toujours en gardant X_4 comme inconnu (l'effort normal de tirant) (Figure 3.2.c).

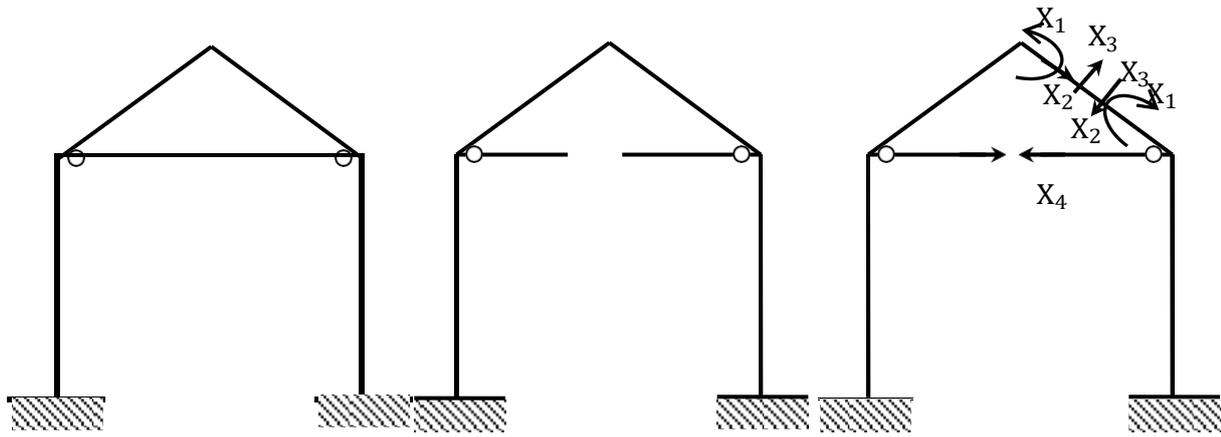
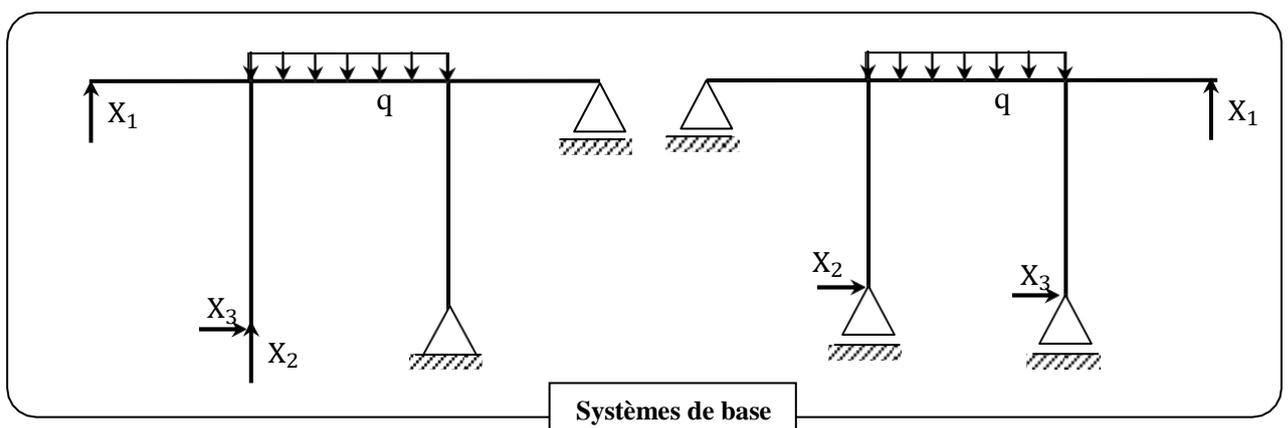
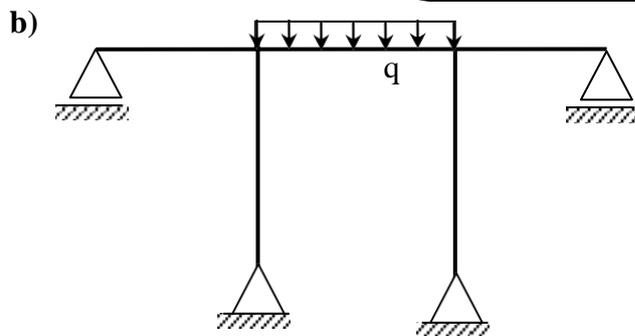
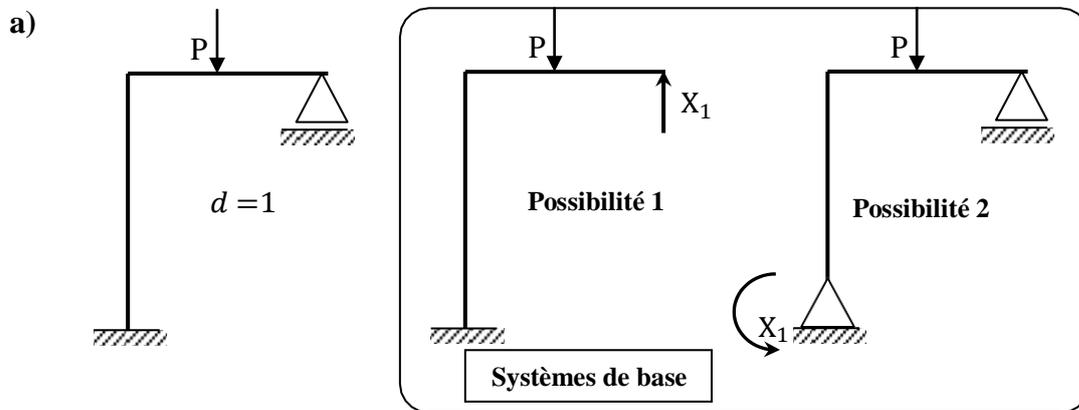


Figure 3.2.c. Type double poutre cantilever

3.6. Exemples

Calculer le degré d'hyperstaticité et représenter les différents systèmes de base.



$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_j m_i dx \\ \delta_{i0} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0 m_i dx \\ \delta_{ii} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_i m_i dx \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Notant que les expressions des moments m_i et m_j sont toujours linaires sauf pour les expressions de M_0 . Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité δ_{ij} à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de Veretchaguine.

Les tableaux présentés ci-dessous, qui s'appellent tableaux des intégrales de Mohr, permettent d'évaluer ces intégrales pour certains cas de charges extérieures.

Tableau 3.1 : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque: Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{1}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE				
	M.m	$1/2 M(mg+md)$	$1/2 M(mg+md)$	0
	$1/2 m(Mg+Md)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6 mg(Mg-Md)$
	$1/2 m(Mg+Md)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6 mg(Mg-Md)$
	0	$1/6 Mg(mg-md)$	$1/6 Mg(mg-md)$	$1/3 Mgmg$
	$1/2 Mgm$	$1/6 Mg(2mg+md)$	$1/6 Mg(2mg+md)$	$1/6 Mgmg$
	$1/2 Mdm$	$1/6 Md(mg+2md)$	$1/6 Md(mg+2md)$	$-1/6 Mdmg$
	$1/2 Mm$	$1/6 M[mg(1+\beta)+md(1+\alpha)]$	$1/6 M[mg(1+\beta)+md(1+\alpha)]$	$1/6 Mmg(1-2\alpha)$
	$1/2 Mm$	$1/4 M(mg+md)$	$1/4 M(mg+md)$	0
	$1/3 Mgm$	$1/12 Mg(3mg+md)$	$1/12 Mg(3mg+md)$	$1/6 Mgmg$
	$1/3 Mdm$	$1/12 Md(mg+3md)$	$1/12 Md(mg+3md)$	$1/6 Mdmd$
	$2/3 Mm$	$1/3 M(mg+md)$	$1/3 M(mg+md)$	0
	$2/3 Mgm$	$1/12 Mg(5mg+3md)$		$1/6 Mgmg$
	$2/3 Mdm$	$1/12 Md(3mg+5md)$		$-1/6 Mdmg$

Tableau 3.1 (suite) : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque: Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{1}{EI}$

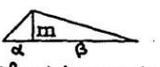
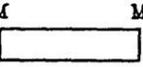
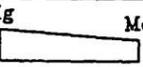
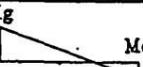
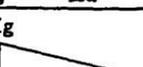
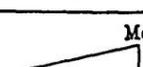
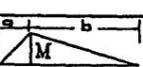
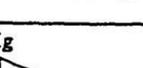
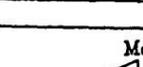
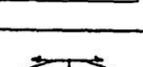
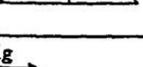
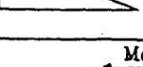
Introduire M et m avec leur SIGNE			 α et β sont des rapports	
	$1/2 Mmg$	$1/2 Mmd$	$1/2 Mm$	$1/2 Mm$
	$1/6 mg(2Mg+Md)$	$1/6 md(Mg+2Md)$	$1/6 m[Mg(1+\beta) + Md((1+\alpha))]$	$1/4 m(Mg+Md)$
	$1/6 mg(2Mg+Md)$	$1/6 md(Mg+2Md)$	$1/6 m[Mg(1+\beta) + Md((1+\alpha))]$	$1/4 m(Mg+Md)$
 $Mg = -Md$	$1/6 Mgmg$	$-1/6 Mgmd$	$1/6 Mgm(1-2\alpha)$	0
	$1/3 Mgmg$	$1/6 Mgmd$	$1/6 Mgm(1+\beta)$	$1/4 Mgm$
	$1/6 Mdmg$	$1/3 Mdmd$	$1/6 Mdm(1+\alpha)$	$1/4 Mdm$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ α et β sont des rapports	$1/6 Mmg(1+\beta)$	$1/6 Mmd(1+\alpha)$	$1/3 Mm$	$1/12 Mm(3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$
	$1/4 Mmg$	$1/4 Mmd$	$1/12 Mm(3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$	$1/3 Mm$
	$1/4 Mgmg$	$1/12 Mdmd$	$1/12 Mdm(1+\beta+\beta^2)$	$7/48 Mgm$
	$1/12 Mdmg$	$1/4 Mdmd$	$1/12 Mdm(1+\alpha+\alpha^2)$	$7/48 Mdm$
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$5/12 Mm$
	$5/12 Mgmg$	$1/4 Mgmd$	$1/12 Mgm(5-\alpha-\alpha^3)$	$17/48 Mgm$
	$1/4 Mdm$	$5/12 Mdmd$	$1/12 Mdm(5-\beta-\beta^3)$	$17/12 Mdm$

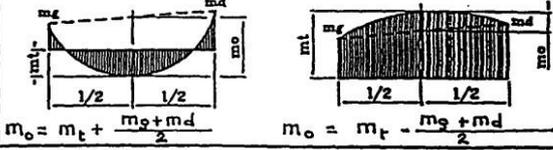
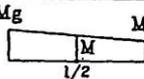
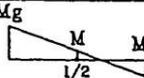
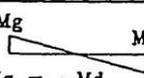
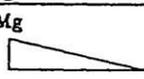
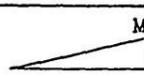
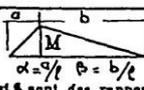
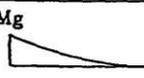
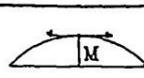
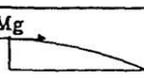
Tableau 3.1 (suite) : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque: Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{1}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE					
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$2/3 Mm$	$2/3 Mmg$	$2/3 Mmd$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Mg+5Md)$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Mg+5Md)$
	$1/6 Mgm$	$1/6 Mdmd$	0	$1/6 Mgm$	$1/6 Mdmd$
	$1/4 Mgm$	$1/12 Mgmd$	$1/3 Mgm$	$5/12 Mgm$	$1/4 Mgmd$
	$1/12 Mdm$	$1/4 Mdmd$	$1/3 Mdm$	$1/4 Mdm$	$5/12 Mdmd$
	$1/12 Mmg(1+\beta+\beta^2)$	$1/12 Mmd(1+\alpha+\alpha^2)$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$1/12 Mmg(5-\alpha-\alpha^2)$	$1/12 Mmd(5-\beta-\beta^2)$
	$7/48 Mmg$	$7/48 Mmd$	$5/12 Mm$	$17/48 Mmg$	$17/48 Mmd$
	$1/5 Mgm$	$1/30 Mgmd$	$1/5 Mgm$	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$
	$1/30 Mdm$	$1/5 Mdmd$	$1/5 Mdm$	$2/15 Mdm$	$3/10 Mdmd$
	$1/5 Mmg$	$1/5 Mmd$	$8/15 Mm$	$7/15 Mmg$	$7/15 Mmd$
	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$	$7/15 Mgm$	$8/15 Mgm$	$11/30 Mgmd$
	$2/15 Mdm$	$3/10 Mdmd$	$7/15 Mdm$	$11/30 Mdm$	$8/15 Mdmd$

Tableau 3.1 (Suite) : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

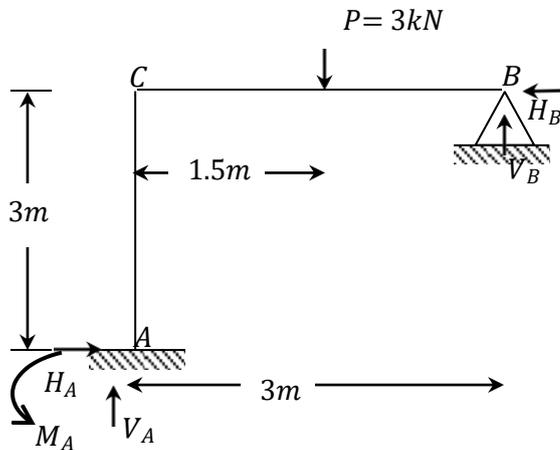
Remarque: Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{1}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	$\frac{1}{l} \int M^2 dx$	
	M^2	$\frac{1}{6} M(mg+4mt+md)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2+MgMd+Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg+4Mmt+Mdmd)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2+MgMd+Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg+4Mmt+Mdmd)$
	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg-md)$
	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg+2mt)$
	$\frac{1}{3} Md^2$	$\frac{1}{6} Md(2mt+md)$
	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{M}{6} \left[-2m_0(1+\alpha+\alpha^2) + (m_0-mg+md)(1+\alpha) + 3mg \right]$
	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{1}{24} M(mg+10mt+md)$
	$\frac{1}{5} Mg^2$	$\frac{1}{60} Mg[5(3mg+md)+12m_0]$
	$\frac{1}{5} Md^2$	$\frac{1}{60} Md[5(mg+3md)+12m_0]$
	$\frac{8}{15} M^2$	$\frac{1}{15} M[5(mg+md)+8m_0]$
	$\frac{8}{15} Mg^2$	$\frac{1}{60} Mg[5(5mg+3md)+28m_0]$ ou $\frac{1}{60} Mg(11mg+md+28mt)$

3.10. Exercices

Exercice 1

Un portique ACB constitué de poutre et de poteau de rigidité EI en flexion. Tracer les diagrammes des moments fléchissants M_F , des efforts tranchants T et des efforts normaux N .



- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)

$$d = 3c - a - 2s$$

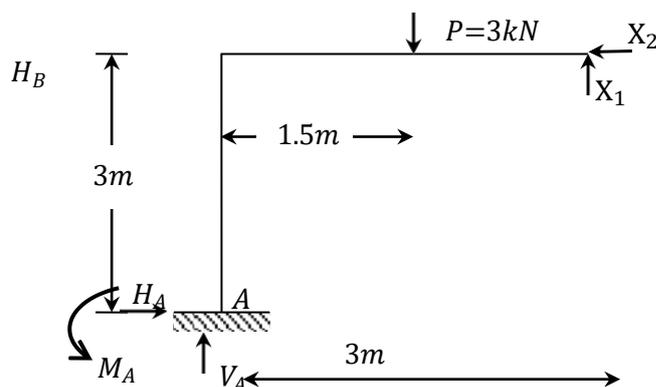
- c : le nombre de contours de la structure ($c=1$)
 - a : le nombre d'appuis doubles ($a=1$)
 - s : le nombre d'appuis simples ($s=0$)
- } $d=2$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

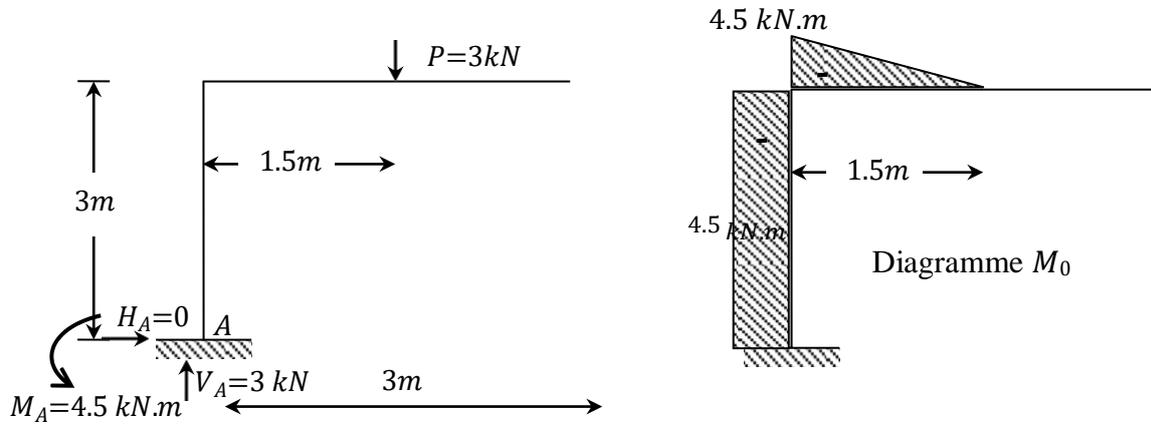
- Choix du système de base (fondamental)

La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ ($P = 3kN$) et aux deux forces inconnues (X_1 et X_2).

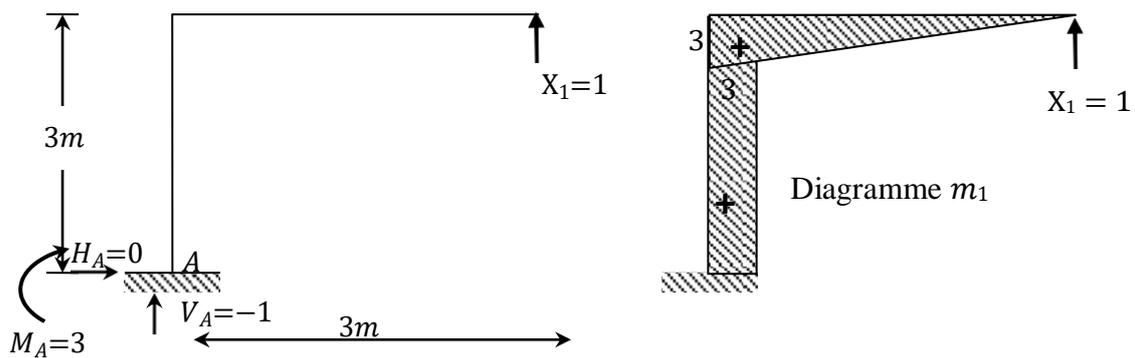


- On trace les diagrammes unitaires ($m_1; m_2$) et celui des charges extérieures (M_0)

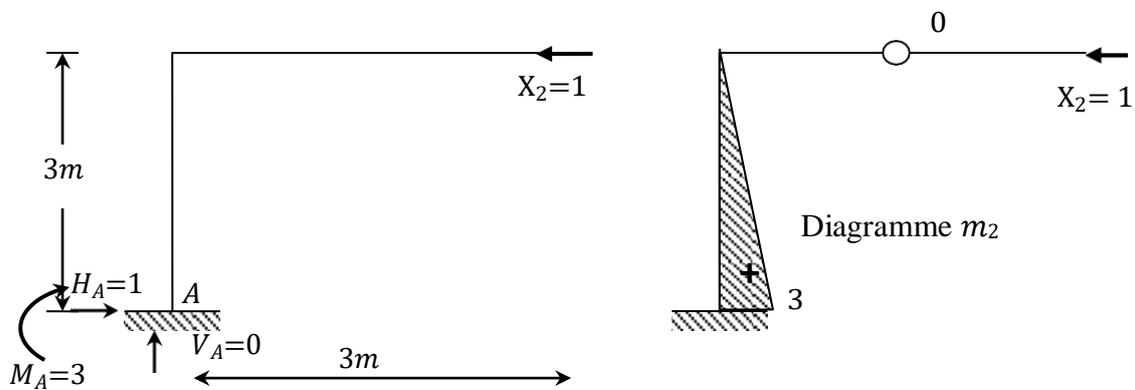
- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1=X_2=0$



- Etat 1: Charges extérieures = 0, $X_1=1$ et $X_2=0$



- Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1=1$ et $X_2=0$



- Calcul des déplacements δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_i m_j dx \text{ (Méthode de VERETCHAGUINE)}$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

- Les coefficients δ_{11} et δ_{21} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1=1$.
- Les coefficients δ_{12} et δ_{22} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_2=1$.
- Les coefficients δ_{10} et δ_{20} se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force $P=3\text{kN}$) appliquées au système d'isostatique de base.
- Les diagrammes (m_1 ; m_2 et M_0) serviront au calcul de ces coefficients.

