République Algérienne Démocratique et Populaire.
Université Mohamed Boudiaf de M’sila.
Faculté de Technologie.
1ére Année Energies Renouvelables et Environnement

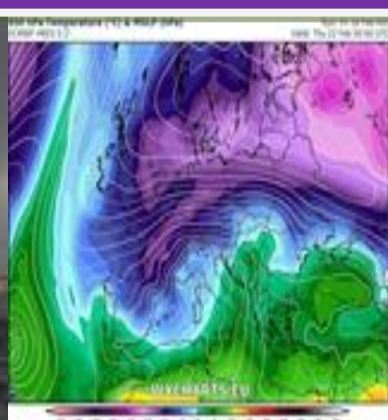
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Mécanique des fluides

Mahroug Abdelhafid






Introduction

Ceci constitue le document de cours et travaux dirigés de mécanique des fluides destiné aux étudiants 1^{ére} Année Energies Renouvelables et Environnement. De par son contenu, il peut s'avérer utile pour les étudiants d'autres branches de la physique et du génie.

La mécanique des fluides est une sous-catégorie de la mécanique qui étudie le comportement des fluides au repos (statique des fluides) ou en mouvement (dynamique des fluides). Elle est également divisée en plusieurs catégories :

- L'hydrodynamique étudie le mouvement des fluides qui sont pratiquement incompressibles (comme les liquides, en particulier l'eau et les gaz à basse vitesse).

- L'aérodynamique étudie les écoulements de gaz (notamment l'air) autour des objets tels que les avions, les fusées et les voitures à des vitesses basses ou élevée.

- La gazodynamique traite les écoulements des fluides qui subissent des modifications importantes de densité (masse volumique), tels que les écoulements de gaz à travers des buses à haute vitesse.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'aéronautique, l'ingénierie navale, l'océanographie, la météorologie, climatisation et le chauffage. L'enseignement de cette matière permet à l'étudiant d'acquérir les notions fondamentales de la mécanique liée aux fluides à travers la statique et la dynamique.

Ce document couvre les différents aspects de la mécanique des fluides. Après avoir présenté des généralités sur les grandeurs physiques dans le chapitre 1, on traite dans le chapitre 2 les propriétés générales des fluides. Le chapitre 3 aborde la statique des fluides, ou hydrostatique. Le chapitre 4, 5 et 6 sont consacrés à la dynamique des fluides parfaits incompressibles, fluides réels incompressibles et des fluides compressibles respectivement, où l'équation de continuité (conservation de la masse), le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie), pertes de charge et le théorème d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement) sont bien illustrées. On présente des exemples d'application à la fin de chaque chapitre et des séries d'exercices à la fin de ce document.

Contenu de la matière

Questions de cours

Choisir la ou les bonnes réponses

La mécanique des fluides étudie et caractérise :

- ✓ Le comportement mécanique des fluides.
- ✓ Le comportement chimique des fluides.
- ✓ Le comportement thermodynamique des fluides.

Les fluides ont une structure moléculaire :

- ✓ Ordonnée.
- ✓ Désordonnée.
- ✓ Crystalline.
- ✓ Cubique.

Un matériau est :

- ✓ Un milieu continu.
- ✓ Un milieu discontinu.

Caractéristiques des fluides :

- ✓ Les liquides sont des fluides.
- ✓ Les gaz sont des fluides.
- ✓ Les liquides sont considérés comme incompressibles.
- ✓ Un fluide non visqueux est parfait.

La viscosité d'un fluide caractérise :

- ✓ Sa texture.
- ✓ Sa couleur.
- ✓ Sa capacité à s'écouler.
- ✓ Sa résistance à l'écoulement.

Soit F la force de viscosité :

- ✓ F diminue quand la viscosité augmente.
- ✓ F diminue quand la vitesse différentielle entre 2 lames liquidiennes diminue.
- ✓ F augmente quand la surface des lames augmente.

- ✓ F augmente quand la surface des lames diminue.
- ✓ Aucune réponse exacte.

Dans le SI, la viscosité μ s'exprime en :

- ✓ Kilogramme par mètre et par seconde : kg/m.s.
- ✓ Mètre carré par seconde : m^2/s.
- ✓ Newton par kilogramme : N/kg.
- ✓ Kilogramme par mètre carré et par seconde : $kg/m^2.s$.

En statique des fluides incompressibles :

- ✓ La pression s'exerçant sur le fond d'un récipient dépend de la forme de ce récipient.
- ✓ On gagne en pression ce qu'on perd en hauteur.
- ✓ La pression s'exerce exclusivement vers le bas.
- ✓ La surface de séparation de deux liquides non miscibles au repos est horizontale.
- ✓ Une variation de pression en un point d'un fluide incompressible est transmise intégralement en tout autre point.
- ✓ On ne peut pas appliquer l'équation d'état des gaz parfaits.

Une surface élémentaire continue subit une force en son centre de surface.

Quel calcul permet de déterminer la contrainte mécanique qu'elle subit ?

- ✓ Le produit de l'intensité de la force par l'aire de la surface.
- ✓ Le produit de l'aire de la surface par l'intensité de la force.
- ✓ Le quotient de l'intensité de la force par l'aire de la surface.
- ✓ Le quotient de l'aire de la surface par l'intensité de la force.

