Université de M'sila	Correction d'examen de rattrapage	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2022/2023
Module Analyse 4		Durée : 1h −30m

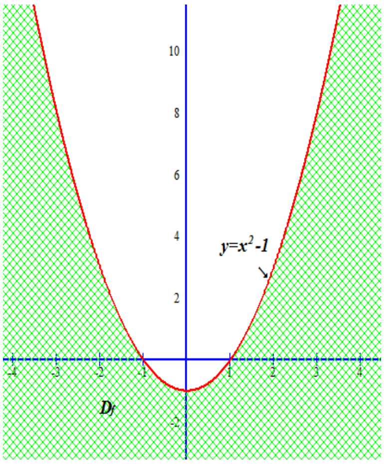
Barème

Correction d'exercice : 1 (6pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y - 1}$

1 — 1 a) $D_f = \{(x,y) : x^2 - y - 1 \geq 0\} = \{(x,y) : y \leq x^2 - 1\}$.

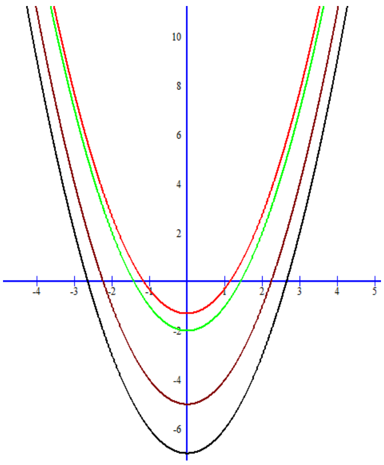
1 — b) Présentation de $\mathcal{D}_f$.



1 — 2 a) Pour $c > 0$, on a $f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y - 1 = c^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 1 - c^2$

Donc les courbes de niveau $c > 0$ sont des paraboles de sommets $(0, -1-c^2)$ et d'axe $x = 0$.

1 — b) Présentation $\mathcal{P}_c$ les courbes de niveau $c > 0$.



0.5 — 3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - y - 1$ est dérivable (polynôme).

Donc, la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2 - y - 1}$ est dérivable dans le domaine ouvert $\mathring{D}_f$.

Car pour tout $(x,y) \in \mathring{D}_f : x^2 - y - 1 > 0$, en particulier en point $a(2,0) \in \mathring{D}_f$.

0.5 — et ainsi, $\partial_x f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y - 1}}$, et $\partial_y f(x,y) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^2 - y - 1}}$.

0.5 + 0.5 — Alors, $D_v f(a) = \partial_x f(2,0) v_1 + \partial_y f(2,0) v_2 \Rightarrow D_v f(a) = \dfrac{6}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Barème

Correction d'exercice : 2 (7pt)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xe^{xy}$

Université de M'sila	Correction d'examen de rattrapage	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2022/2023
Module Analyse 4		Durée : 1h −30m

0.5 **1** **a** Il est claire que f est dérivable dans $\mathbb{R}^2$, car composition de fonctions dérivables.

0.5×2 **b** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{xy} + xye^{xy} \\ x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$.

c La fonction f est différentiable en $(1,0)$ si et seulement si :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - (x-1)\partial_x f(1,0) - y\partial_y f(1,0)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0.$$ Notons que,

0.5
$$\frac{f(x,y) - f(1,0) - (x-1)\partial_x f(1,0) - y\partial_y f(1,0)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \frac{xe^{xy} - x - y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}.$$

Si on pose, $x = 1 + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, alors, on aura :

0.5
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xe^{xy} - x - y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{(1 + r\cos\theta)e^{(r\sin\theta)(1+r\cos\theta)} - 1 - r(\cos\theta + \sin\theta)}{r}$$
$$= \frac{0}{0},$$ (forme indéterminée). En utilisant la règle de L'Hôpital, on trouve

$$\lim_{r\to 0} \frac{(1 + r\cos\theta)e^{(r\sin\theta)(1+r\cos\theta)} - 1 - r(\cos\theta + \sin\theta)}{r}$$
$$= \lim_{r\to 0}\left[(\cos\theta + \sin\theta(1 + 2r\cos\theta)(1 + r\cos\theta))e^{(r\sin\theta)(1+r\cos\theta)} - (\cos\theta + \sin\theta)\right] = 0.$$

0.5 **d** Donc f est différentiable au point $(1,0)$, et sa différentielle est donner par :

$$df_{(1,0)}(x,y) = (x-1)\partial_x f(1,0) + y\partial_y f(1,0) = x + y - 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1 **2** Comme f est différentiable au point $(1,0)$, alors elle admet un developpement limité à l'ordre 1 au point $(1,0)$. On a, donc,

$$f(x,y) = f(1,0) + (x-1)\partial_x f(1,0) + y\partial_y f(1,0) + o(\|(x-1,y)\|).$$

1 D'où, $f(x,y) = x + y + o(\|(x-1,y)\|)$.

3 La valeur approchée de f en $(1.1, 0.1)$:

1 Comme, $f(x,y) \simeq f(1,0) + (x-1)\partial_x f(1,0) + y\partial_y f(1,0)$, si $(x,y) \simeq (1,0)$.

1 Alors, on obtient, $f(1.1, 0.1) \simeq 1 + 0.1 \times 1 - 0.1 \times 1 = 1$.

Barème

Correction d'exercice : 3 (7pt)

f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$.

1 **1** **a** Les points critiques de f. On a : $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ 2y - 2 \end{pmatrix}$. Alors,

1 **b** $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right) : (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

2 Nature des points critiques :

Université de M'sila	Correction d'examen de rattrapage	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2022/2023
Module Analyse 4		Durée : 1h −30m

0.5 (a) $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Le déterminant de la matrice Héssienne au point $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1)$ est

0.5 $|H_f(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1)| = \begin{vmatrix} -(-1)^k & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(-1)^k.$ Par conséquent,

0.5 (⋆) Si k est impaire, les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$ présentent des minimums locaux.

0.5 (⋆⋆) Si k est paire, alors $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$ sont des points selles.

1 (3) Si k est impair, on a $f(x,y) - f(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1) = \sin x + 1 \geq 0.$

Donc, les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$ sont des minimums globaux de $f.$

(4) On cherche les extremums liés de f avec le contrainte $y = 1.$

Par substiation $y = 1$ dans l'expression de $f(x,y)$ on trouve,

1 $F(x) = f(x, y(x)) = \sin x.$ Alors, $F'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

1 On remarque que $f(x,y) = 1,$ si et seulement si k est pair.

Donc, les points $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ sont maximums liés de $f.$