On trouve,

$$\delta_{11} = \frac{36}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{13.5}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{48.94}{EI} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{20.25}{EI}$$

$$\begin{cases} \frac{36}{EI}X_1 + \frac{13.5}{EI}X_2 - \frac{48.94}{EI} = 0 \\ \frac{13.5}{EI}X_1 + \frac{9}{EI}X_2 - \frac{20.25}{EI} = 0 \end{cases}$$

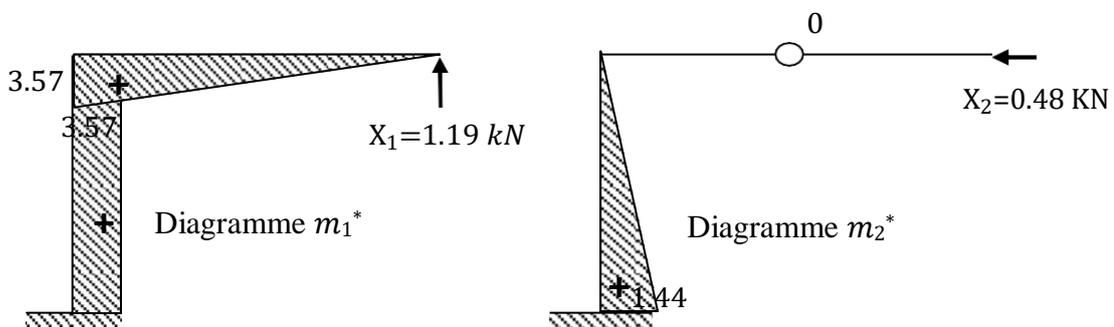
A partir du système, on trouve:

$$X_1 = 1.19 \text{ kN}$$

$$X_2 = 0.48 \text{ kN}$$

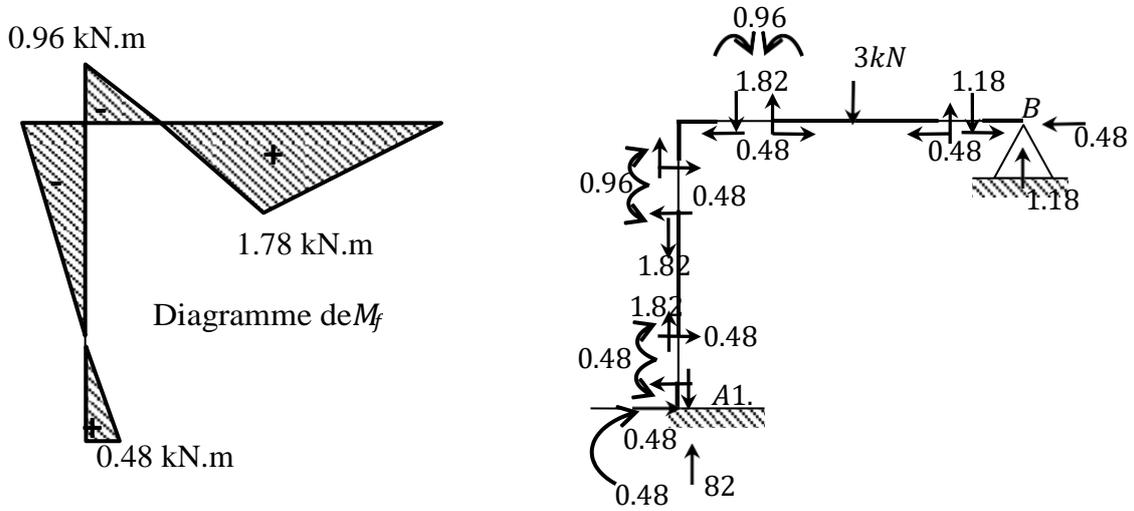
- Correction des éures unitaires

- Le diagramme corrigé $m^* = m_1 X_1$
- Le diagramme corrigé $m^* = m_2 X_2$

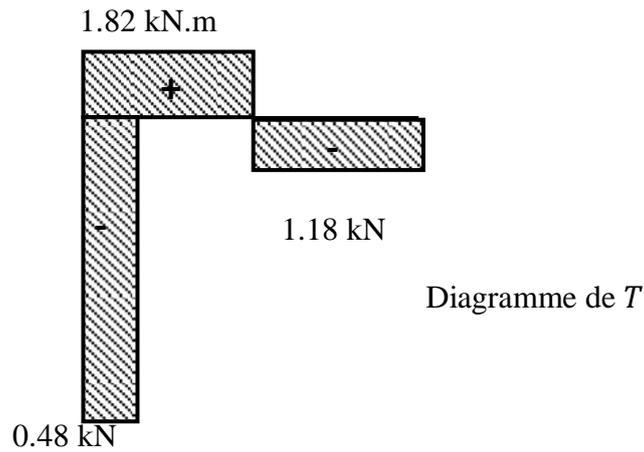


- Diagramme final des moments fléchissants :

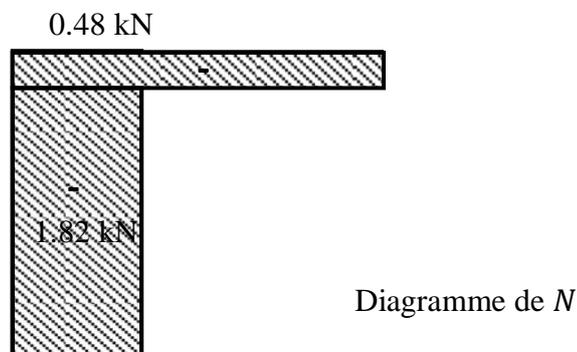
$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^*$$



- Diagramme de l'effort tranchant



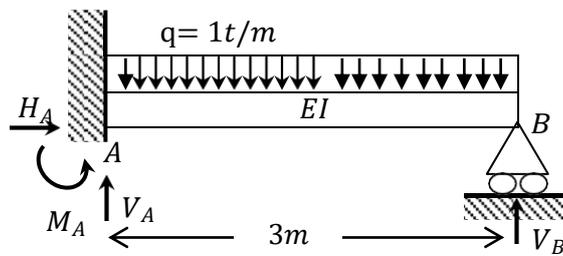
- Diagramme de l'effort normal



Exercice 2

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encadrée en A, repose sur un appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre. La rigidité EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants.



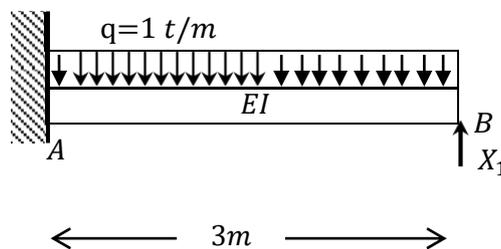
- On détermine le degré d'hyperstaticité d

$$d = 4(\text{liaisons}) - 3(\text{équations}) = 1$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

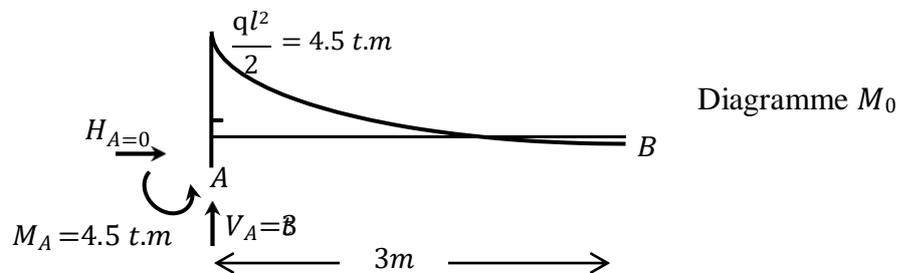
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)

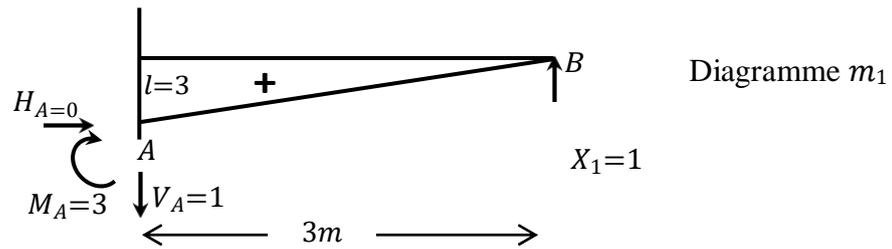


- On trace l'épure unitaire (diagramme) (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

• Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



- Etat 1: Charges extérieures = 0 et $X_1=1$



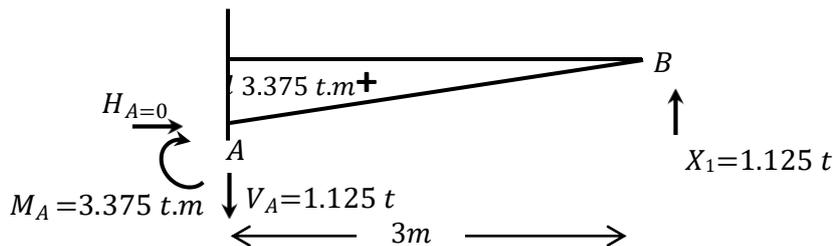
- Calcul des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \quad \delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} = -\frac{10.125}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1 - \frac{10.125}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire: $X_1=1.125 t$

- Correction de l'épure unitaire:
Le diagramme corrigé $m^* = m_1X_1$



- On trace le diagramme final des moments fléchissants de l'état réel par superposition de l'épure unitaire m^* avec le diagramme M_0 .

$$M_f = M_0 + m^*_1$$

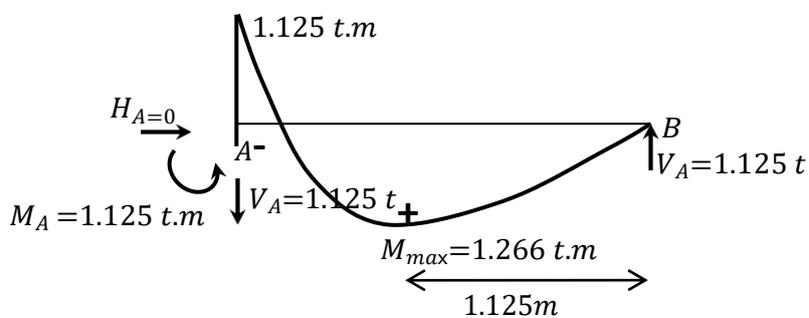
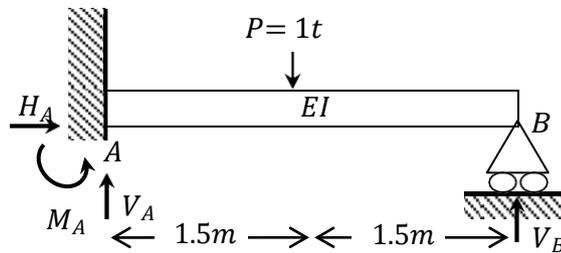


Diagramme M_f

Exercice 3

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encadrée en A, repose sur un appui simple en B, est soumise à une charge constante de 1t. EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



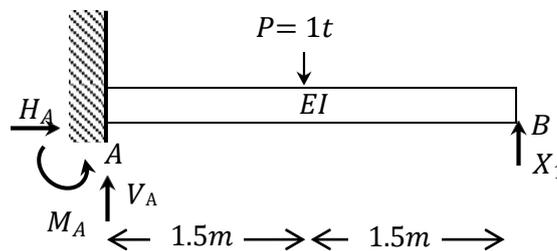
- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)

$$d = 4(\text{liaisons}) - 3(\text{équations}) = 1$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

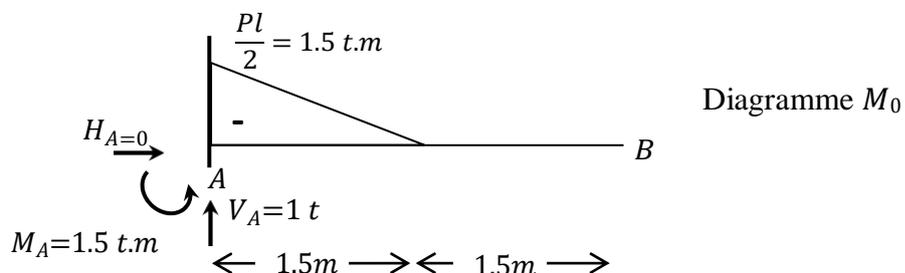
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)

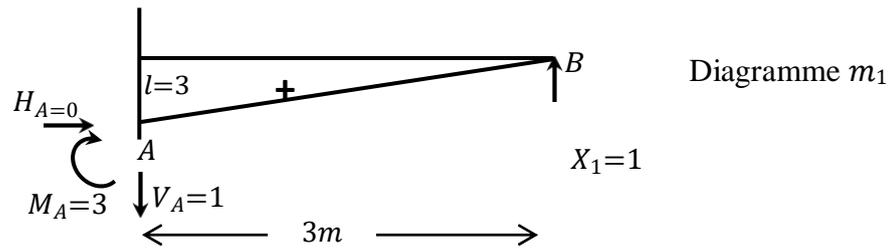


- On trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- Etat 0: Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



- Etat 1: Charges extérieures = 0 et $X_1=1$



- Calcul des déplacements δ_{ij} .

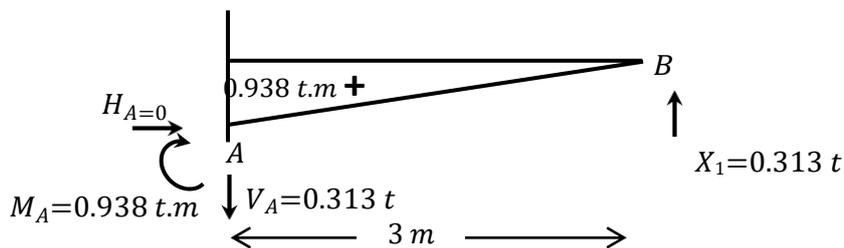
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI} \quad \delta_{10} = -\frac{5Pl^3}{48EI} = -\frac{2.813}{EI}$$

$$\frac{9}{EI} X_1 - \frac{2.813}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire: $X_1=0.313 t$

- Correction de diagramme unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



- On trace le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$

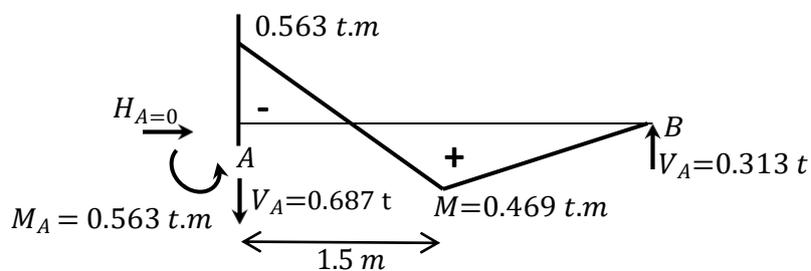
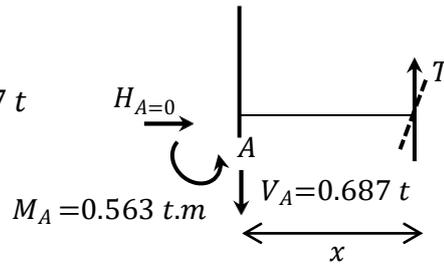


Diagramme de M_f

Section1-1 $0 \leq x \leq 1.5 m$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687 t$$



Section2-2 $1.5 \leq x \leq 3m$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687 - 1 = 0.313 t$$

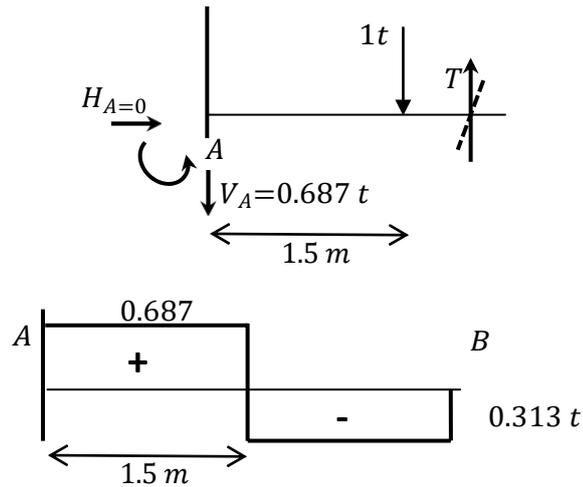
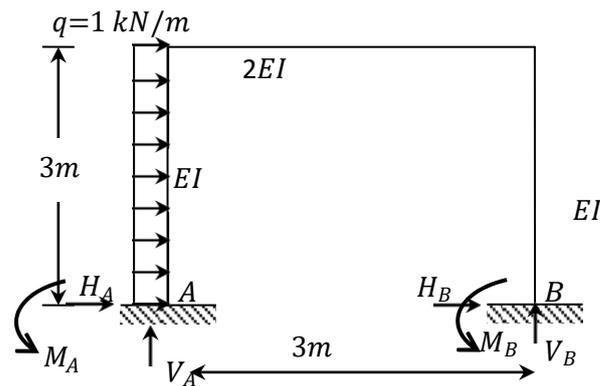


Diagramme de T

Exercice 4

Un portique constitué de deux poteaux et une poutre. Tracer le diagramme des moments fléchissants.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d

$$d = 3c - a - 2s = 3 \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 0 = 3$$

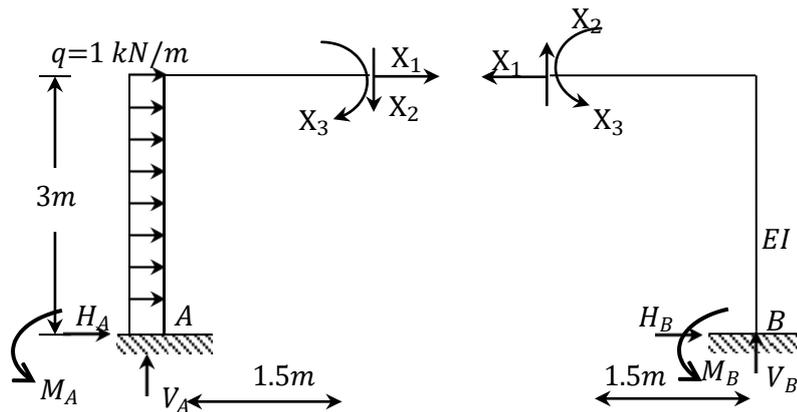
$\Rightarrow 3$ inconnues hyperstatiques (X_1, X_2 et X_3)

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases}$$

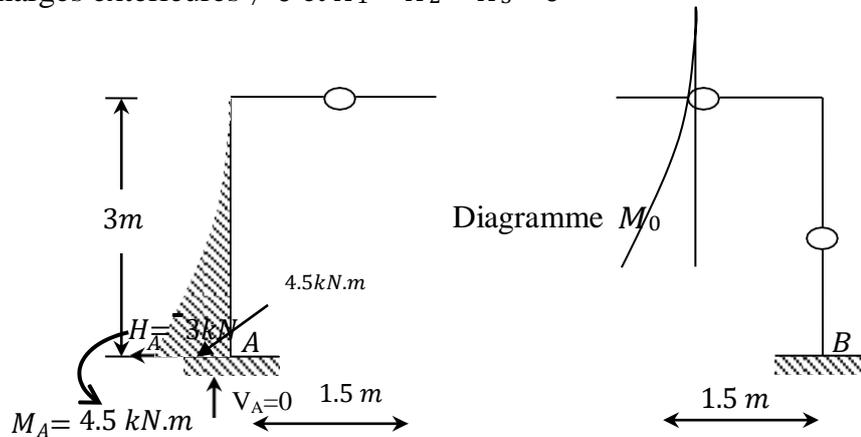
- Choix du système de base (fondamental)

Les inconnus X_1, X_2 et X_3 représente les efforts internes au milieu de la poutre du cadre.

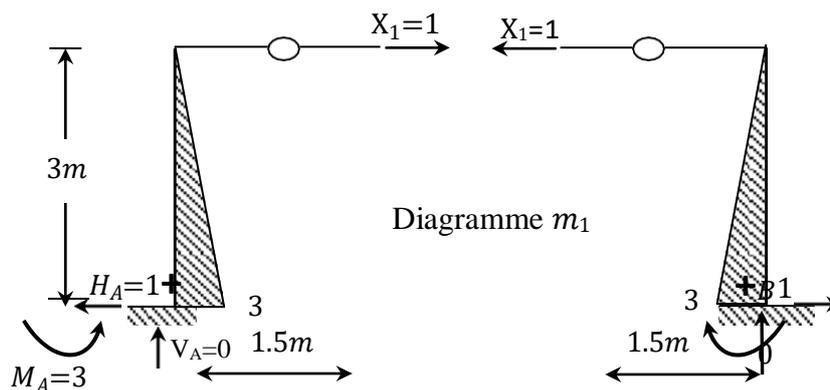


On trace les diagrammes unitaires ($m_1; m_2; m_3$) et celui des charges extérieures (M_0)

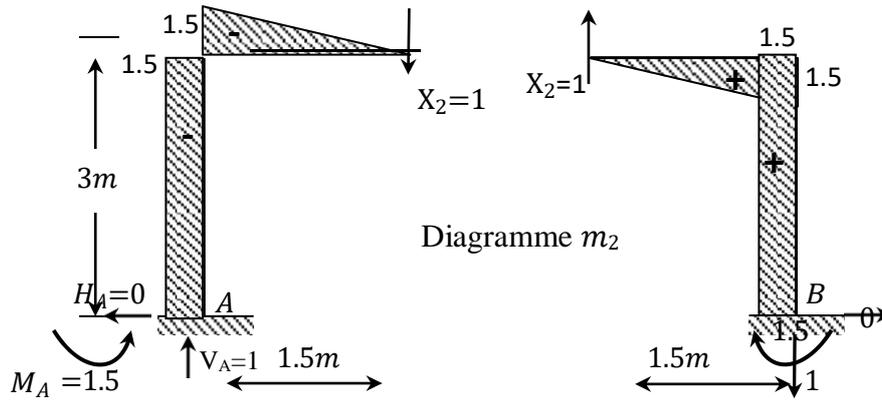
• Etat 0: Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = X_3 = 0$



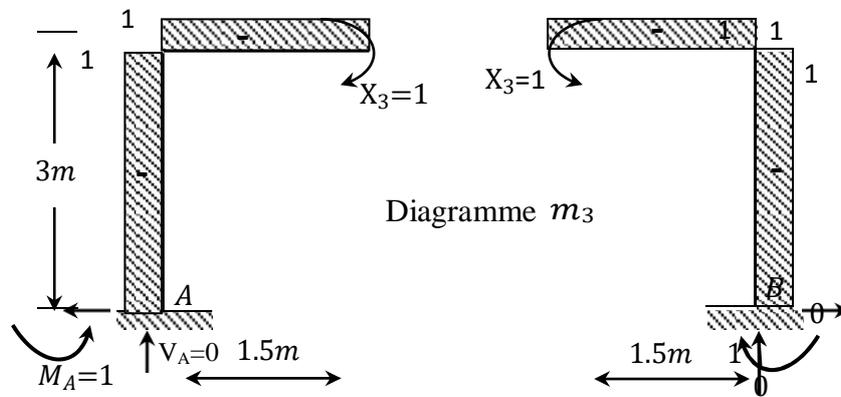
• Etat 1: Charges extérieures = 0, $X_1=1, X_2=0$ et $X_3=0$



- Etat 2: Charges extérieures = 0, $X_1=0$, $X_2=1$ et $X_3=0$



- Etat 3: Charges extérieures = 0, $X_1=0$, $X_2=0$ et $X_3=1$



- Calcul des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{18}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{22} = \frac{14.63}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{9}{EI}, \quad \delta_{33} = \frac{7.5}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{10.13}{EI}, \quad \delta_{20} = \frac{6.75}{EI} \text{ Et } \delta_{30} = \frac{13.5}{EI}$$

- Le système d'équations canoniques

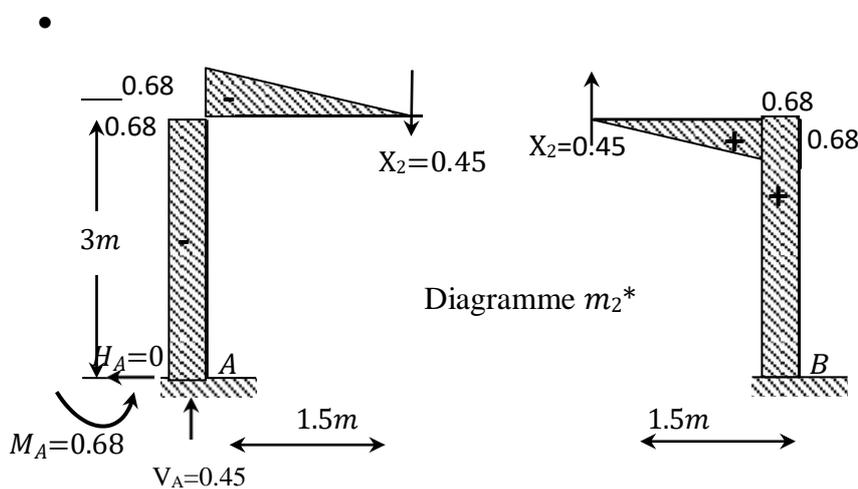
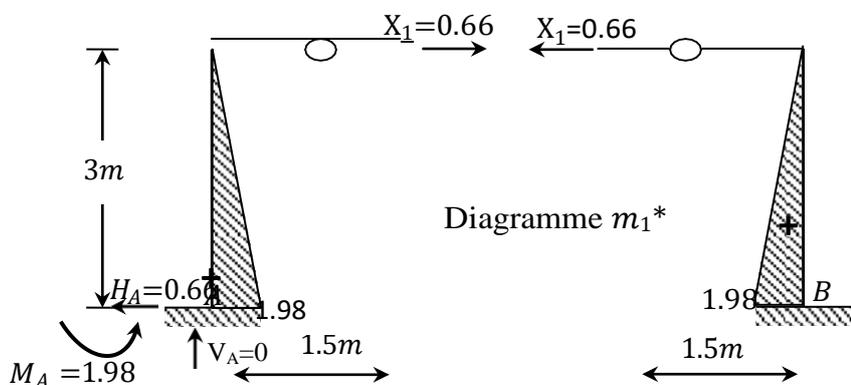
$$\begin{cases} \frac{18}{EI} X_1 + 0 \cdot X_2 + -\frac{9}{EI} X_3 - \frac{10.13}{EI} = 0 \\ 0 \cdot X_1 + \frac{14.63}{EI} X_2 + 0 \cdot X_3 + \frac{6.75}{EI} = 0 \\ -\frac{9}{EI} X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{7.5}{EI} X_3 + \frac{13.5}{EI} = 0 \end{cases}$$

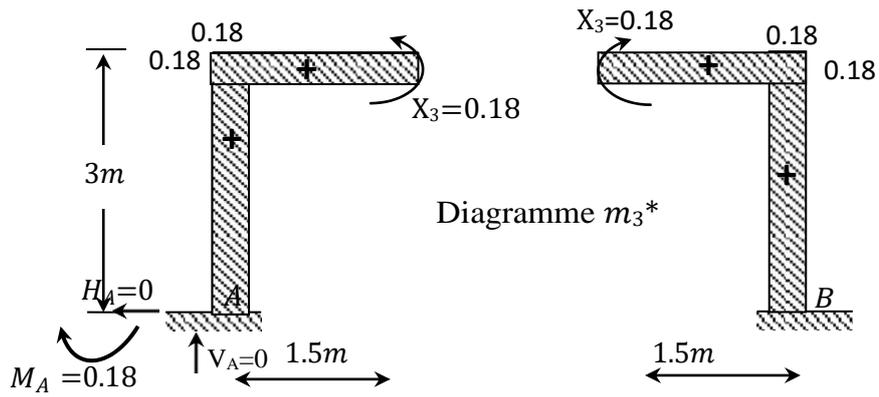
La résolution du système donne

$$\begin{cases} X_1 = 0.66 \text{ kN} \\ X_2 = 0.45 \text{ kN} \\ X_3 = -0.18 \text{ kN.m} \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires

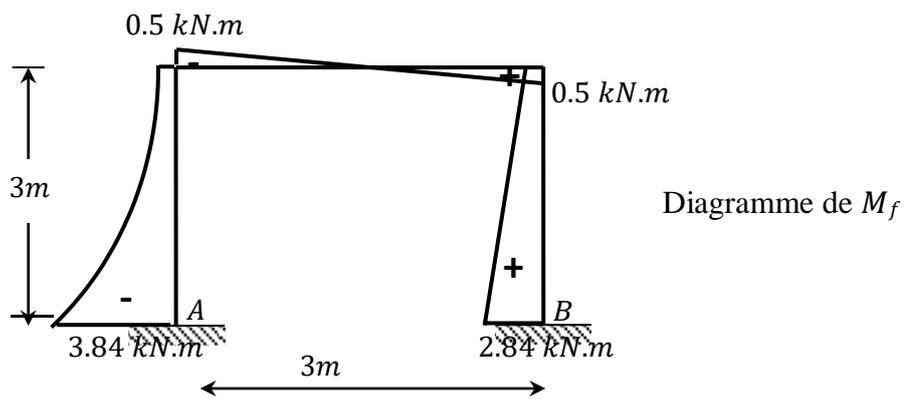
- Le diagramme corrigé $m^* = m_1 X_1$
- Le diagramme corrigé $m^* = m_2 X_2$
- Le diagramme corrigé $m^* = m_3 X_3$





- Donc le diagramme final du système réel:

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^* + m_3^*$$



Chapitre 4

MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS

4.1. Introduction

La méthode des déplacements ou des déformations est une des méthodes les plus utilisées pour le calcul des systèmes hyperstatiques. Les déformations (rotations et translations) sont les inconnues.

4.2. Nombre d'inconnues de la méthode

Le nombre d'inconnues de la méthode des déplacements est égal au nombre de rotations des nœuds N_r et le nombre de translations N_t du portique ($N = (N_r + N_t)$).

- Nombre de rotations N_r : le nombre de rotations d'un portique est égal au nombre de nœuds intermédiaires rigides ($N_r =$ nœuds intermédiaires rigides).
- Nombre de translations N_t : le nombre de translations possibles du portique:

$$N_t = 2n - (b + l) \quad (4.1)$$

Avec:

n : Nombre total de nœuds (nœuds et appuis).

b : Nombre de barres.

l : Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

4.3. Intérêt de la méthode des déplacements

On réduit considérablement avec cette méthode le nombre des inconnues surabondantes et elle permet de déterminer la matrice de rigidité unique du système.

Exemple 1

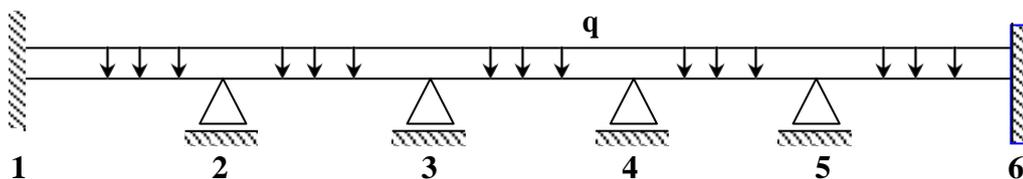


Figure 4.1. Poutre hyperstatique

Dans la Figure 4.1, la méthode des trois moments nous donne 6 équations à 6 inconnues ; alors que la méthode des déplacements nous donne seulement 4 inconnues (car les rotations aux nœuds 1 et 6 sont nulles)

Exemple 2

Dans cet exemple (figure 4.2) nous avons 3 inconnues par liaison encastree ; ce qui fait en tout 9 inconnues.

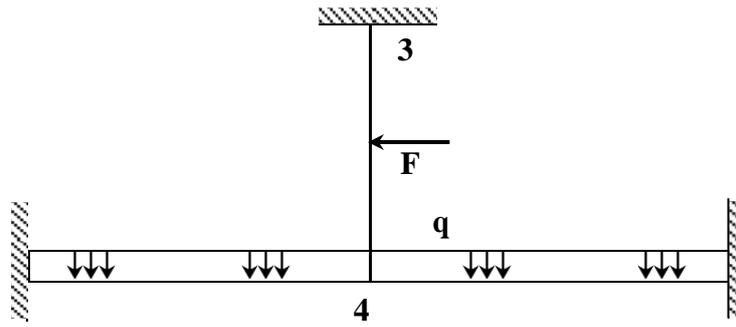


Figure 4.2. Système hyperstatique

La statique nous donne trois équations (une équation de moment et 2 équations de projection de toutes les forces appliquées).

Le degré d'hyperstaticité est $(9 - 3 = 6$ fois hyperstatique).

Puis que ce système est une structure non déplaçable ($N_t = 2n - (b + l) = 2 \cdot 4 - (3 + 6) = -1$ alors nous avons seulement une seule inconnue puisque nous avons un seul nœud intermédiaire (le nœud 4). Donc l'inconnue Z_1 c'est la rotation au nœud 4.

4.4. Principe de la méthode des déplacements

La méthode des déplacements est utilisée pour le calcul des structures constituées de barres droites encastrees dans les nœuds.

Globalement, le principe de la méthode est décrit par les trois étapes suivantes :

- On détermine le système de base en bloquant (encastremets spéciaux) tous les nœuds intermédiaires de la structure réelle dans le cas d'une structure non déplaçable.
Si le système est déplaçable, on bloque aussi les nœuds intermédiaires (encastremets spéciaux) et en bloque aussi les translations à l'aide de butée (Figure 4.3b).

Chaque élément de la structure travaille seul comme le modèle bi-encastree ou en castré-articulé.

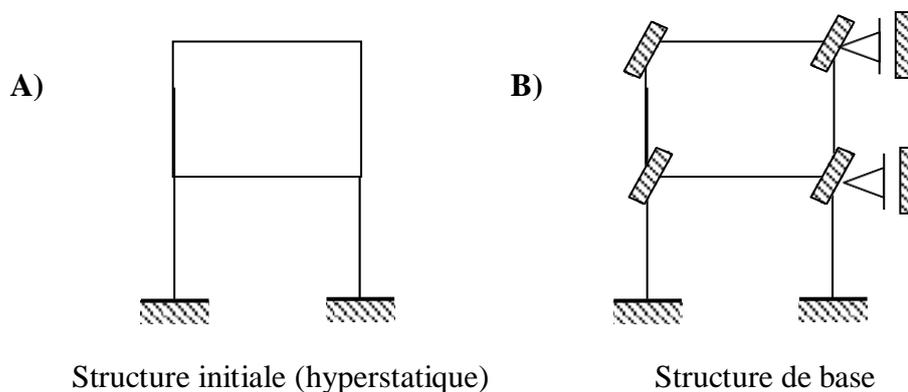


Figure 4.3. Portique hyperstatique

- b. Afin d'obtenir un système équivalent à la structure initiale, on applique des déplacements (inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (Figure 4.3C).

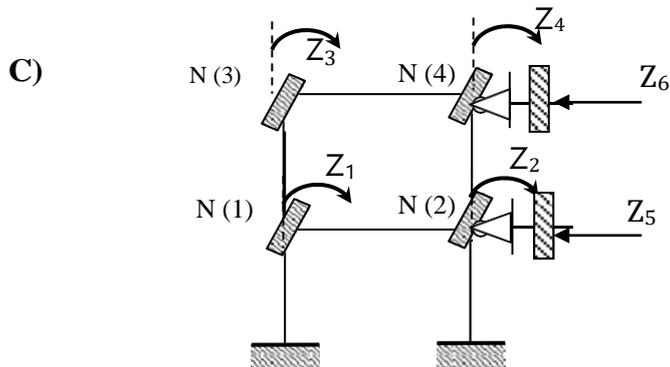


Figure 4.3. Portique hyperstatique

Les inconnues du problème dans le cas considéré (Figure 4.3C) sont:

Z_1 : Rotation du nœud 1.

Z_2 : Rotation du nœud 2.

Z_3 : Rotation du nœud 3.

Z_4 : Rotation du nœud 4.

Z_5 : Translation horizontale des nœuds 1 et 2, la variation de longueur de la barre 1-2 étant négligée.

Z_6 : Translation horizontale des nœuds 3 et 4, la variation de longueur de la barre 3-4 étant négligée.

- c. Pour obtenir les déplacements inconnus (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 et Z_6) on écrit qu'il y a équilibre des réactions (moments ou forces) apparaissant dans chaque liaison ajoutée sous l'effet des forces extérieures et des déplacements imposés. Soit:

$$Z_1 = \sum \text{des moments réactionnels dans l'encastrement (1)} = 0.$$

$$Z_2 = \sum \text{des moments réactionnels dans l'encastrement (2)} = 0.$$

$$Z_3 = \sum \text{des moments réactionnels dans l'encastrement (3)} = 0.$$

$$Z_4 = \sum \text{des moments réactionnels dans l'encastrement (4)} = 0.$$

$$Z_5 = \sum \text{des réactions horizontales dans la liaison (2)} = 0.$$

$$Z_6 = \sum \text{des réactions horizontales dans la liaison (4)} = 0.$$

Exemple: barre 1-2 et barre 1-3:

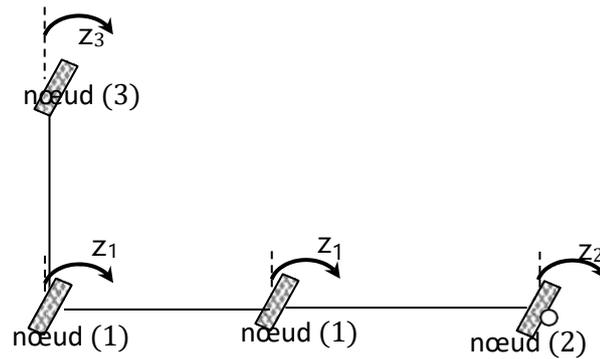


Figure 4.4. Portique de la figure 4.3. (Exemple : barre 1-2 et 1-3)

Pour terminer, on retient que la méthode des déplacements est caractérisée par:

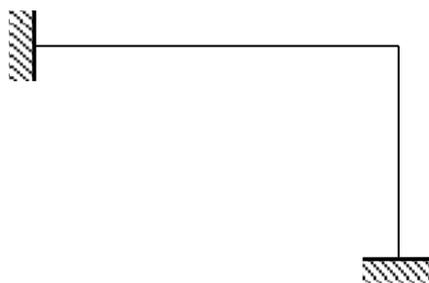
- Le blocage des rotations des nœuds intermédiaires et des translations du portique.
- Donc un seul système de base possible, donc une façon unique de mettre le problème en équations (de ce fait, la méthode est particulièrement indiquée pour le calcul automatique).

4.5. Classification des structures

On distingue deux types de structures :

A. Portiques ou structures à nœuds fixes (dit structure non déplaçable)

Ce sont des structures dont les nœuds ne peuvent subir que des rotations (Figure 4.5). Une structure à nœuds fixes possède autant de nœuds intermédiaires que de rotations inconnues Z .



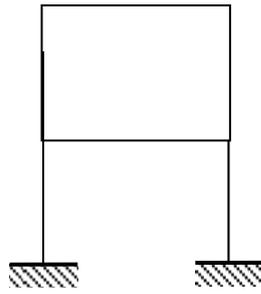
$$N_t = 2n - (b + l) = 2 \cdot 3 - (2 + 4) = 0$$

⇒ le nombre de translation est nul

Figure 4.5. Système hyperstatique non déplaçable

B. Portiques à nœuds déplaçables (structures déplaçables)

Ce sont des structures dont les nœuds intermédiaires peuvent subir en même temps des rotations et des translations (Figure 4.6).



$$N_t = 2n - (b + l) = 2 \cdot 6 - (6 + 4) = 2$$

⇒ deux translations

Figure 4.6. Système hyperstatique déplaçable

4.6. Principe du nœud fixe

Considérons le schéma de la Figure 4.7 dans le quel deux barres AB et AC relient un nœud A à deux nœuds B et C qui sont fixes en translation dans le plan XY.

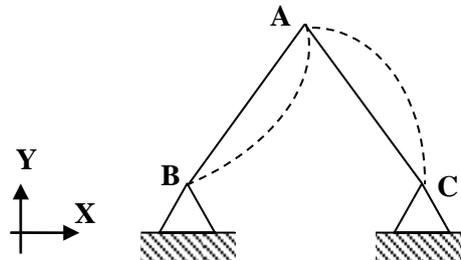


Figure 4.7. Principe du nœud fixe en translation

En toute généralité, le point A ne sera mobile que si les longueurs AB et AC varient. Une telle variation de longueur ne peut résulter que de l'un et/ou l'autre des effets suivants :

- Raccourcissement de la corde due la courbure prise sous l'effet de la distribution du moment de flexion;
- Variation de la longueur de la corde due à la courbure additionnelle prise sous l'effet de la déformation d'effort tranchant;
- Variation de la longueur de la corde induite par la déformation d'effort normal.

Conformément à l'hypothèse simplificatrice de la méthode des Rotations, les déformabilités à la base des effets (b) et (c) sont négligées ; ceux-ci ne sont donc pas à considérer; en conséquence, seul l'effet (a) reste à examiner. Dans le domaine élastique, il est aisé de démontrer, que le raccourcissement de la corde d'une barre, engendrée par la prise de courbure de flexion, est d'un ordre inférieur à la variation de longueur produite par l'effort normal.

Le principe du nœud fixe en translation s'énonce comme suit :

Si, dans un plan XY, un nœud A est relié par deux barres AB et AC à deux nœuds B et C, tous deux fixes en translation dans ce plan, le point A peut à son tour être considéré comme fixe en translation.

4.7. Principe du nœud mobile

Lorsque la structure plane est constituée d'un réseau de poutres orthogonal à un réseau de poteaux, il est assez logique de localiser la structure dans un plan XY tel que l'axe des X soit parallèle aux poutres (barres horizontales) et l'axe des Y parallèle aux poteaux (barres verticales). L'hypothèse simplificatrice à la base de la Méthode des rotations, notamment, la déformabilité aux efforts normaux est négligeable, revient à supposer l'incompressibilité (éventuellement l'inextensibilité) des barres.

Les degrés de liberté de la structure à considérer dès lors sont:

- Le degré de liberté en rotation des nœuds.
- Le degré de liberté en translation horizontale de toute la file des éléments horizontaux.
- Le degré de liberté en translation verticale de toute la file des éléments verticaux

Ainsi, il suffit désormais d'un blocage simple en translation selon l'axe d'une file des éléments pour que tous les nœuds de cette file ne translatent pas. En conséquence, la structure cinématiquement déterminée (Figure 4.8a) est obtenue en disposant d'un blocage simple associé à chacun des degrés de liberté précités. Les blocages simples ainsi requis, en nombre N (N_t et N_r), constituent les inconnues cinématiques. Celles-ci sont donc de deux natures :

- Les angles de rotation aux nœuds intermédiaires;
- Les déplacements horizontaux ou verticaux du système.

Pour l'exemple de la Figure suivante, on a:

$$N_t = 2n - (b+l) = 2 \cdot 8 - (10+3) = 3$$

$$N_r = 6$$

- 6 blocages de rotations de nœuds intermédiaires (Figure 4.8b),
- 2 blocages de déplacements horizontaux (Figure 4.8c),
- 1 blocage de déplacements verticaux (Figure 4.8d).

soit au total $M = 9$.

La structure cinématiquement (Figure 4.8a) déterminée de référence est la structure d'origine munie de ces 11 blocages simples (Figure 4.8).

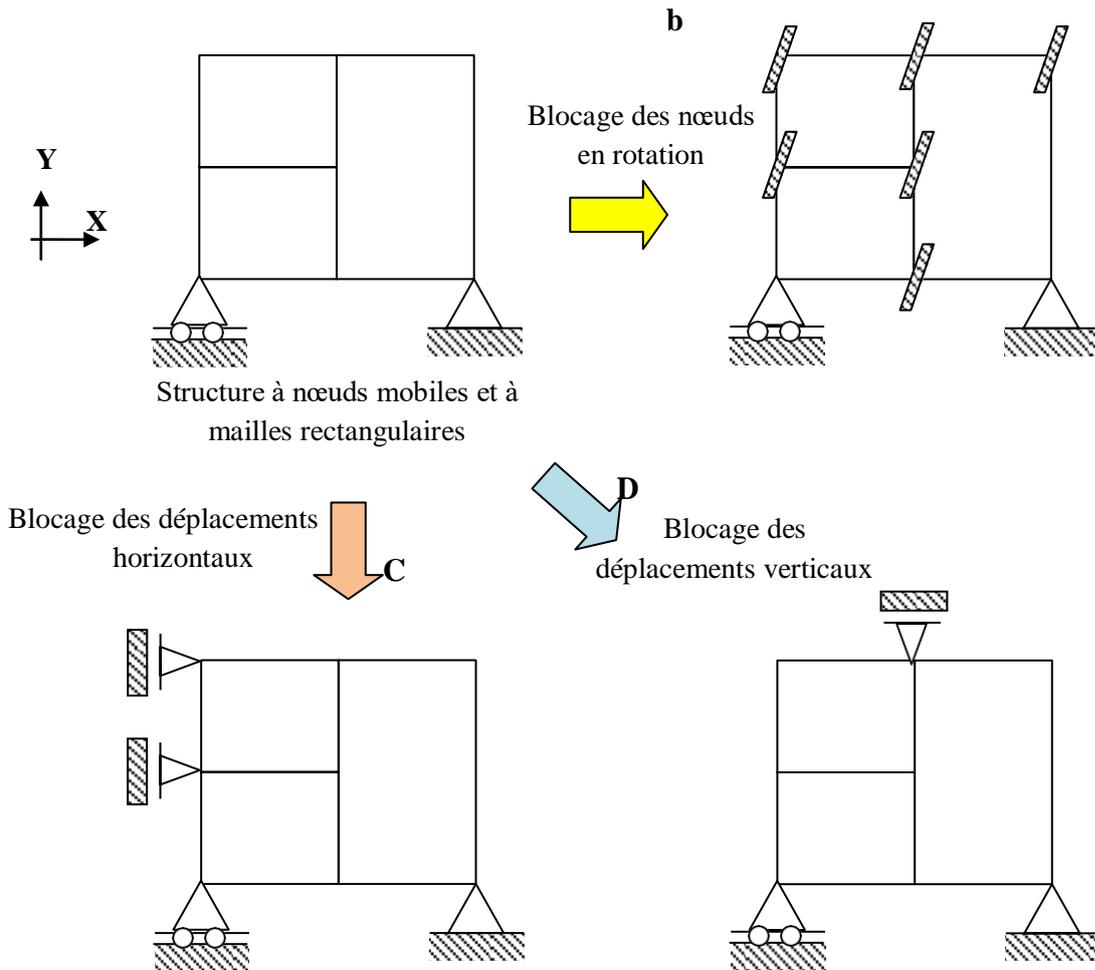


Figure 4.8. Principe du nœud mobile

4.8. Sollicitations des barres

Les barres sont sollicitées soit par :

- Les charges extérieures (réparties, ponctuelles,...) (connues)
- Les rotations des nœuds intermédiaires..... Ce sont les inconnues
- Les translations.....

4.9. Moments fléchissants et réactions des barres soumises à des déplacements et des charges

Les calculs des moments et les réactions peuvent être menés par les méthodes exposées dans les chapitres (chapitre 6 : Méthode des trois moments et chapitre 3 : Méthode des forces).

Les diagrammes des moments et les réactions des charges extérieures les plus courantes sont regroupés dans les deux tableaux suivants.

A. Les barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)

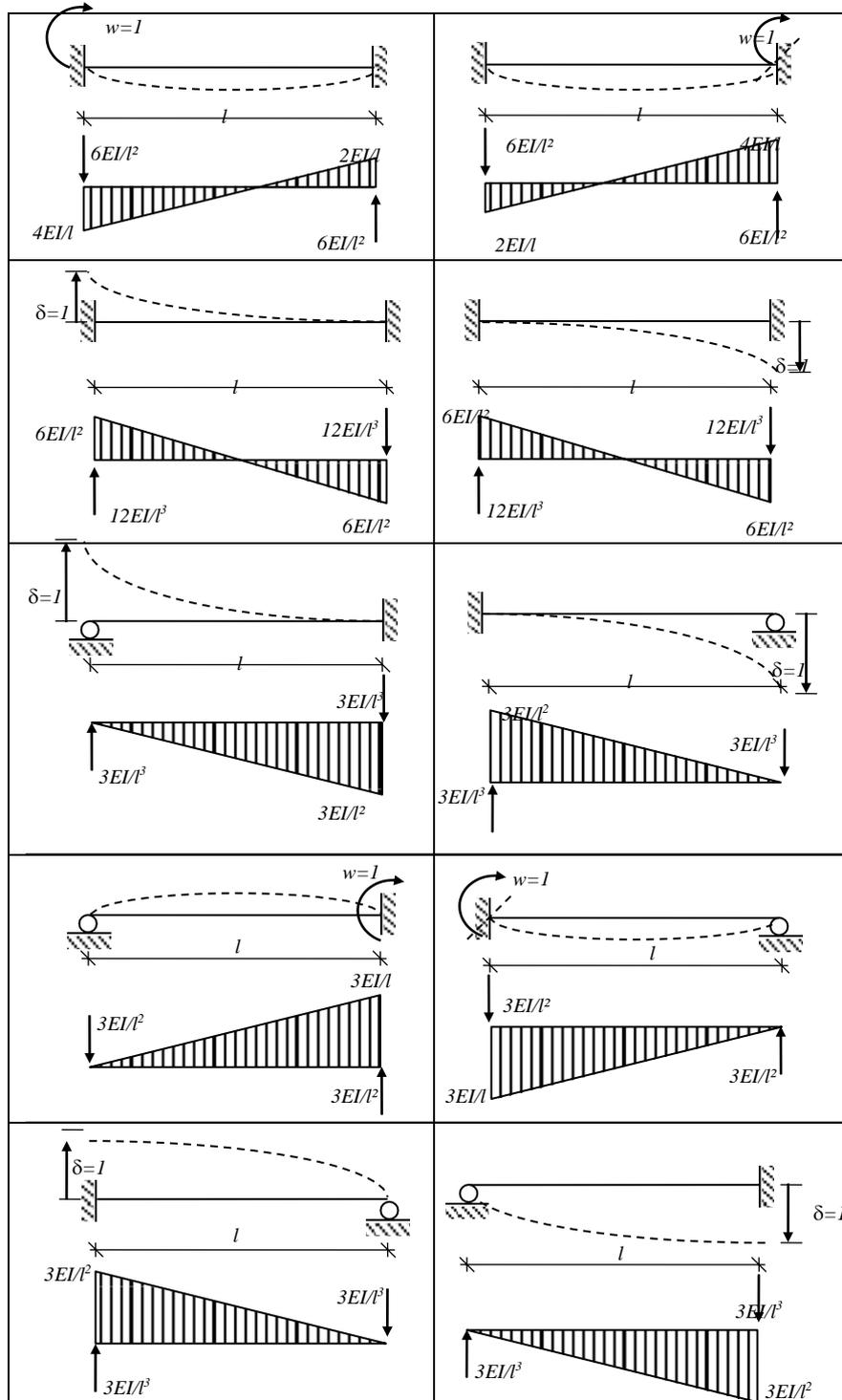


Figure 4.9. Moments fléchissants et réactions des barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)

B. Barres soumises à des charges extérieures (réparties, ponctuelles, ...)

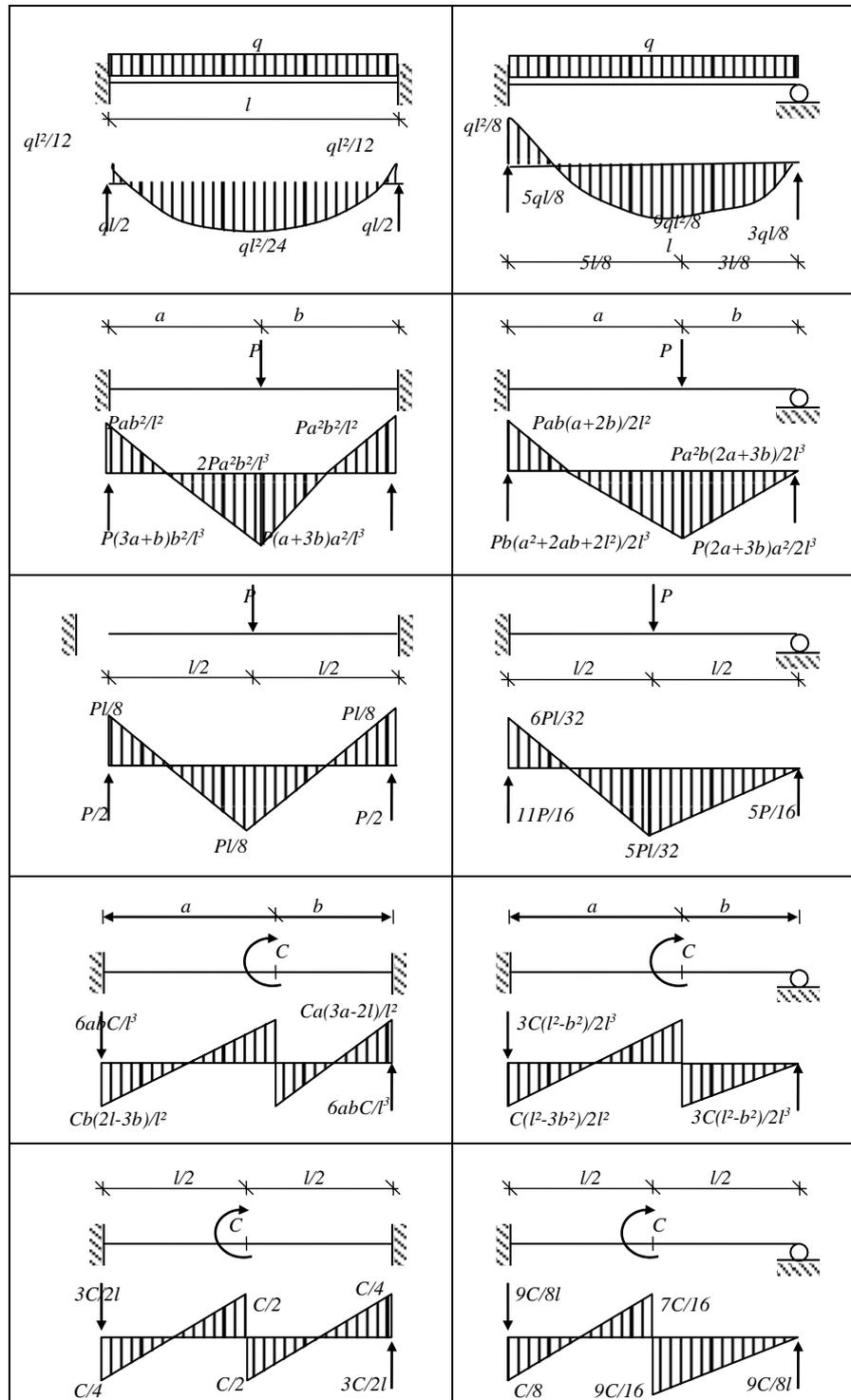


Figure 4.10. Moments fléchissants et réactions des barres soumises à des charges extérieures

4.11. Étapes de calcul par la méthode des déplacements

L'application de la méthode des déplacements peut se résumer aux étapes élémentaires suivantes :

- Déterminer le nombre d'inconnues (N_t et N_r).
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges extérieures ($Z_1=Z_2=\dots=Z_n=0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires m_i ($i = 1, \dots, n$) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $Z_i=1$ et les autres inconnus nuls.
- On calcule tous les coefficients de réaction (r_{ij}, R_{i0}) à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques pour obtenir les déplacements des nœuds.
- Correction des épures unitaires $m^* = m_i X_i$ ($i=1, \dots, n$).

$$m_1^* = m_1 Z_1; m_2^* = m_2 Z_2 \dots m_n^* = m_n Z_n$$

- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants

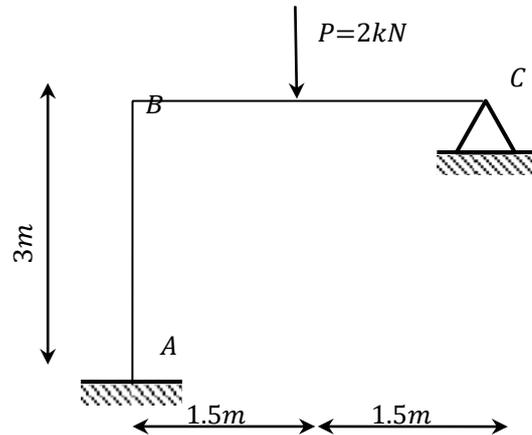
$$M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$$

4.12. Exercices

Exercice 1

Calcul des structures à nœuds fixes (ou à nœuds invariables (non déplaçables))

On considère le portique suivant, construire le diagramme du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal. EI est constante.



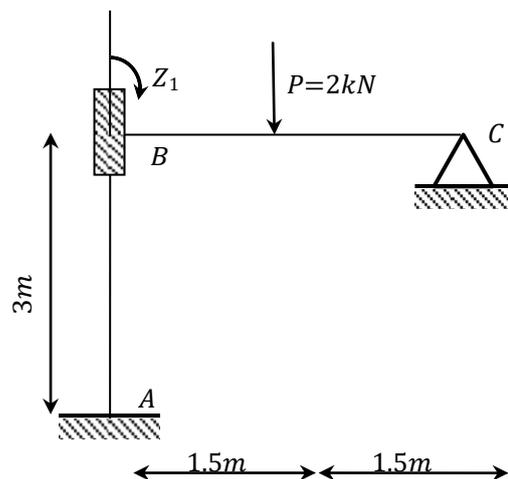
Le nombre d'inconnus hyperstatique

Le nombre de translation $n_t = 2n - (b+l) = 2 \cdot 3 - (2 + 4) = 0$

⇒ Pas de translation (structure à nœuds fixes (non déplaçable)).

Le nombre de rotation $n_r = 1$ on bloque le nœud intermédiaire (le nœud B)

- Système de base

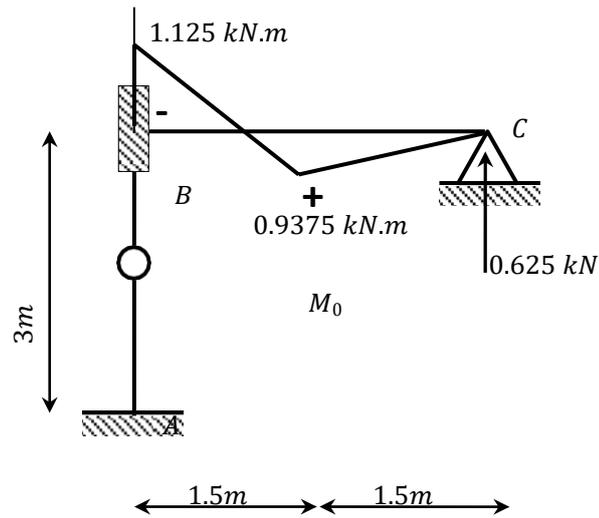


- Système d'équations canonique

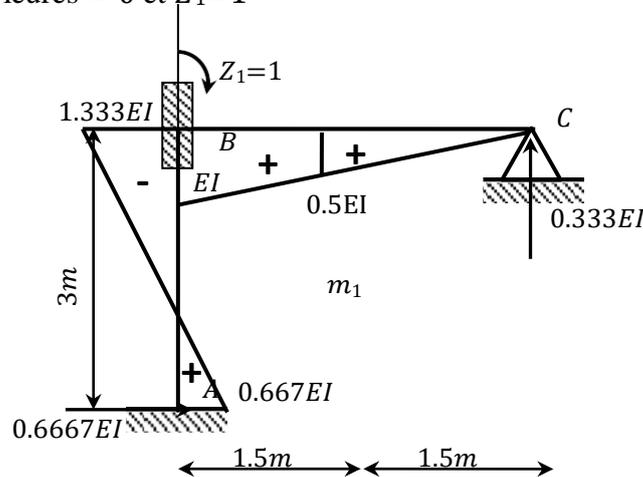
$$r_{11} Z_1 + R_{10} = 0$$

- On trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

• Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $Z_1 = 0$



- Etat 1: Charges extérieures = 0 et $Z_1=1$

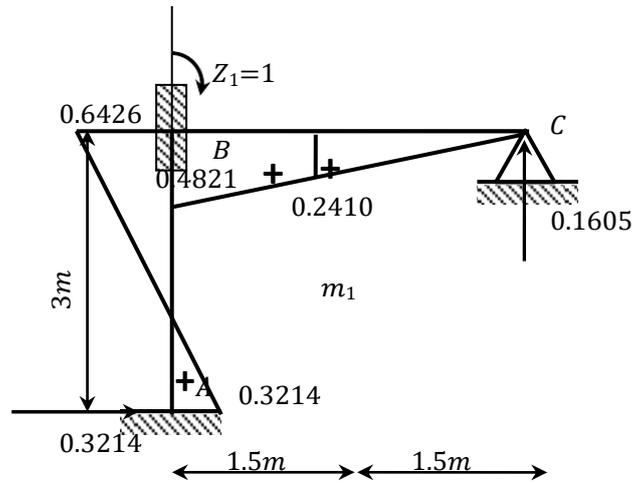


- Calcul des déplacements r_{ij} .

r_{11}	R_{10}
<p>Le coefficient r_{11} est calculé de façon à réaliser l'équilibre au nœud B du digramme m_1. On indique r_{11} dans le sens de la rotation Z_1 appliquée à l'encastrement élastique ajouté (voir figure m_1)</p> <p>$r_{11}=EI+1.333EI=2.333EI$</p>	<p>Le coefficient R_{10} est calculé de façon à réaliser l'équilibre au nœud B du digramme M_0.</p> <p>$R_{10}=-1.125$</p>
$r_{11}Z_1 + R_{10} = 0 \Rightarrow 2.333 EI Z_1 - 1.125 = 0$	
$\Rightarrow Z_1 = \frac{0.4821}{EI}$	

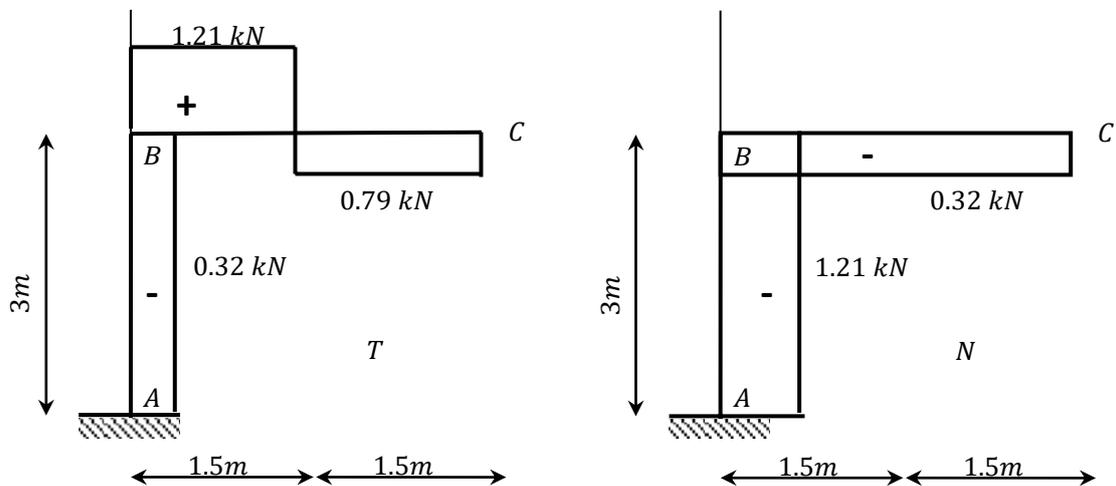
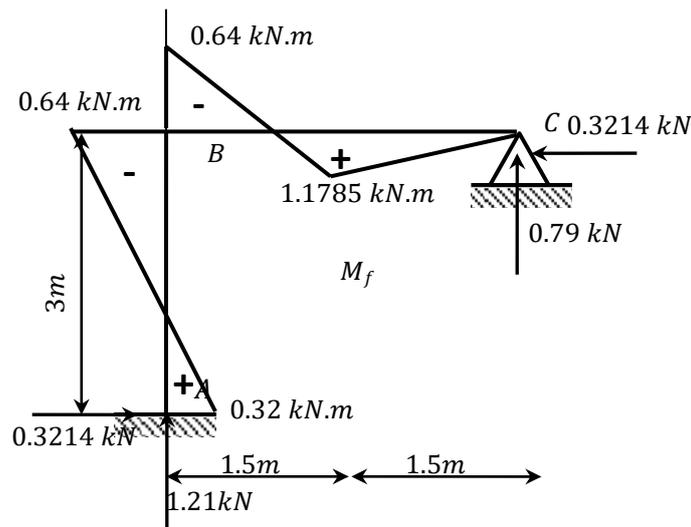
- Correction du diagramme unitaire

- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 Z_1$



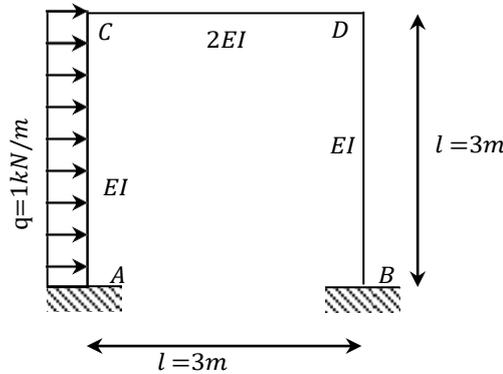
- Les diagrammes finaux:

$$M_f = M_0 + m_1^*$$



Exercice 2

Le portique est constitué de barres identiques ($l=3m$). Tracer le diagramme des moments fléchissants M_F .



- **Le nombre d'inconnus hyperstatique**

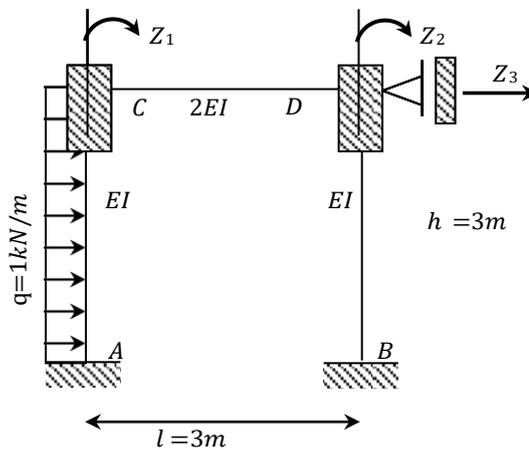
Le nombre de translation $n_t = 2n - (b+l) = 2 * 4 - (3 + 2) = 1$

⇒ Portique à nœuds déplaçables (une translation)

Le nombre de rotation $n_r = 2$ on bloque deux nœud intermédiaire (le nœud C et D)

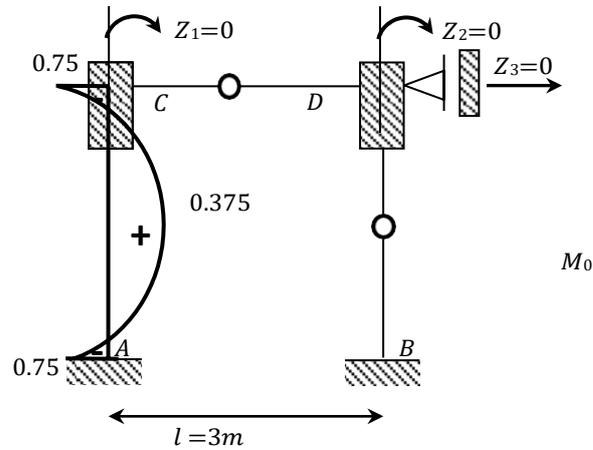
- $n = n_t + n_r = 1 + 2 = 3$ (une translation (déplacement linéaire) Z_3 et deux rotations (déplacements angulaires) (Z_1 et Z_2))

- **Système de base:**



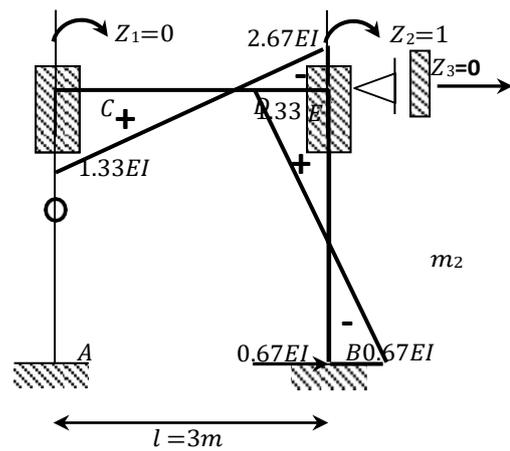
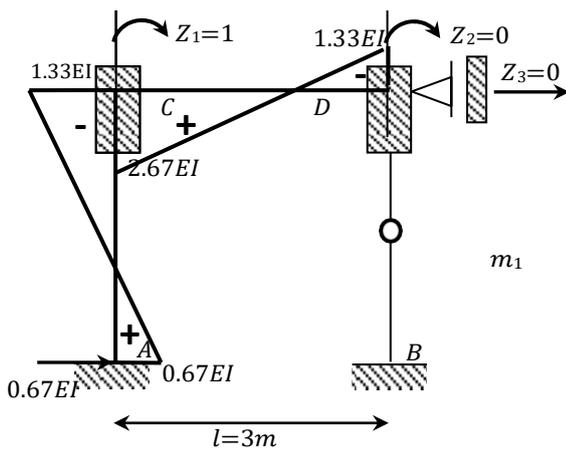
- **Diagrammes des moments fléchissants**

- Etat 0: Charges extérieures $\neq 0$ et $Z_1=Z_2=Z_3=0$

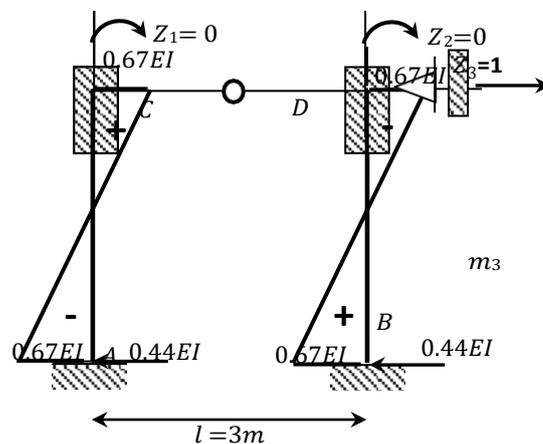


Etat 1: Charges extérieures = 0 et $Z_1=1$ et $Z_2=Z_3=0$

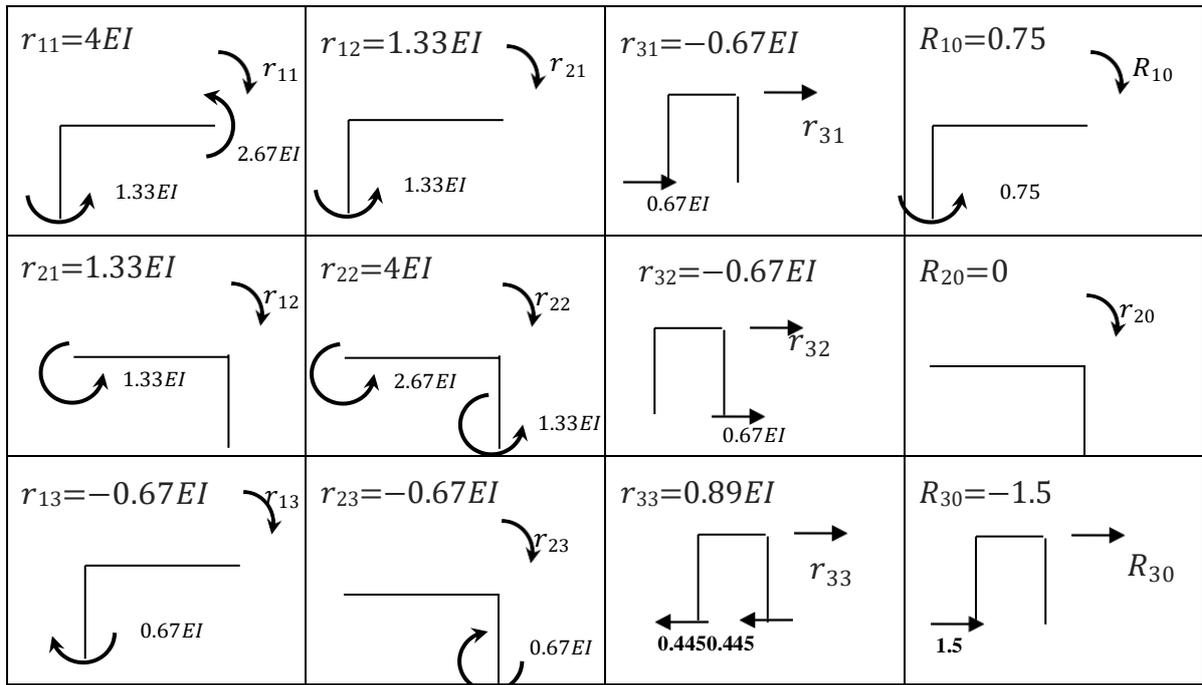
Etat 2: Charges extérieures = 0 et $Z_2=1$ et $Z_1=Z_3=0$



- Etat 3: Charges extérieures = 0 et $Z_1=Z_2=0$ et $Z_3=1$



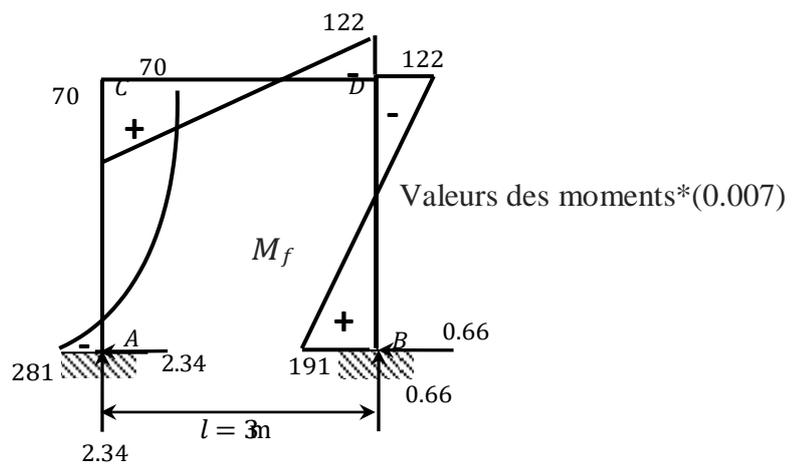
- calcul des coefficients r_{ij}



- Système d'équations canoniques

$$\begin{cases} r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+r_{13}Z_3+R_{10}=0 \\ r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+r_{23}Z_3+R_{20}=0 \\ r_{31}Z_1+r_{32}Z_2+r_{33}Z_3+R_{30}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1=0.032 \\ Z_2=0.314 \\ Z_3=1.95 \end{cases}$$

- Diagramme final $M_f = M_0 + m_1Z_1 + m_2Z_2 + m_3Z_3$



Chapitre 5

MÉTHODES ITÉRATIVES

5.1. Introduction

En mathématiques, une itération désigne l'action de répéter un processus. Le calcul itératif permet l'application à des équations récursives. Le terme itération est issu du verbe latin *iterare* qui signifie ‘cheminer’ ou de *iter* ‘chemin’. Le processus d'itération est employé fréquemment en algorithmique.

En analyse numérique, une méthode itérative est un procédé algorithmique utilisé pour résoudre un problème, par exemple la recherche d'une solution d'un système d'équations ou d'un problème d'optimisation. En débutant par le choix d'un point initial considéré comme une première ébauche de solution, la méthode procède par itérations au cours desquelles elle détermine une succession de solutions approximatives raffinées qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée. Les points générés sont appelés des itérés.

On cherche à résoudre une équation de la forme :

$$Ax = b \quad (5.1)$$

Les méthodes directes fournissent la solution \dot{X} en un nombre fini d'opérations. Mais, si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important, or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs. Elles utilisent des propriétés mathématiques nécessitant un calcul exact, il est difficile de tenir compte des erreurs de calcul dans ce processus. Donc, le résultat n'est jamais rigoureusement égal à \dot{X} . Il peut même en être très différent.

Les méthodes itératives contrastent avec les méthodes directes qui résolvent le problème en une seule étape (par exemple la solution d'un système linéaire $Ax = b$ obtenue en calculant la matrice inverse de A). Le recours au calcul matriciel est indispensable est pratique car :

- Cela permet une écriture compacte d'ensembles des relations devant être traitées simultanément
- Cela se prête particulièrement bien à l'utilisation du calcul par ordinateur.

Un grand nombre de structures utilisées par les ingénieurs dans la construction sont composées d'éléments semblables reliés entre eux en des points pour former les structures générales que sont les structures en treillis ou les structures en portiques. L'idée étant de considérer le comportement de chacun des ‘éléments’ tout seul et ensuite de relier ces éléments pour reconstituer la structure réelle et ceci de façon à satisfaire au niveau de leurs jonctions à l'équilibre générale des forces en place et à la compatibilité des déplacements. Cette manière de faire réduit le nombre d'inconnues et transforme en fait les problèmes continus en un problème discret où les inconnues (contraintes, efforts, déplacements) se situent au niveau des nœuds. Leurs résolutions ensuite se réduisent à une résolution d'équation algébrique facilitée grandement par les méthodes itératives (calcul matriciel).

La barre ou la poutre ainsi constituée sera analysée pour écrire de manière simple sa relation de rigidité qui est la relation entre les forces en ses nœuds et les déplacements ou degrés de libertés (d.d.l) en ces mêmes nœuds. Par la suite, la relation de rigidité de la structure sera obtenue par assemblage des rigidités de ses éléments par l'intermédiaire des nœuds. La relation ainsi constituée, est une relation algébrique qui sera résolue par les méthodes de calculs matriciels. Il est évident que la taille de ce genre de problème sera vite importante, d'où la nécessité de disposer d'un moyen automatique de calcul. Le calcul matriciel s'adaptant facilement à la programmation, on voit bien que l'écriture de programme informatique sera la solution pour résoudre le problème vu la taille du calcul éventuel.

Dans la pratique le comportement structurel d'une structure composée de barres ou de poutres se traduit par une relation dite "relation de rigidité" ou relation de raideur. Cette relation de rigidité lie les déplacements des nœuds (ou degré de liberté des nœuds: note par (d.d.l) de l'élément aux forces agissantes en ces mêmes nœuds. La relation de rigidité sera en fait un ensemble de relations qui formeront un système d'équations algébriques.

Si nous prenons le cas en élasticité des petites déformations et un matériau dont la loi de comportement est la loi de Hooke, le système d'équation obtenu est un système d'équation linéaire s'écrivant sous forme matricielle (pour une barre ou pour une poutre) :

$$[K_b]\{q_b\} = \{F_b\} \quad (5.2)$$

$\{q_b\}$: Vecteur dont les composantes sont les déplacements généralisés (translations ou rotations) au niveau des nœuds de la barre ou de la poutre.

$\{F_b\}$: Vecteur dont les composantes sont les forces généralisées (forces ou moment) agissantes au niveau des nœuds de la barre ou de la poutre.

$[K_b]$: Matrice de rigidité dont les composantes sont constantes et ne dépendent que du matériau (constantes élastiques) et de la géométrie de l'élément (forme, type, orientation) et qui lie les déplacements aux forces agissantes dans ces nœuds.

Par la suite pour une structure composée de plusieurs barres ou de poutres, il s'agira de retrouver la relation de rigidité de la structure complète à calculer qui sera obtenue en procédant à l'assemblage de ces barres ou de ces poutres.

5.2. Notion de rigidité-Relation de rigidité

Nous allons nous intéresser pour commencer aux structures formées d'assemblage de barres et poutre (structures manipulées en R.D.M) et présenter leurs relations de rigidités en utilisant les méthodes matricielles.

5.2.1. Concept de Rigidité

Pour comprendre le calcul matriciel des structures, il est nécessaire de maîtriser la notion de rigidité. Pour illustrer cela, nous intéressons à une structure très simple représentée par un ressort.

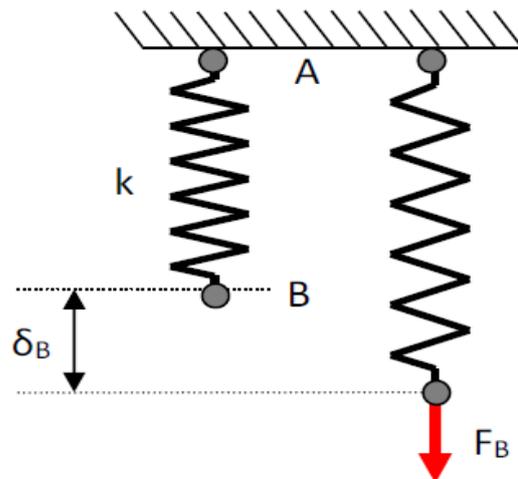


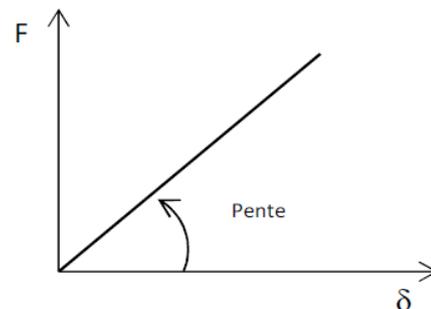
Fig 5.1. Ressort simple chargé en son extrémité.

En effet le ressort possède une caractéristique appelé rigidité notée k telle que lorsque, son extrémité A est fixe et qu'il est soumis à son autre extrémité libre B à une force F_B , (Fig. 5.1), il s'allonge d'une longueur δ_B selon la relation :

$$k \cdot \delta_B = F_B \quad (5.3)$$

Si on trace la relation entre la force F et le déplacement δ pour plusieurs valeurs de F (sans déformer irrémédiablement le ressort pour rester dans le domaine élastique), nous obtenons la courbe ci-contre. Ainsi :

$$k = \frac{F_B}{\delta_B} \quad (5.4)$$



où k représente la pente de la droite, ainsi une première définition nous donne que la rigidité est la pente de la droite dans la relation : force-déplacement.

Mais plus généralement, La rigidité est la caractéristique d'un corps qui indique la résistance à la déformation élastique de ce corps (comme dans notre cas de l'exemple du ressort). Elle est définie comme la force nécessaire pour provoquer un déplacement unitaire. A l'inverse, on définit la souplesse (son inverse : $1/k$) comme étant le déplacement nécessaire pour provoquer une force unitaire. Dans le cas présent, il s'agit d'une rigidité de traction-compression (le ressort peut se comprimer ou s'allonger), plus généralement on peut parler de rigidité de flexion ou de cisaillement lorsque un élément de structure subit un déplacement transversale

suite un effort transversal ou un moment. Dans tous ces cas, puisque la force s'exprime en Newton (N) et le déplacement mètre (m), la rigidité aura pour dimension : newton par mètre (N/m).

Pour être complet, on peut parler aussi de rigidité angulaire en torsion ou en flexion lorsqu'il s'agit de déplacement généralisé de type rotation. Ce type de déplacement de rotation est provoqué par un moment (ou par une force). Ainsi la rigidité angulaire s'exprime comme :

$$k = \frac{M}{\theta} \quad \mathbf{M : moment, \theta \text{ rotation}} \quad (5.5)$$

Dans ce cas, puisque le moment s'exprime en Newton.mètre (N.m) et la rotation en radian (rd), la rigidité aura pour dimension : Newton-mètre par radian : N.m (le radian ne s'écrivant dans la dimension).

En résumé et selon le cas, connaissant la rigidité (ou la souplesse) d'un ressort, d'une barre ou d'une poutre, on peut connaître son déplacement (sa rotation) lorsqu'il est soumis à une force (ou un moment).

5.2.2. Analogie avec une barre

Si on remplace le ressort par une barre de longueur L_0 et de section S et de module d'élasticité E (Fig. 5.2), il suffit alors de retrouver pour la barre son équivalent de la rigidité du ressort, et lui appliquer la même relation de rigidité.

Notons par k_b la rigidité (à déterminer ?) de la barre alors nous obtenons la relation de rigidité suivante qui s'appliquera de la même manière que pour le ressort :

$$k_b \cdot \delta_B = F_B \quad (5.6)$$

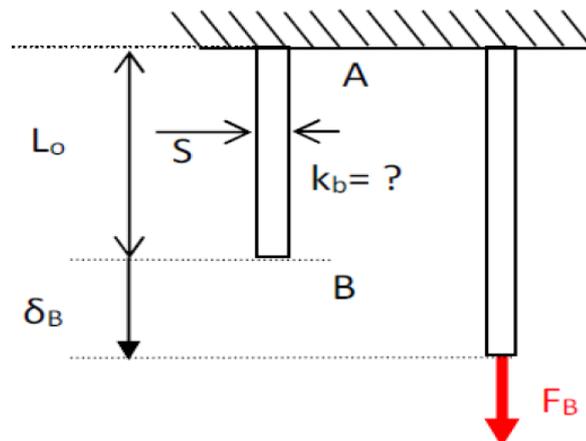
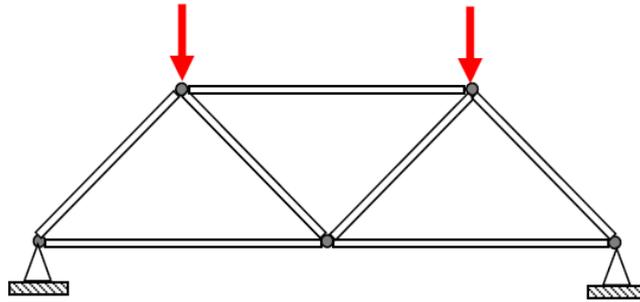


Fig. 5.2. Barre encastée et chargée en son extrémité.

Remarque

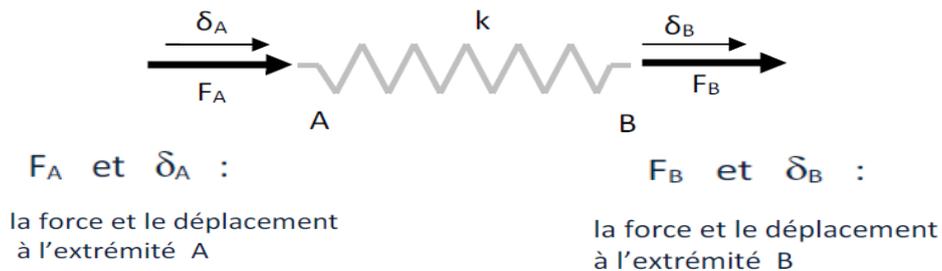
Nous voyons que pour une barre simple, il suffit de connaître sa rigidité et nous pouvons ainsi calculer son déplacement axial lorsqu'elle est soumise à une charge selon son axe en utilisant sa relation de rigidité. Nous allons voir dans ce qui suit, comment utiliser ce principe simple de la relation de rigidité et de l'étendre au calcul d'une structure formée de plusieurs barres comme par exemple la structure de la figure (Fig. 5.3), afin de trouver la relation de rigidité

de la structure elle-même et ainsi trouver ses déplacements lorsque celle-ci est soumise à système de chargement.



5.2.3. Matrice de rigidité d'un ressort

Pour arriver à cette solution, revenons à notre ressort simple et supposons maintenant que ce ressort fasse partie d'un ensemble et que ces deux extrémités A et B sont libres et peuvent se déplacer sous l'action de forces en A et B. Notons par



Ainsi le déplacement en A ne sera plus seulement causé par la force en A mais aussi par la force en B et il en est de même pour le déplacement en B.

La force en A sera égale donc au déplacement δ_A en A par la rigidité en A notée k_{AA} et à laquelle s'ajoute forcément le déplacement δ_B en B par la rigidité en B notée k_{AB} et qui s'écrit, donc :

$$F_A = \delta_A \cdot k_{AA} + \delta_B \cdot k_{AB} \quad (5.7)$$

De même la force en B sera égale au déplacement δ_A en A par la rigidité en A notée k_{BA} à laquelle s'ajoute le déplacement δ_B en B par la rigidité en B notée k_{BB} et qui s'écrit, donc :

$$F_B = \delta_A \cdot k_{BA} + \delta_B \cdot k_{BB} \quad (5.8)$$

Si nous réécrivons ces deux équations sous forme matricielle :

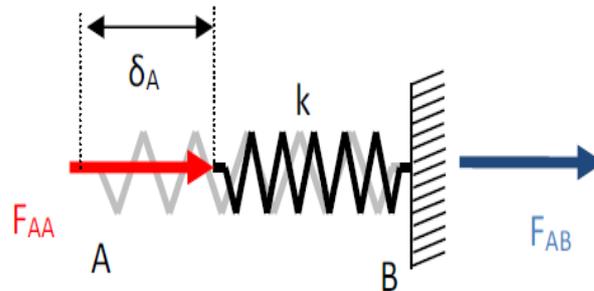
$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

On remarque que nous obtenons une relation de rigidité d'un ressort de rigidité k , dont les deux extrémités peuvent se déplacer. Il reste à déterminer maintenant les termes de rigidités inconnus k_{AA} , k_{AB} , k_{BA} , k_{BB} ?

A partir de ce système d'équations, il est très simple de retrouver la première relation de rigidité. En effet, il suffit d'éliminer du système d'équation, l'équation donnant le déplacement en A puisque dans ce cas le déplacement en A est connu (A encasté) et est égal à zéro pour ne laisser que l'équation donnant le déplacement en B qui est la relation donnée au départ, $F_B = \delta_B \cdot k_{BB}$

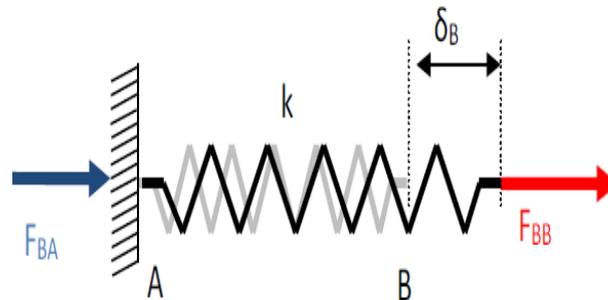
Détermination des termes de rigidités k_{AA} , k_{AB} , k_{BA} , k_{BB}

1- Nous supposons d'abord le cas ou B est fixe et que A se déplace sous l'action d'une Force F_{AA} d'un déplacement δ_A (cas initial déjà vue).



A l'équilibre : $F_{AA} + F_{AB} = 0$, ainsi $F_{AA} = -F_{AB}$ sachant que la relation de rigidité appliquée au ressort de rigidité k dans cette situation (A libre et B fixe) s'écrit (déjà vue) : $F_{AA} = k \cdot \delta_A$ alors $F_{AB} = -k \cdot \delta_A$

2- Nous supposons maintenant le cas contraire ou A est fixe et que B se déplace sous l'action d'une Force F_{BB} d'un déplacement δ_B .



A l'équilibre :

$$F_{BA} + F_{BB} = 0 \quad \text{ainsi} \quad F_{BB} = -F_{BA}$$

Sachant que la relation de rigidité appliquée au ressort de rigidité k dans cette situation (A fixe et B libre) s'écrit :

$$F_{BB} = k \cdot \delta_B \quad \text{alors} \quad F_{BA} = -k \cdot \delta_B$$

Superposons maintenant les deux cas de chargement pour reconstituer le cas initial :

$$\text{au point A :} \quad F_A = F_{AA} + F_{BA} = k \cdot \delta_A - k \cdot \delta_B$$

$$\text{au point B :} \quad F_B = F_{AB} + F_{BB} = -k \cdot \delta_A + k \cdot \delta_B$$

et plus généralement sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

Et donc

$$\begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

La matrice ainsi formée représente la matrice de rigidité du ressort de rigidité k par rapport à ses deux extrémités. Nous pouvons écrire maintenant la relation matricielle de rigidité du ressort par

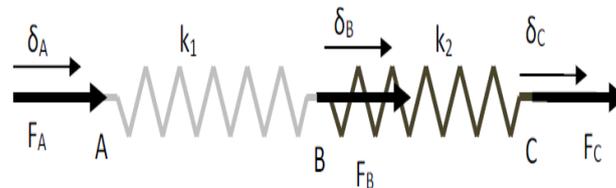
$$[K_r] \cdot \{\delta_r\} = \{F_r\}$$

- $[K_r] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ Matrice de rigidité du ressort AB
- $\{\delta_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$ Vecteur déplacements des points A et B
- $\{F_r\} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix}$ Vecteur forces des points A et B

5.2.4. Matrice de rigidité d'un ensemble de plusieurs ressorts

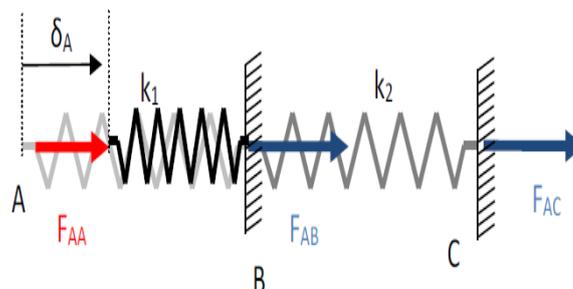
Supposons maintenant qu'on cherche la relation de rigidité plusieurs ressorts connectés entre eux :

Cas de 2 ressorts



Même procédure que pour un 1 seul ressort. Nous bloquons deux points et nous laissons libre le troisième

1^{ère} cas: Le point A se déplace sous l'action de la force F_{AA} d'un déplacement δ_A , les points B et C sont bloqués (dans ce cas le ressort k_1 se comprime et le ressort k_2 ne se déforme pas):



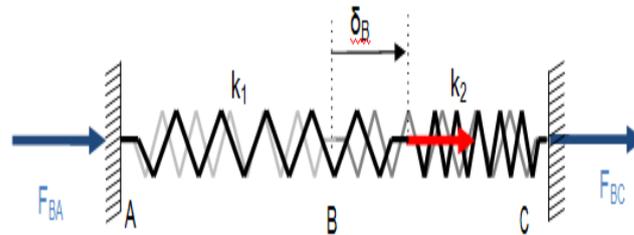
Ainsi, à l'équilibre:

$$F_{AA} + F_{AB} = 0 \quad \text{ainsi } F_{AA} = -F_{AB} \quad \text{et } F_{AC} = 0$$

La relation de rigidité appliquée au ressort AB de rigidité k_1 s'écrit (A libre et B fixe) :

$$F_{AA} = k_1 \cdot \delta_A \quad \text{alors } F_{AB} = -k_1 \cdot \delta_A$$

2^{ème} cas : Le point B se déplace sous l'action de la force F_{BB} d'un déplacement δ_B , les points A et C sont bloqués : (dans ce cas le ressort k_1 s'allonge et le ressort k_2 se comprime)



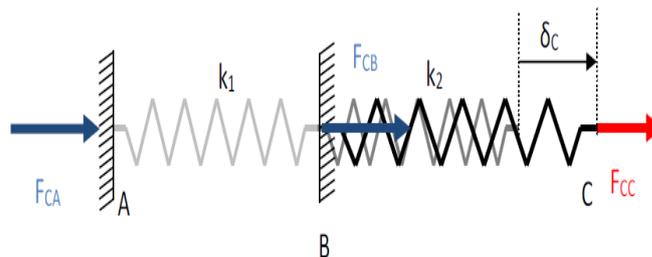
La relation de rigidité appliquée au ressort AB de rigidité k_1 ainsi qu'au ressort BC de rigidité k_2 s'écrit pour la même force appliquée en B (situation où A fixe et B libre pour le ressort k_1 et B libre et C fixe pour le ressort k_2):

$$F_{BB} = k_1 \cdot \delta_B + k_2 \cdot \delta_B$$

- à l'équilibre du ressort AB $F_{BA} = -k_1 \cdot \delta_B$

- de même pour le ressort BC $F_{BC} = -k_2 \cdot \delta_B$

3^{ème} cas : Le point C se déplace sous l'action de la force F_{CC} d'un déplacement δ_C , les points A et B sont bloqués : (dans ce cas le ressort k_1 reste fixe et le ressort k_2 s'allonge)



ainsi, à l'équilibre : $F_{CB} + F_{CC} = 0$ ainsi $F_{CC} = -F_{CB}$ et $F_{CA} = 0$ la relation de rigidité appliquée au ressort BC de rigidité k_2

s'écrit (C libre et B fixe) :

$$F_{CC} = k_2 \cdot d_C$$

alors $F_{CB} = -k_2 \cdot d_C$

Superposons maintenant les trois cas de chargement pour reconstituer le cas initial :

Ainsi au point A : $F_A = F_{AA} + F_{BA} + F_{CA} = k_1 \cdot \delta_A - k_1 \cdot \delta_B + 0$

au point B : $F_B = F_{AB} + F_{BB} + F_{CB} = -k_1 \cdot \delta_A + (k_1 + k_2) \cdot \delta_B - k_2 \cdot \delta_C$

au point C : $F_C = F_{AC} + F_{BC} + F_{CC} = 0 - k_2 \cdot \delta_B + k_2 \cdot \delta_C$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix}$$

On vient de montrer que pour l'ensemble des deux ressorts, la relation de rigidité par rapport aux trois points (A, B, C) s'écrit :

$$\{F_r\} = [K_r] \cdot \{\delta_r\}$$

$$[K_r] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \text{ Matrice de Rigidité de l'ensemble des ressorts AB et BC}$$

$$\{\delta_r\} = \begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix} \text{ Vecteur déplacements des points A, B, C}$$

$$\{F_r\} = \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} \text{ Vecteur forces des points A, B, C}$$

Remarque

On voit que cette méthode simple a permis de trouver l'expression, en fonction de rigidités des deux ressorts, de leur relation de rigidité. Si nous augmentons le nombre de ressorts, la procédure reste la même. Cependant elle s'avère non pratique (trop fastidieuse) !! Elle devient carrément très compliquée si jamais les ressorts ne sont plus alignés.

Par conséquent, il est nécessaire d'opter pour une autre démarche plus générale et plus simple.

Solution possible

Puisque on connaît pour un ressort seul, la relation de rigidité, est ce qu'il ne saurait pas possible d'établir la relation de rigidité pour un ensemble de ressorts directement à partir des relations élémentaires de chaque ressort ?

Une analyse de l'expression de la relation de rigidité des deux ressorts montre qu'il suffit d'écrire chaque relation de rigidité d'un ressort en fonction de toutes les forces et déplacements de l'ensemble des ressorts et de procéder ensuite à une simple superposition : Cette étape s'appelle : assemblage de rigidité.

Ainsi, prenons le cas des deux ressorts précédent, alors :

- pour le ressort AB, la relation de rigidité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix} \quad \text{qui peut s'écrire aussi} \quad \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix}$$

- pour le ressort BC, la relation de rigidité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix} \quad \text{qui peut s'écrire aussi} \quad \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice de rigidité des deux ressorts s'obtient en sommant (en assemblant) simplement les deux matrices de rigidités des ressorts AB et BC réécrites en fonctions de tous les déplacements et forces de l'ensemble, ainsi :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

En regardant bien l'expression de la matrice de rigidité de l'ensemble, on s'aperçoit que cela consiste plus généralement à considérer que pour un nœud commun au deux ressorts (le point B dans ce cas) la rigidité totale pour ce nœud, est la somme des rigidités provenant de chaque ressort : (k_1+k_2) . Pour les nœuds A et C, ils gardent leurs rigidités et elle sera celle de l'ensemble en ces nœuds.

Remarque

Cette sommation a été possibles car les deux ressorts sont alignés (même repère). Cela voudra dire que dans le cas contraire il faut d'abord transformer ces relations dans un même repère avant de procéder à l'assemblage. Cet aspect sera vu plus en détails par la suite.

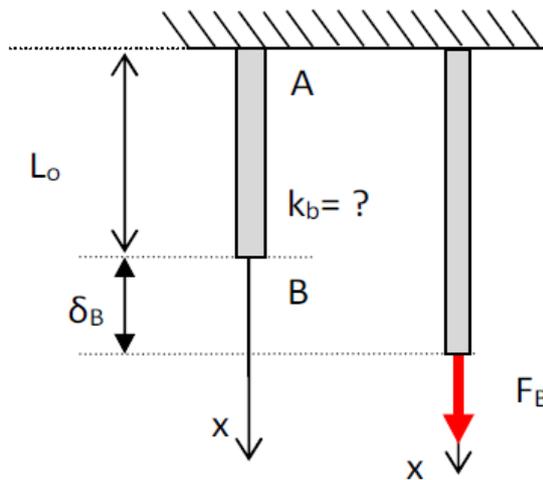
5.3. Matrice de rigidité d'une barre et d'un ensemble de barres

Nous allons procéder de la même manière pour traiter une barre ou un ensemble de barres formants une structure pour établir leurs relations de rigidités. En réalité la procédure aboutit au même résultat, il reste seulement à définir pour une barre, l'expression de la relation de rigidité.

- Rigidité d'une barre de longueur L, de section S et de module d'élasticité E (Fig. 5.4) :

En élasticité 1D, nous avons la relation de loi de Hooke qui s'écrit selon l'axe des (x) :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$



σ_x : contrainte selon l'axe (x) qui s'écrit aussi en fonction de la force en B :

$$\sigma_x = F_B/S$$

ϵ_x : déformation selon l'axe (x) qui s'écrit aussi en petite déformation :

$$\epsilon_x = \delta_B/L_0$$

E : module d'élasticité

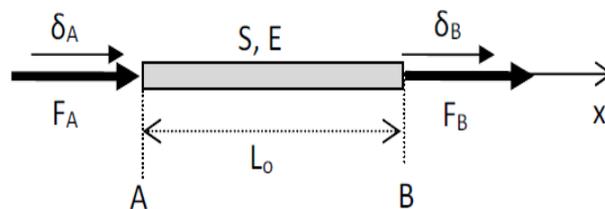
Ainsi, on peut en déduire l'expression : $F_B = \frac{E.S}{L_0} \cdot \delta_B$

Et par identification avec la relation de rigidité d'un ressort, la rigidité k pour une barre s'écrit :

$$k = \frac{E.S}{L_0}$$

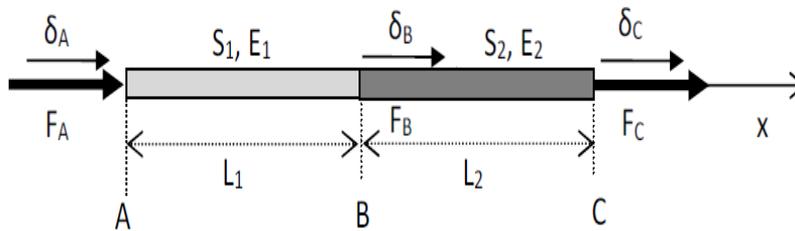
Ainsi et s'agissant de la barre, tout ce qui a été démontré pour le ressort sera appliqué pour la barre, il suffit de remplacer la rigidité k du ressort par celle de la barre.

- Matrice de rigidité d'une barre de caractéristique (L_0, S, E), dans le repère (x)



$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} \quad \text{ou plus précisément} \quad \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E.S}{L_0} & -\frac{E.S}{L_0} \\ -\frac{E.S}{L_0} & \frac{E.S}{L_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

- Matrice de rigidité de deux barres de caractéristiques (L_1, S_1, E_1) et (L_2, S_2, E_2)



Par analogie avec l'assemblage de deux ressorts :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

ou plus précisément

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} & -\frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} & 0 \\ \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} & \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} + \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} & -\frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} & \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

On remarque que tant que les barres assemblées sont alignées (référéncée dans le même repère (x)), la procédure est assez simple. Il suffit de sommer au niveau des nœuds communs à plusieurs éléments, les termes de rigidités correspondants.

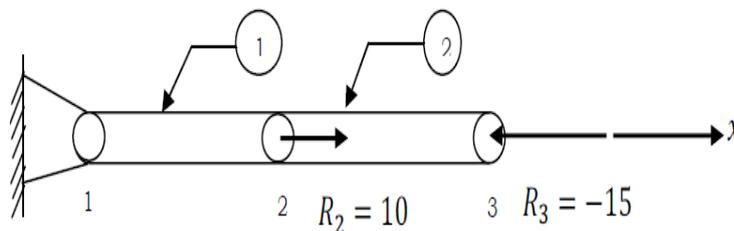
Remarque

A partir de maintenant nous travaillerons seulement avec des structures formées de barres, en effet le ressort nous a seulement permis d'introduire la notion de rigidité et de comprendre le processus d'assemblage et de l'appliquer aux barres par analogie.

Application

Soit la structure suivante :

1. Trouver les déplacements u_2 et u_3 des nœuds 2 et 3.
2. Trouver la force résultante R_1 au nœud 1.



Résolution

Pour l'élément (1), on peut écrire

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Pour l'élément (2), on a

$$\begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On a : $k_1 = k_2 = k = \frac{AE}{L}$

En élargissant chacune de ces équations on a :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

En les sommant on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} + 0 \\ F_{21} + F_{22} \\ 0 + F_{32} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Avec l'encastrement en (1), on a $u_1 = 0$ et on a :

$$(1) \quad \begin{Bmatrix} R_1 \\ 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On peut y extraire :

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{Bmatrix} -5 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'où} \quad u_2 = \frac{-5 \cdot L}{AE} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{-20 \cdot L}{AE}$$

$$\text{De (1), on a :} \quad R_1 = \frac{AE}{L}(0) - \frac{AE}{L}(u_2) + \frac{AE}{L}(0) \cdot u_3 = -\frac{AE}{L} \left(\frac{-5L}{AE} \right) = 5$$

D'où $R_1=5$

5.4. Structures formées de barres non alignées (Notion de repère local et global)

Nous avons remarqué que l'utilisation d'axes liée à l'élément est très utile pour définir la rigidité élémentaire. Ce repère qui est défini (donc choisi) comme ayant le nœud numéroté 1 en son origine et le nœud 2 sur l'axe des (x) à une distance L est appelé repère local. Ce repère présente l'avantage d'être toujours le même pour toutes les barres pour avoir la même définition de la relation de rigidité et surtout de pouvoir y revenir et y définir les efforts internes (effort Normal dans le cas de la barre).

Dans le cas d'une structure composée d'un assemblage de plusieurs barres, il est nécessaire de recourir à un système d'axes dit global. Ce système présentera l'avantage d'être le même pour tous les éléments. Il permet lors de l'assemblage que la rigidité en ce nœud soit obtenue en sommant les rigidités provenant de toutes les barres y aboutissantes et d'exprimer ainsi que les

déplacements de ce nœud commun à plusieurs barres sont les mêmes pour tous ces barres en ce nœud.

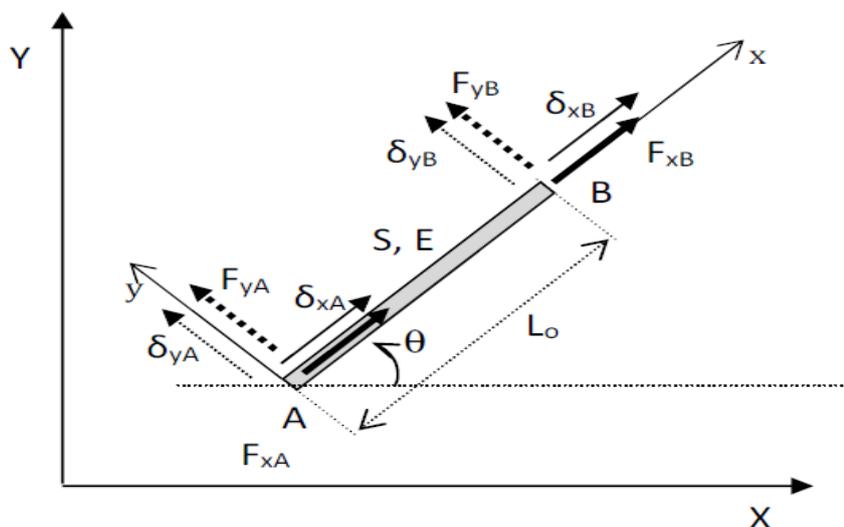
Ainsi le repère global sert à définir les déplacements globaux qui ont donc un sens global (on dit déplacement de la structure) contrairement aux efforts qui eux auront un sens local car défini dans un repère local (on dit efforts dans les barres).

- **Assemblage de barres non alignées**

Intéressons nous maintenant aux structures formées d'éléments de barres qui ne sont pas alignées et n'ont donc pas le même repère. La règle générale d'assemblage (déjà vue) consistant à sommer les termes de rigidités d'un nœud commun plusieurs élément reste valable mais aux conditions évidentes que les termes de rigidité qu'il faudra sommer, soit exprimer dans la même référence (dans le même repère).

Dans ces conditions, nous présentons dans ce qui suit la procédure à suivre pour pouvoir exprimer les rigidités et plus généralement les matrices de rigidité d'élément de barres dans un même repère.

Pour cela prenons le cas de notre élément de barre (appartenons à une structure) (Fig. 5.5) placée dans un repère (x,y) par rapport auquel on écrit la relation de rigidité, qu'on nommera à partir de maintenant repère local et transformons cette relations dans un autre repère qu'on nommera repère global (X,Y) par rapport auquel (x,y) est orienté d'un angle θ , et qui servira de repère commun à toutes les autres barres et finalement à la structure elle-même.



Relation de rigidité dans le repère local (x) (déjà vue)

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot S}{L_0} & -\frac{E \cdot S}{L_0} \\ -\frac{E \cdot S}{L_0} & \frac{E \cdot S}{L_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{xB} \end{Bmatrix}$$

Ou plus simplement

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{xB} \end{Bmatrix}$$

Relation de rigidité dans le repère local (x,y)

En fait c'est le même repère que le précédent, on rajoute l'axe (y) même s'il n'y a pas de (d.d.l) selon cet axe. Il s'agit d'écrire la relation de rigidité en fonction des (d.d.l) selon (x) : δ_{xA} et δ_{xB} (la rigidité existe selon cet axe) auxquels correspondent F_{xA} et F_{xB} et des (ddl) selon (y) (même s'ils n'existent pas car ils sont nuls) et qu'on notera δ_{yA} et δ_{yB} et auxquels correspondent des forces qu'on notera F_{yA} et F_{yB} représentés en pointillé sur la figure (Fig. 5.6).

Ainsi avec les hypothèses précédentes on aboutit à la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \\ F_{yA} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

Remarques

1) cette relation de rigidité est la même que celle écrite selon l'axe (x) seul. On voit bien que les équations rajoutées n'ont pas d'influence puisqu'elles introduisent des rigidités qui sont nulles selon l'axes de (y).

2) par commodité, on convient de réarranger le vecteur des (d.d.l) en optant pour l'ordre suivant : les (d.d.l) sont ordonnés selon l'ordre croissant des nœuds et ensuite pour celui des axes (d'abord les (d.d.l) selon (x) ensuite les (d.d.l) selon (y) etc....). Ce qui donne pour notre expression :

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

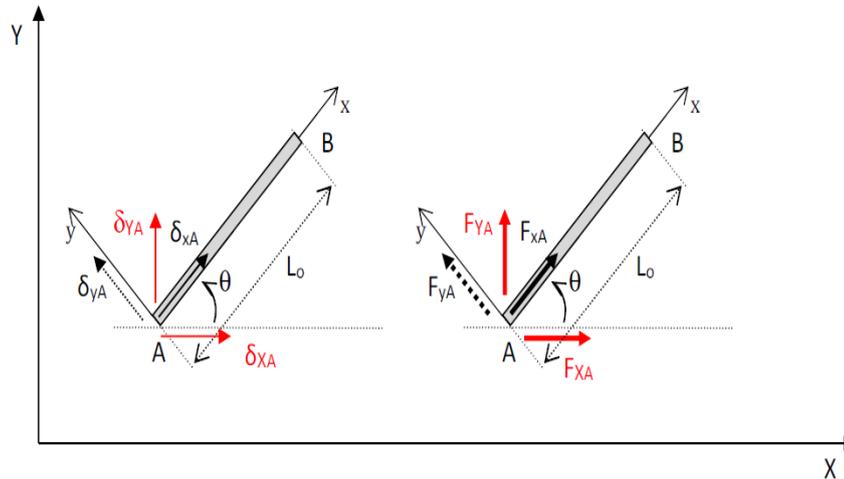
Ou plus simplement, la relation de rigidité dans le repère local

$$\{F_{xy}\} = [K_{xy}] \cdot \{\delta_{xy}\}$$

Avec

$$\{F_{xy}\} = \begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} \quad [K_{xy}] = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\delta_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

Relation de rigidité dans le repère global (X,Y)



Pour trouver la relation dans le repère global (X,Y), projetons les (d.d.l) selon (x,y) sur le repère (X,Y). Pour ne pas encombrer le schéma, nous développons cette projection pour les (d.d.l) du nœud A seulement car cette projection est identique pour les (d.d.l) du nœud B. les (d.d.l) selon (X,Y) sont représentés en rouge sur la Fig. 5.7.

Ainsi : pour le vecteur déplacement on obtient :

$$\begin{aligned}\delta_{xA} &= \delta_{xA} \cos\theta + \delta_{yA} \sin\theta \\ \delta_{yA} &= -\delta_{xA} \sin\theta + \delta_{yA} \cos\theta\end{aligned}$$

De même pour le vecteur Force :

$$\begin{aligned}F_{xA} &= F_{xA} \cos\theta + F_{yA} \sin\theta \\ F_{yA} &= -F_{xA} \sin\theta + F_{yA} \cos\theta\end{aligned}$$

Nous obtenons la même chose pour le nœud B :

$$\begin{aligned}\delta_{xB} &= \delta_{xB} \cos\theta + \delta_{yB} \sin\theta \\ \delta_{yB} &= -\delta_{xB} \sin\theta + \delta_{yB} \cos\theta \\ F_{xB} &= F_{xB} \cos\theta + F_{yB} \sin\theta \\ F_{yB} &= -F_{xB} \sin\theta + F_{yB} \cos\theta\end{aligned}$$

L'ensemble de la projection pour les nœuds A et B s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix}$$

Ou plus simplement :

$$\{\delta_{xy}\} = [R].\{\delta_{XY}\} \quad ; \quad \{F_{xy}\} = [R].\{F_{XY}\}$$

Avec [R] appelée matrice de transformation (ou de rotation)

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Revenons maintenant à l'expression initiale de la rigidité dans le repère local (x,y)

$$\{F_{xy}\} = [K_{xy}].\{\delta_{xy}\}$$

En procédant aux substitutions des vecteurs forces et déplacements, on obtient

$$[R].\{F_{XY}\} = [K_{xy}]. [R].\{\delta_{XY}\}$$

Qu'on peut transformer en multipliant les deux membres par $[R]^{-1}$ sachant $[R]^{-1} [R] = [I]$ ([I] étant la matrice identité)

$$[R]^{-1}[R].\{F_{XY}\} = [R]^{-1}. [K_{xy}]. [R].\{\delta_{XY}\}$$

Et qui se simplifie en $\{F_{XY}\} = [R]^{-1}. [K_{xy}]. [R].\{\delta_{XY}\}$

Ainsi si nous notons par $[K_{XY}]$, la matrice de rigidité dans le repère (X,Y) la relation de rigidité s'écrit de la même manière que dans le repère (x,y) , ainsi

$$\{F_{XY}\} = [K_{XY}].\{\delta_{XY}\}$$

Et finalement, par identification on arrive à trouver la relation de rigidité dans le repère global en fonction de la rigidité dans le repère local telle que

$$[K_{XY}] = [R]^{-1}. [K_{xy}]. [R]$$

Remarque

Dans le cas qui nous intéresse, la transformation de (x,y) vers (X,Y) définie par la matrice [R] est orthogonale. Ainsi nous utilisons la propriété qui donne que l'inverse d'une matrice d'une transformation orthogonale est égale à sa transposé, alors

$$[R]^{-1} = [R]^T \quad [K_{XY}] = [R]^T. [K_{xy}]. [R]$$

Remarque

comme la matrice est simple, on peut facilement développer cette transformation pour la barre et trouver directement l'expression de la matrice de rigidité dans un repère global quelconque (X,Y) telle que le repère local (x,y) à l'élément soit orienté d'un angle q par rapport à (X,Y) Ce qui donne en notant par : c=cosq et s=sinq,

$$[K_{XY}] = k \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

5.5. Procédure d'assemblage des barres

En général, la procédure d'assemblage se fait de la même manière que ce qui a été vue auparavant pour les barres. Cela revient à sommer les termes de rigidités des éléments au niveau de leurs nœuds communs (d.d.l) par (d.d.l).

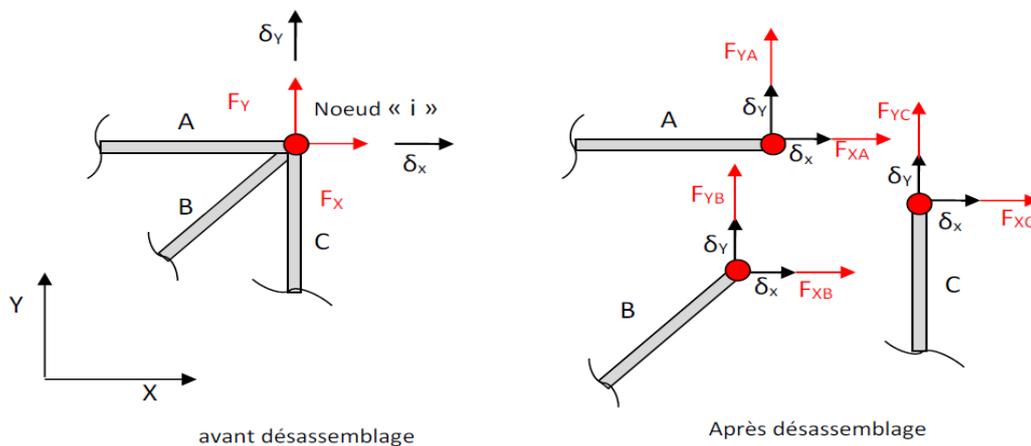
L'essentiel étant de s'assurer de n'assembler que des matrices de rigidités préalablement transformées dans le même repère.

De manière générale, si nous devons donner une définition à l'assemblage, nous pouvons dire que cela revient à exprimer que :

les composantes du déplacement d'un nœud « i » d'une structure sont les mêmes pour tous les éléments connectés à ce nœud « i » pris séparément, car il est déterminé par une seule rigidité obtenue en sommant (lors de l'assemblage) toutes les rigidités en "i" provenant de tous les éléments qui y sont connectés

les composantes des efforts en ce nœud doivent s'équilibrer avec les mêmes composantes des efforts provenant des différents éléments pris séparément et connectés en ce nœud. Cela veut dire que l'effort dans une direction pour un nœud d'une structure est égal à la somme des efforts provenant de chaque élément et dans cette même direction (Fig. 5.8).

Ainsi, il est aussi nécessaire de procéder à l'assemblage du vecteur forces consistant en la sommation des forces (si elles existent) pour chaque nœud provenant des éléments qui y sont connectés



On voit bien que le nœud « i » après désassemblage, garde pour chaque élément qui y est connecté le même déplacement d_A et d_B , alors que pour les forces, elles sont telles qu'à l'équilibre nous obtenons:

$$F_x = F_{xA} + F_{xB} + F_{xC}$$

$$F_y = F_{yA} + F_{yB} + F_{yC}$$

Résumé

La Procédure d'assemblage concerne :

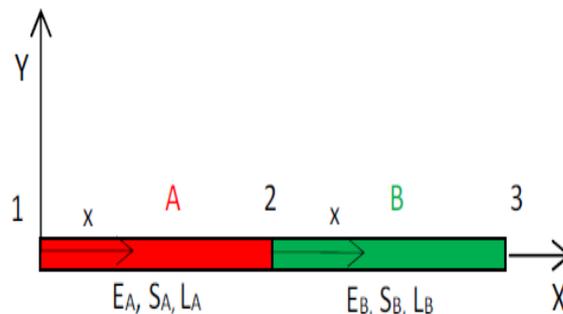
- l'Assemblage des matrices de rigidités
- l'Assemblage des vecteurs forces

5.6. Exemples d'assemblages avec des éléments de barres

a. Barres alignées

Soit un barreau AB modélisé par deux éléments de barre (A) et (B). Dans ce cas, les repères locaux (x) des deux éléments de barre coïncident avec (X,Y) choisi pour le Barreau comme repère global (voir Figure).

les matrices de rigidités des deux éléments s'écrivent dans le repère (x)



$$\text{Barre A : } \begin{bmatrix} k_A & -k_A \\ -k_A & k_A \end{bmatrix} \text{ avec } k_A = \frac{E_A S_A}{L_A}$$

$$\text{Barre B : } \begin{bmatrix} k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \text{ avec } k_B = \frac{E_B S_B}{L_B}$$

L'assemblage dans ce cas se fera dans le repère global (X,Y) sans transformation des matrices de rigidité des deux barres. En effet, les repères locaux (x) des barres sont confondus avec le repère global (X,Y).

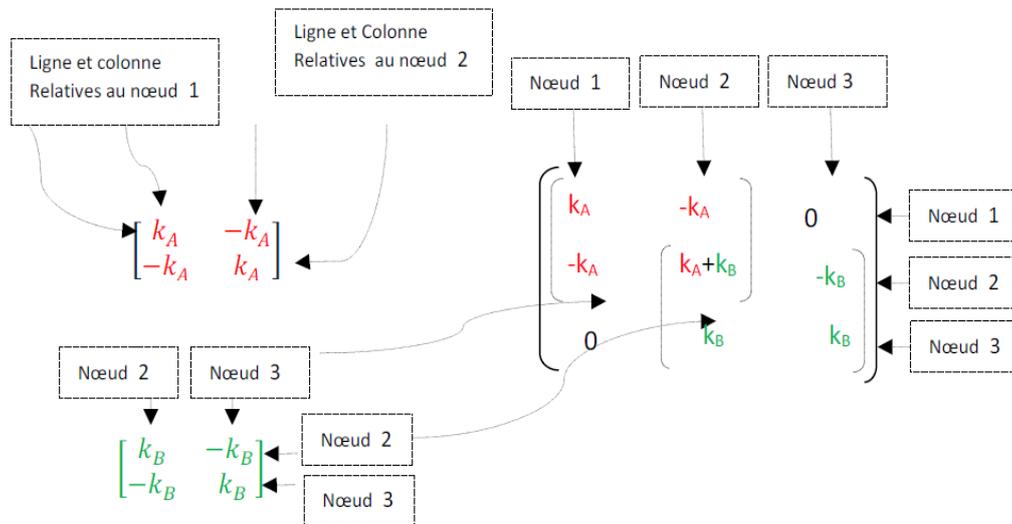
Remarque

On remarque que dans ce cas seul le (d.d.l) de déplacement axiale intervient (pas de projection de déplacement) car les barres sont alignées sur l'axe (X).

Les matrices de rigidités des barres A et B contiennent respectivement les rigidités relatives aux d.d.l des nœuds 1 et 2 et des nœuds 2 et 3. Ainsi pour la barre A, la ligne 1 et la colonne 1 de la matrice de rigidité, correspondent au d.d.l du déplacement axial au nœud 1 et de même, la ligne 2 et la colonne 2 de la matrice de rigidité, correspondent au d.d.l du déplacement axial au nœud 2 (même raisonnement pour la barre B et les nœuds 2 et 3).

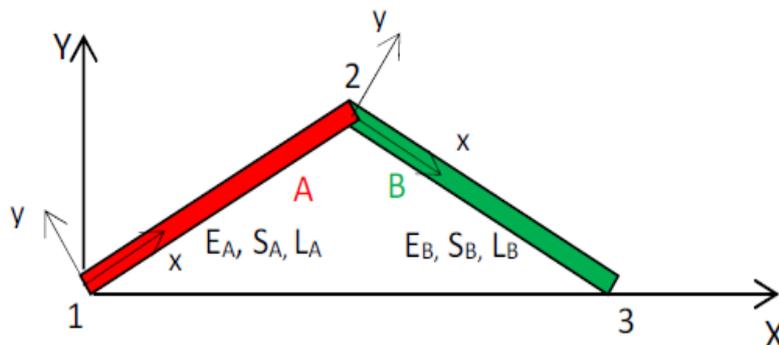
Lors de l'assemblage, le nœuds 2 est commun aux deux barres ainsi la matrice de rigidité de la structure assemblée (le barreau) contiendra les rigidités des nœuds 1, 2 et 3 issues des deux matrices de rigidité comme illustré sur le schéma suivant : il suffit pour procéder à l'assemblage de former la matrice de rigidité de la structure (le barreau) en plaçant les termes de rigidités des barres (en respectant les numéros des nœuds) dans la matrice de rigidité de la

structure et en veillant à sommer les rigidités qui proviennent d'un même nœud (comme dans notre cas : le nœud 2).



b. Barres non alignées

Les matrices de rigidité des éléments A et B s'écrivent dans les repères locaux (x,y) :



Matrice de rigidité de l'élément A sur (x,y)

$$\begin{bmatrix} k_A & 0 & -k_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & 0 & k_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité de l'élément B sur (x,y)

$$\begin{bmatrix} k_B & 0 & -k_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_B & 0 & k_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir procéder à l'assemblage, il faut que les deux matrices de rigidités des éléments A et B soient transformées dans le repère global commun aux deux éléments (X,Y),

Ainsi et après transformation dans le repère global, notons par :

Matrice de rigidité pour l'élément A sur (X,Y)

$$\begin{bmatrix} k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} & k_A^{14} \\ k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} & k_A^{24} \\ k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} & k_A^{34} \\ k_A^{41} & k_A^{42} & k_A^{43} & k_A^{44} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité pour l'élément B sur (X,Y)

$$\begin{bmatrix} k_B^{11} & k_B^{12} & k_B^{13} & k_B^{14} \\ k_B^{21} & k_B^{22} & k_B^{23} & k_B^{24} \\ k_B^{31} & k_B^{32} & k_B^{33} & k_B^{34} \\ k_B^{41} & k_B^{42} & k_B^{43} & k_B^{44} \end{bmatrix}$$

Remarque

La différence avec l'exemple précédent est que lors de la transformation de (x,y) vers (X,Y), il y a création (par projection) de deux (d.d.l) par nœud, selon X et selon Y.

Ainsi pour l'élément A :

Colonnes relatives au nœud 1 (ddl u_1 et v_1)	Colonnes relatives au nœud 2 (ddl u_2 et v_2)
Lignes relatives au nœud 1 (ddl u_1 et v_1)	Lignes relatives au nœud 2 (ddl u_2 et v_2)
$\begin{bmatrix} k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} & k_A^{14} \\ k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} & k_A^{24} \\ k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} & k_A^{34} \\ k_A^{41} & k_A^{42} & k_A^{43} & k_A^{44} \end{bmatrix}$	

Et pour l'élément B :

	Colonnes relatives au nœud 2 (ddl u_2 et v_2)	Colonnes relatives au nœud 3 (ddl u_3 et v_3)
Lignes relatives au nœud 2 (ddl u_2 et v_2)	(]
Lignes relatives au nœud 3 (ddl u_3 et v_3)		
	$\begin{bmatrix} k_B^{11} & k_B^{12} & k_B^{13} & k_B^{14} \\ k_B^{21} & k_B^{22} & k_B^{23} & k_B^{24} \\ k_B^{31} & k_B^{32} & k_B^{33} & k_B^{34} \\ k_B^{41} & k_B^{42} & k_B^{43} & k_B^{44} \end{bmatrix}$	

Après assemblage (selon le principe déjà vu) nous obtenons :

	nœud 1 (ddl u_1 et v_1)	nœud 2 (ddl u_2 et v_2)	nœud 3 (ddl u_3 et v_3)
nœud 1 (ddl u_1 et v_1)	(]]
nœud 2 (ddl u_2 et v_2)			
nœud 3 (ddl u_3 et v_3)			
	$\begin{bmatrix} k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} & k_A^{14} & 0 & 0 \\ k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} & k_A^{24} & 0 & 0 \\ k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} + k_B^{11} & k_A^{34} + k_B^{12} & k_B^{13} & k_B^{14} \\ k_A^{41} & k_A^{42} & k_A^{43} + k_B^{21} & k_A^{44} + k_B^{22} & k_B^{23} & k_B^{24} \\ 0 & 0 & k_B^{31} & k_B^{32} & k_B^{33} & k_B^{34} \\ 0 & 0 & k_B^{41} & k_B^{42} & k_B^{43} & k_B^{44} \end{bmatrix}$		

Chapitre 6

POUTRES CONTINUES SUR APPUIS ÉLASTIQUES

6.1. Introduction

On appelle poutres hyperstatiques, les poutres dont les réactions aux appuis ne peuvent pas être déterminées par les seules équations de la statique. Le degré d'hyperstaticité de la poutre est égal au nombre d'inconnues surabondantes par rapport aux 3 équations d'équilibre de la statique. Les exemples de systèmes hyperstatiques sont nombreux: la majorité des structures portantes de génie civil sont hyperstatiques comme les portiques auto-stables, les poutres continues sur plusieurs appuis etc ... (Fig. 6.1).

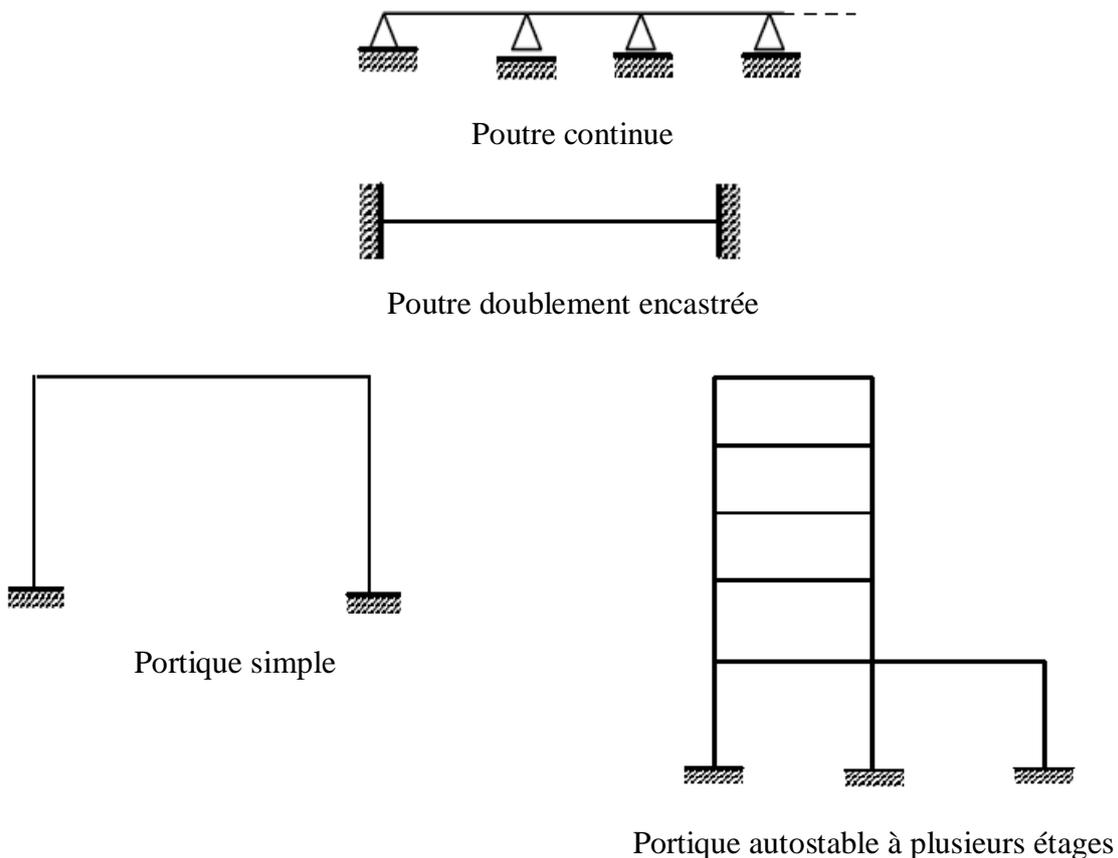


Figure 6.1

6.2. Méthode des trois moments

La méthode des trois moments s'applique aux systèmes dits poutres continues. On suppose que l'effet de l'effort tranchant est négligé.

6.3. Principe de la méthode des trois moments

Cette méthode consiste à déterminer les moments fléchissant dans le cas des poutres continues. C'est-à-dire des poutres qui reposent sur plus de deux appuis.

Il existe plusieurs façons pour déterminer le degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

$$d = r - 3 \quad (6.1)$$

r : nombre de liaisons (réactions)

Ou bien :

$$d = n_a - 3 \quad (6.2)$$

n_a : nombre d'appuis

Ou bien :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

Exemples :

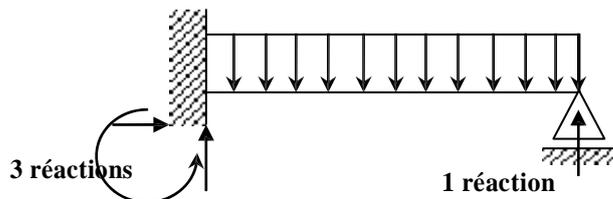
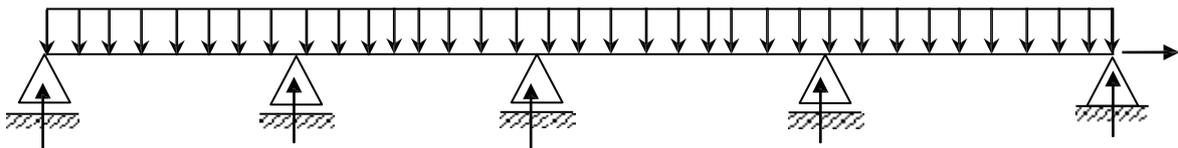


Figure 6.2. Poutre sur 2 appuis (1 Encastrement et 1 simple)



$$d = r - 3 = 6 - 3 = 3$$

Figure 6.3. Poutre sur 5 appuis (1 double et 4 simples)

6.4. Calcul des moments fléchissant dans les appuis

- Considérons l'exemple de la figure 6.3. Le degré d'hyperstaïcité de cette poutre est égal à $N-2$ où N représente le nombre d'appuis
- Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.
- Dans chaque appui nous avons deux rotations (une à gauche et l'autre à droite).
- Pour une poutre de $N-1$ travées, on numérote les appuis de 1 à N . La travée l_i est comprise entre les appuis (i) et $(i+1)$, avec une rigidité EI_i .

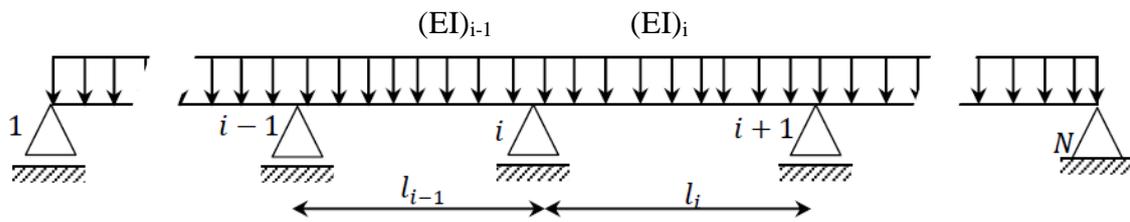


Figure 6.4. Poutre continue sur N appuis

Une poutre continue comportant $N-1$ travées peut être décomposée en $N-1$ poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis. Nous obtenons alors pour la travée $i-1$ et i :

- M_{i-1} désigne le moment sur l'appui A_{i-1}
- M_i désigne le moment sur l'appui A_i
- M_{i+1} désigne le moment sur l'appui A_{i+1}

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = 0$$

On a deux types de rotations :

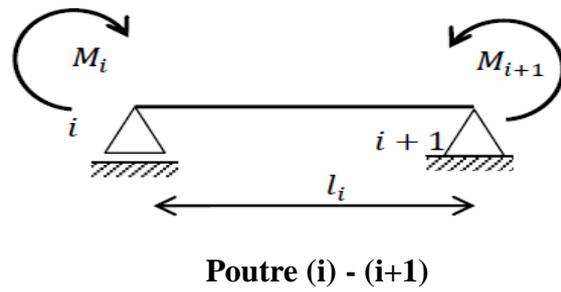
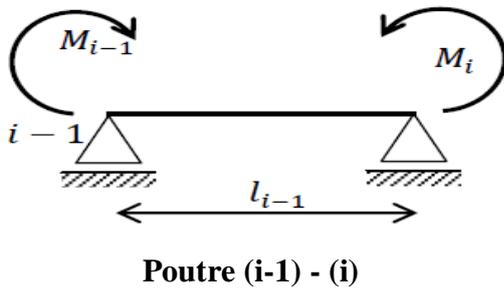
- Rotation due aux charges extérieures $(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$
- Rotation due aux moments fléchissants $(\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id})$

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0$$

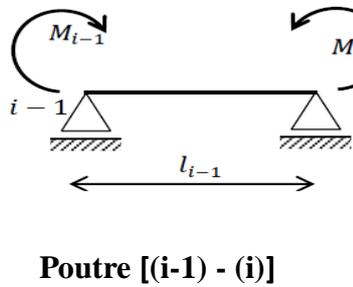
A- Rotations dues aux moments fléchissants $(\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id})$

Les déformations en général et spécifiquement les rotations dues aux moments fléchissants peuvent être évaluée par l'une des méthodes analytiques connues comme par exemple : la méthode de Castigliano ou Maxwell-Mohr et aussi la méthode graphique de Veretchaguine.

Ici le calcul des rotations est effectué par la méthode de Mohr.



A1- Poutre (i-1) - (i)



Par le principe de superposition

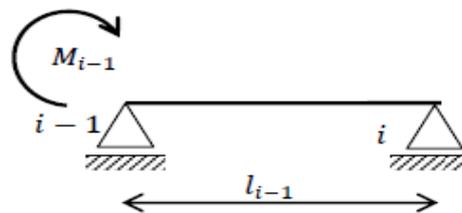
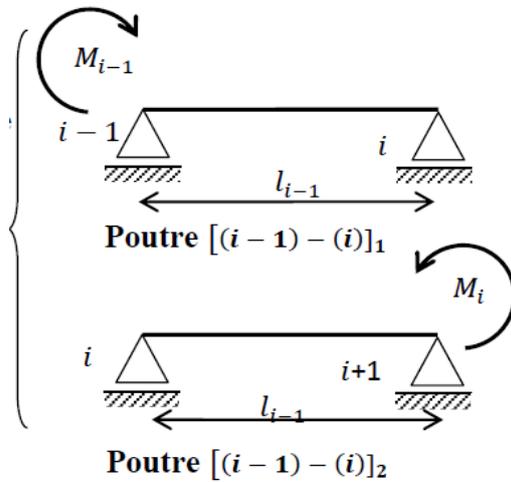
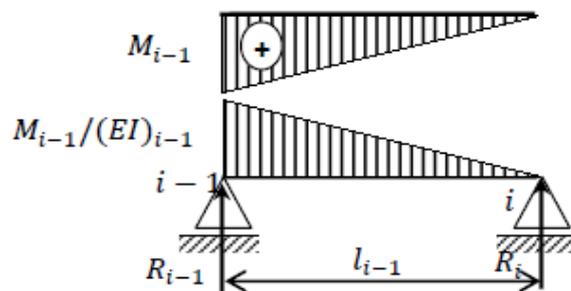


Diagramme des moments fléchissant Poutre auxiliaire



$$\sum M/(i-1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{1}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_i = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

Poutre [(i-1) - (i)]

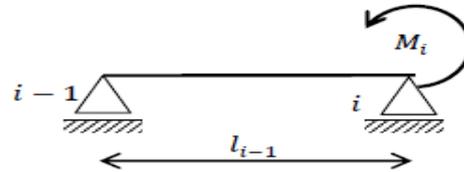
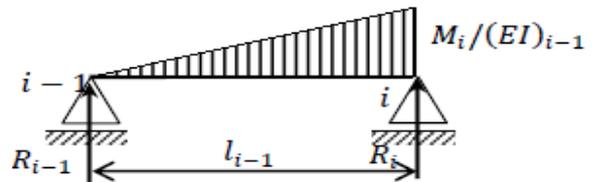


Diagramme des moments fléchissant



Poutre auxiliaire



$$\sum M/(i-1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{2}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_{i-1} = \overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

$$\overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

A2- Poutre (i) - (i+1)

De la même pour la poutre (i) - (i+1)

$$\overline{\varphi}_{id} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i$$

$$\sum Rotations/point (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0 \tag{6.3}$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} M_i \left(\frac{l_{i-1}}{(EI)_{i-1}} + \frac{l_i}{(EI)_i} \right) + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

Cette équation est appelée méthode des trois moments (dite aussi méthode des rotations) ou aussi méthode de Clapeyron. Elle permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires des poutres continues.

Si toutes les travées de la poutre ont la même rigidité EI la relation devient :

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_i)M_i + M_{i+1}l_i = -6EI(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) \quad (6.4)$$

B- Rotations dues aux charges extérieures

Le tableau suivant résume les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures :

Tableau 2.1 : les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures.

Schéma statique (géométrie et chargement)	$-6EI\varphi_{i-1}$	$-6EI\varphi_i$
	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$
	$-\frac{3}{8}Pl^2$	$-\frac{3}{8}Pl^2$
	$-\frac{1}{24}ql^3$	$-\frac{1}{24}ql^3$
	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$

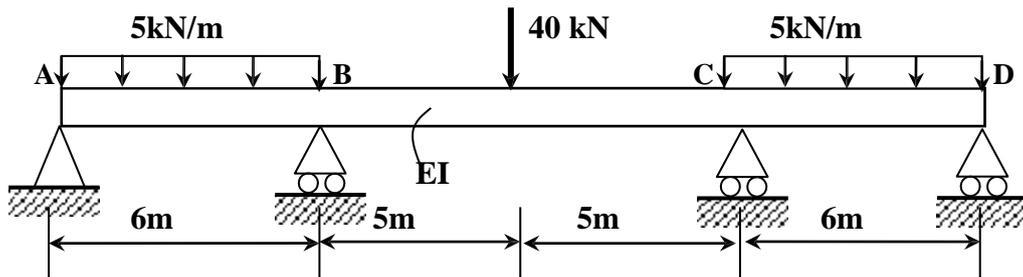
6.5. Exercices

Exercice 1

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité EI constante. Elle supporte une charge répartie de 5kN/m sur la travée AB et CD et une charge concentrée de 40 kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions aux appuis.
- Tracer le diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatiques}$$

Point B :

$$6M_A + 2(6 + 10)M_B + 10M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q\frac{l^3}{4} = -5\frac{6^3}{4} = -270 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -1770\text{kN}\cdot\text{m}^2$$

$$\text{Et } M_A = 0$$

Donc :

$$32M_B + 10M_C = -1770\text{kN}\cdot\text{m}^2$$

Point C :

$$10M_B + 2(10 + 6)M_C + 6M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$$-6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd})$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -5\frac{6^3}{4} = -270 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -1770 \text{ kN.m}^2$$

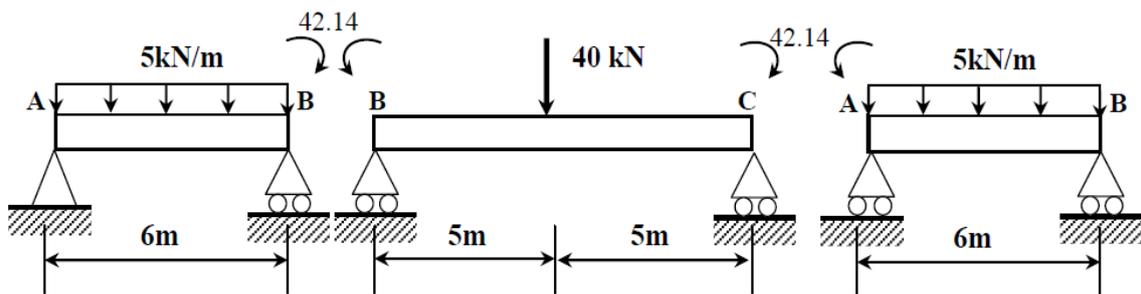
Et $M_D = 0$

Donc :

$$10M_B + 32M_C = -1770 \text{ kN.m}^2$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1770 \\ 1770 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow M_B = M_C = -42.14 \text{ kN.m}$$

Calcul des réactions : par le principe de la décomposition (superposition)



Les réactions dues aux charges extérieures



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis



Les réactions totales

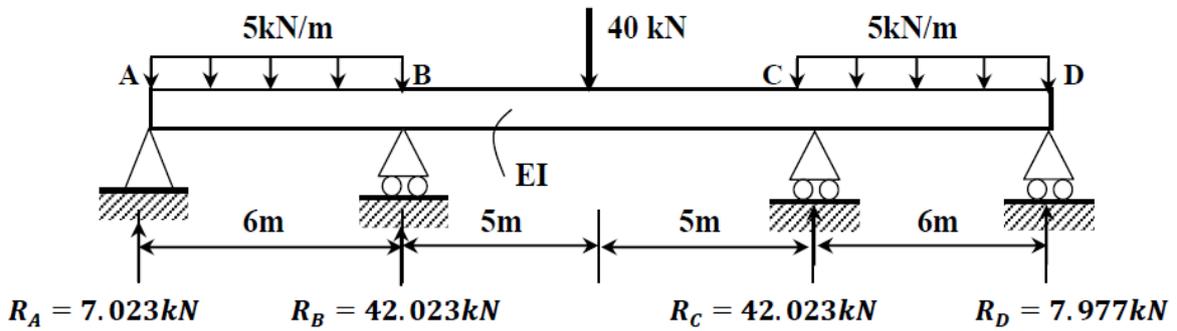


Diagramme des efforts tranchants

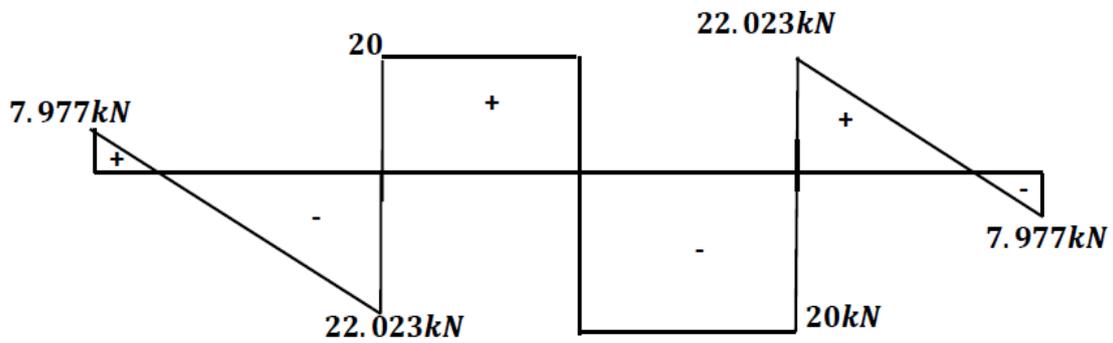
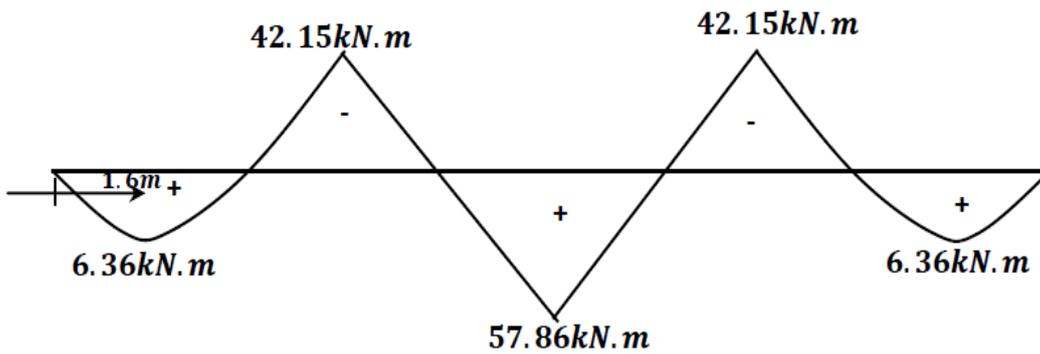


Diagramme des moments fléchissant

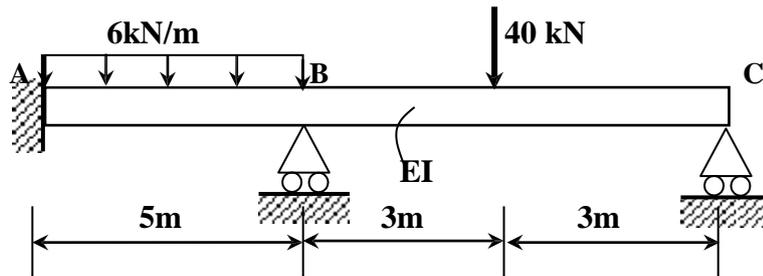


Exercice 2

On considère une poutre continue (ABC) de deux travées, de rigidité EI constante. Celle-ci est encadrée en A, repose sur deux appuis simples en B et C. Elle supporte une charge répartie de 6 kN/m sur la travée AB et une charge concentrée de 40 kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

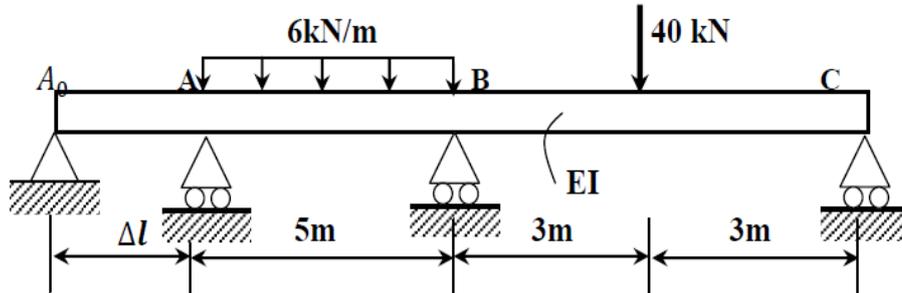
- Les réactions d'appuis en A, B et C.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatiques}$$

On remplace l'encastrement par une poutre bi articulée ($A_0 - A$) de longueur Δl



Point A :

$$\Delta l M_{A_0} + 2(\Delta l + 5)M_A + 5M_B = -6EI(\varphi_{A_g} + \varphi_{A_d})$$

$$-6EI(\varphi_{A_g} + \varphi_{A_d})$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{A_g} &= 0 \text{ (Aucune charge n'agit sur la poutre } A_0 - A) \\ -6EI\varphi_{B_d} &= -q \frac{l^3}{4} = -6 \frac{5^3}{4} = -187.5 \\ &= -187.5 \text{ kN.m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{A_g} + \varphi_{A_d})$$

Donc : $10M_A + 5M_B = -187.5 \text{ kN.m}^2$

Point B :

$$5M_A + 2(5 + 6)M_B + 6M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

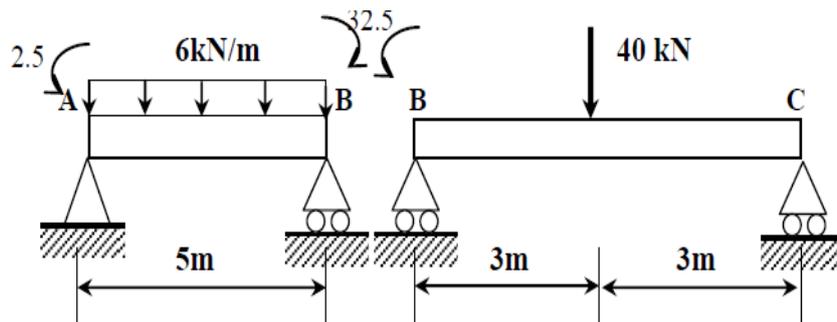
$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} = -6 \frac{5^3}{4} = -187.5 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 6^2 = -540 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -727.5 \text{ kN.m}^2$$

Et $M_C = 0$

Donc : $5M_A + 22M_B = -727.5 \text{ kN.m}^2$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 187.5 \\ 727.5 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow M_A = -2.5 \text{ kN.m} \text{ et } M_B = -32.5 \text{ kN.m}$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{5.6}{2} = 15 & & 15 & & \frac{40}{2} = 20 & & 20 \end{array}$$

Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 6 & & 6 & & 5.42 & & 5.42 \end{array}$$

Les réactions totales

Ou $R_A = 15 - 6 = 9 \text{ kN}$, $R_B = 21 + 25.42 = 46.42 \text{ kN}$ et $R_C = 20 - 5.42 = 14.58 \text{ kN}$

Diagramme des efforts tranchants

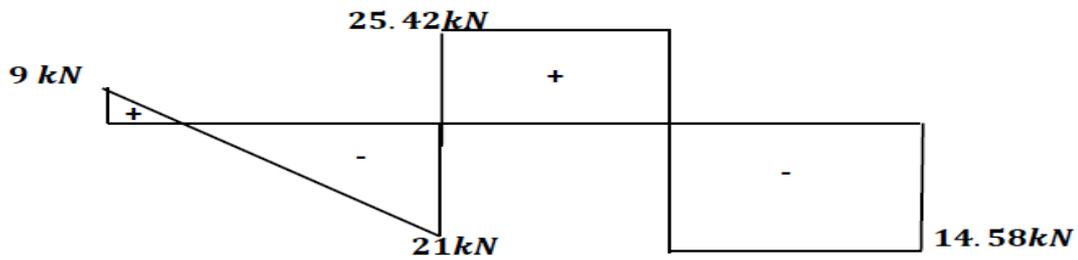
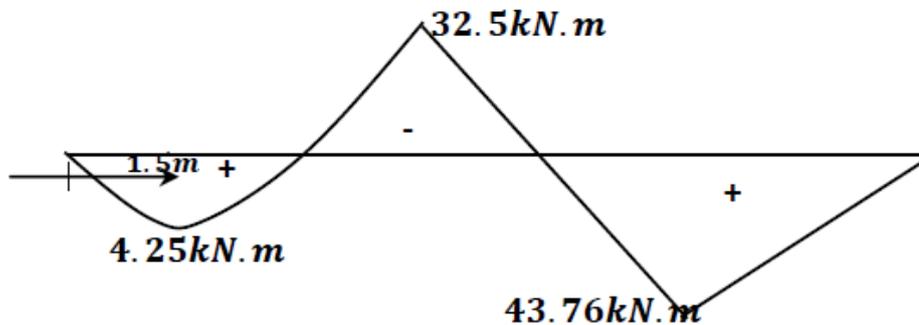


Diagramme des moments fléchissant

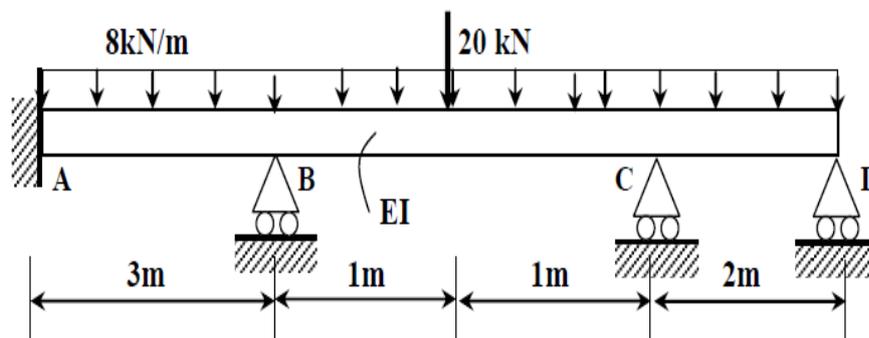


Exercice 3

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité constante sur toutes les travées. Celle-ci est encadrée en A, repose sur deux appuis simples en B, C et D. Elle supporte une charge répartie de 8 kN/m sur toute la longueur de la poutre continue ABCD et une charge concentrée de 20 kN au milieu de la travée BC.

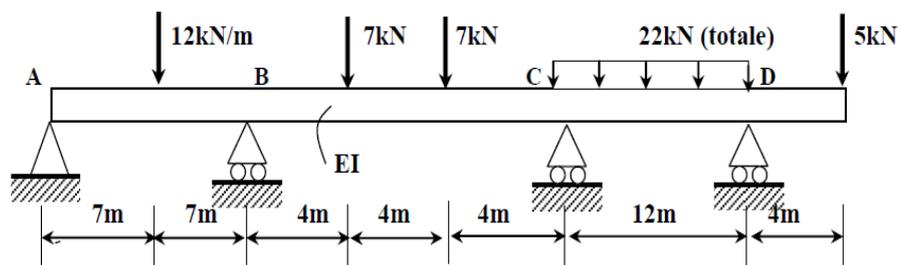
En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions d'appuis en A, B, C et D.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Exercice 4

Tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant de la poutre suivante :



Chapitre 7

CALCUL DES STRUCTURES EN ARC

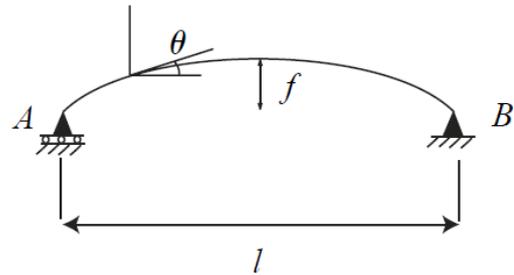
7.1. Arc isostatique

Nous définissons un arc par sa fibre moyenne, à savoir :

$$y = \frac{4f}{l}x(l-x)$$

L'angle d'inclinaison de la fibre moyenne est défini par :

$$\theta = \frac{4f}{l}(l-2x)$$



7.1.1. Cas d'une charge uniformément répartie

p est une charge linéique.

$$V_A = V_B = \frac{pl}{2}$$

$$H_A = H_B = 0$$

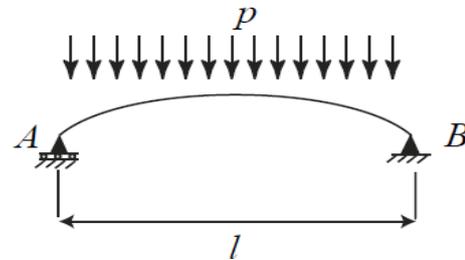
$$N(x) = p \left(x - \frac{l}{2} \right) \sin \theta$$

$$V(x) = p \left(x - \frac{l}{2} \right) \cos \theta$$

$$M(x) = \frac{px(l-x)}{2}$$

Le déplacement au centre de la poutre est égal à :

$$v(l/2) = -\frac{pf^3}{15EI}$$

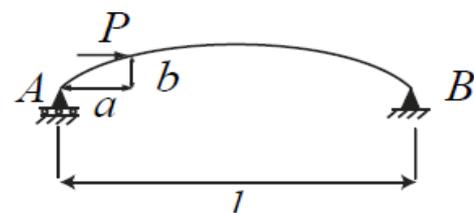


7.1.2. Cas d'une charge ponctuelle horizontale

$$V_A = -V_B = -\frac{Pb}{l}$$

$$H_A = 0$$

$$H_B = -P$$



- Calcul des contraintes généralisées

pour $x < a$

$$N(x) = \frac{Pb}{l} \sin \theta$$

$$V(x) = \frac{Pb}{l} \cos \theta$$

$$M(x) = -\frac{Pbx}{l}$$

pour $a < x < l$

$$N(x) = \frac{Pb}{l} \sin \theta$$

$$V(x) = \frac{Pb}{l} \cos \theta$$

$$M(x) = -\frac{Pbx}{l} - P(y - b)$$

Le déplacement au centre de la poutre est égal à :

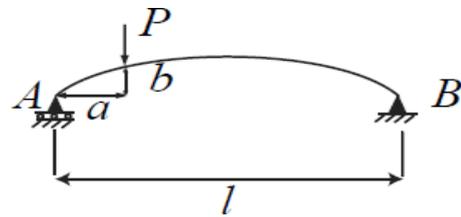
$$v(l/2) = P(l-a) \left[\frac{4f^2}{15EI} \left(2 - \frac{3a}{l} + \frac{2a^2}{l^2} + \frac{12a^3}{l^3} - \frac{8a^4}{l^4} \right) + \frac{1}{ES} \right]$$

7.1.3. Cas d'une charge ponctuelle verticale

$$V_A = \frac{P(l-a)}{l}$$

$$V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$H_A = H_B = 0$$



- Calcul des contraintes généralisées

pour $x < a$

$$N(x) = -\frac{P(l-a)}{l} \sin \theta$$

$$V(x) = -\frac{P(l-a)}{l} \cos \theta$$

$$M(x) = \frac{Px(l-a)}{l}$$

pour $a < x < l$

$$N(x) = \frac{Pa}{l} \sin \theta$$

$$V(x) = -\frac{Pa}{l} \cos \theta$$

$$M(x) = \frac{Pa}{l}(l-x)$$

Le déplacement au centre de la poutre (si $a < l/2$) est égal à :

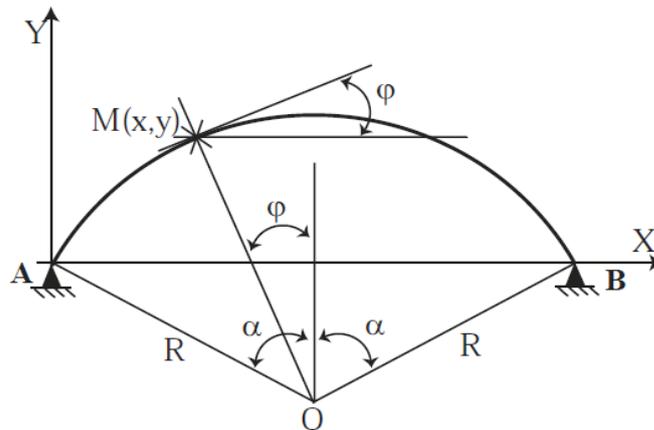
$$v(l/2) = -\frac{Pf^2a}{12EI l^4} (l^4 - l^3x - 8l^2x^2 + 20lx^3 - 12.8x^4)$$

7.2. Arcs hyperstatiques

7.2.1. Arc circulaire à deux articulations sans tirant

Soit l'arc circulaire hyperstatique de la figure ci-dessous. La géométrie de l'arc est un cercle de centre O et de rayon R. Nous avons également les données suivantes :

- E : module d'élasticité du matériau de l'arc,
- I : moment d'inertie d'une section d'arc (considéré comme constant),
- S : aire d'une section d'arc (considérée comme constante),
- G : module de cisaillement du matériau de l'arc.



Géométrie et Chargement	Efforts et moment de flexion
	$Y = \frac{1}{1 + \frac{1}{SR^2} \times \frac{4\alpha}{2\alpha - 3 \sin 2\alpha + 4\alpha \cos^2 \alpha}}$ $X_A = X_B = \frac{qR}{2} \times \frac{(9 - 4\alpha^2) \sin 2\alpha - 10\alpha \cos 2\alpha - 8\alpha}{2\alpha - 3 \sin 2\alpha + 4\alpha \cos^2 \alpha} Y$ $N(\varphi) = qR\varphi \sin \varphi + X_A \cos \varphi$ $M(\varphi) = qR^2(\alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi + \cos \alpha - \cos \varphi) - X_A R(\cos \varphi - \cos \alpha)$ $V(\varphi) = -qR\varphi \cos \varphi + X_A \sin \varphi$
	$X_A = -X_B = -qR\alpha$ $N(\varphi) = qR(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi - \alpha \cot \alpha \sin \varphi)$ $M(\varphi) = qR^2(\alpha \cot \alpha \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$ $V(\varphi) = qR(\alpha \cot \alpha \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \cos \varphi)$

7.2.2. Arc parabolique à deux articulations sans tirant

Soit l'arc parabolique hyperstatique de la figure ci-dessous. Nous avons les données suivantes :

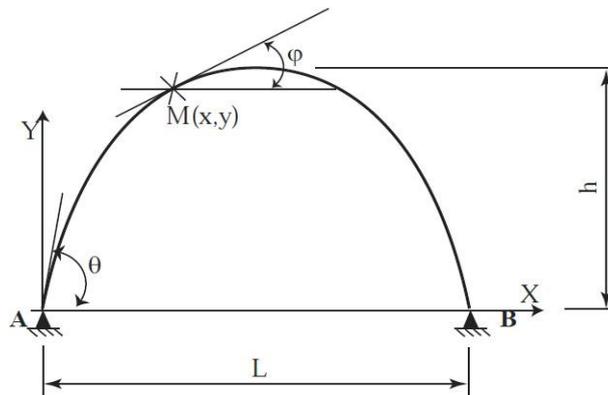
- E : module d'élasticité du matériau de l'arc
- I : moment d'inertie d'une section d'arc (considéré comme constant)
- S : aire d'une section d'arc (considérée comme constante)
- G : module de cisaillement du matériau de l'arc

Les équations de la parabole sont les suivantes :

$$y = \frac{4h}{L^2} x(L - x)$$

$$\tan \varphi = \frac{4h}{L} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$\tan \theta = \frac{4h}{L}$$



Géométrie et Chargement	Efforts et moment de flexion
	$X_A = X_B = \frac{qL^2}{8h(1 + 15I/8Sh^2)}$ $Y_A = Y_B = \frac{qL}{2} \cos \theta - X_A \sin \theta$ $N(\varphi) = q \left(\frac{L}{2} - x\right) \sin \varphi + X_A \cos \varphi$ $M(\varphi) = \frac{qx(L - x)}{2} - X_A y$
	$X_A = X_B = \frac{qL^2}{16h(1 + 15I/8Sh^2)}$ $Y_A = q \left(\frac{3L}{8} - x\right) \cos \theta - X_A \sin \theta$ $Y_B = -\frac{qL}{8} \cos \theta - X_A \sin \theta$ $N_{AC}(\varphi) = q \left(\frac{3L}{8} - x\right) \sin \varphi + X_A \cos \varphi$ $N_{CB}(\varphi) = -\frac{qL}{8} \sin \varphi + X_A \cos \varphi$ $M_{AC}(\varphi) = \frac{qx}{2} \left(\frac{3L}{4} - x\right) - X_A y$ $M_{CB}(\varphi) = \frac{qx}{8} (L - x) - X_A y$

BIBLIOGRAPHIE

1. Analyse des structures, ARAM SAMIKIAN, Gaetan Morin.
2. Analyse des structures, Osman Zakaria M., Tome 1, 2, OPU, Alger, 1989.
3. Eléments de la résistance des matériaux, J. COURBON, Dunod.
4. Leçons sur la résistance des matériaux, tome 3, E. DREFFUSS.
5. Notes de cours de mécanique des structures, Ouzandja D., Faculté de Technologie, Université Med Boudiaf de M'sila, Algérie, 2019.
6. Problèmes de résistance des matériaux, MIROLIOUBOV, MIR-Moscou.
7. Problèmes de résistance des matériaux, tome 1 et 2, GIET, Dunod.
8. Résistance des matériaux appliquée, tome 1, M.ALBIGES, CITBTP.
9. Résistance des matériaux, tome 1, J. COURBON, Dunod.
10. Résistance des matériaux, V.FEODOSSIEV, MIR-Moscou
11. Résistance des matériaux, KERGUIGNAS, Dunod.
12. Résistance des matériaux de base, Bourahla N., Groupement Economique de Contrôle Technique de la Construction, GECOTEC, 2005.
13. Structures analysis, A.GHALI, NEVILLE, BROWN, Spon -Press.