Pour les fluides parfaits :

- ✓ La loi de Pascal s'applique aussi bien aux fluides parfaits que réels.
- ✓ Dans le cas de l'écoulement dans un cylindre, lorsque la surface de la section transverse diminue le débit augmente.
- ✓ Dans le cas de l'écoulement dans un cylindre, il n'y a pas de frottement, ni de perte d'énergie.
- ✓ Le théorème de Bernoulli peut toujours s'appliquer au fluide parfait.

Pour les liquides réels :

- ✓ La loi fondamentale de l'hydrostatique ne peut s'appliquer au fluide réel.
- ✓ Ils sont dits visqueux car ils présentent des frottements.
- ✓ Dans le cas de l'écoulement dans un cylindre, il n'y a pas de perte d'énergie.
- ✓ Ce phénomène constitue une résistance à l'écoulement.

Pour un corps immergé dans un liquide au repos, la poussée d'Archimède est égale au:

- ✓ Poids du liquide déplacé.
- ✓ Poids du liquide total.
- ✓ Poids totale du corps.
- ✓ Poids du corps immergé.

La relation de Bernoulli est une équation de :

- ✓ Conservation du débit en volume.
- ✓ Conservation de la masse totale du fluide.
- ✓ Conservation de l'énergie mécanique du fluide.
- ✓ Conservation de la vitesse du fluide lors de son mouvement.

Le théorème des quantités de mouvement permet de :

- ✓ Calculer la pression en un point du fluide.
- ✓ Calculer le débit volumique.
- ✓ Calculer la résultante des forces exercées par un fluide sur une structure.
- ✓ Calculer la vitesse du fluide en tout point de l'écoulement.

La loi de Poiseuille :

- ✓ Exprime la variation de débit en fonction de la variation de pression.
- ✓ S'applique quelles que soient les conditions de l'écoulement.
- ✓ N'est utilisable que pour un nombre de Reynolds inférieur à 2000.
- ✓ N'est utilisable que pour un écoulement turbulent.

Le profil des vitesses d'un fluide réel incompressible, écoulement permanent, laminaire dans une conduite cylindrique est :

- ✓ Linéaire.

- ✓ Circulaire.
- ✓ Elliptique.
- ✓ Parabolique.

Un écoulement turbulent est :

- ✓ Un écoulement où les forces d'inertie prédominent.
- ✓ Un écoulement où les forces de frottement prédominent.
- ✓ Un écoulement dans une conduite de très faible diamètre.
- ✓ Un écoulement à très grande vitesse.

Unités :

- ✓ Pa = $m^{-1}.kg.s^{-2}$.
- ✓ Pl = $m^{-1}.kg.s^{-1}$.
- ✓ Poise = $m^{-1}.kg.s^{-1}$.
- ✓ Perte de charge en Pa.
- ✓ Aucune réponse exacte.

Selon l'équation de continuité, calculer v_2 au niveau d'un rétrécissement sachant que v_1 = 0,03 m/s, S_1 = 15 cm^2, S_2 = 5cm^2 :

- ✓ 90 cm/s.
- ✓ 0,18 cm/s.
- ✓ 18 mm/s.
- ✓ 9 cm/s.
- ✓ Aucune réponse exacte.

Un fluide parfait incompressible s'écoule d'un orifice circulaire situé sur le côté d'un réservoir avec un débit volumique q_v = 0,4 l/s. Le diamètre de l'orifice est d=10mm. Dans ce cas l'orifice se trouve à une distance de la surface libre :

- ✓ 0.21m.
- ✓ 1.32m.
- ✓ 2.15m.
- ✓ Aucune réponse exacte.

Le régime d'écoulement dans une conduite de 25 cm de diamètre et de longueur L=1650 m pour du fuel lourd de masse volumique $\rho = 932$ kg/m^3 circulant la vitesse v = 0.4 m/s et de viscosité cinématique 118.10^{-6} m^2/s est :

- ✓ Turbulent lisse.
- ✓ Turbulent rugueux.
- ✓ Laminaire.
- ✓ Transitoire.

Et la perte de charge dans le tuyau est :

- ✓ 37183J/m^3.
- ✓ 371J/m^3.
- ✓ 10^5 J/m^3.
- ✓ Aucune réponse exacte.

Fluides compressibles

Un corps céleste en chute libre, freiné par les couches d'air de la haute atmosphère tombe sur terre. A une altitude de 10 km : la vitesse du corps v=3000 m/s, la température de l'air T= 223°K, la masse volumique de l'air ρ=0.412kg/m^3, la pression de l'air P=0,265 bar et $\gamma = 1.4$.

Donc :

La vitesse du son C est :

- ✓ C= 0.841m/s.
- ✓ C= 300m/s.
- ✓ C= 240m/s.
- ✓ Aucune réponse exacte.

Le nombre de Mach M est :

- ✓ M=100.
- ✓ M=10.
- ✓ M= 0.1.
- ✓ Aucune réponse exacte.

La nature de l'écoulement d'air autour du corps est :

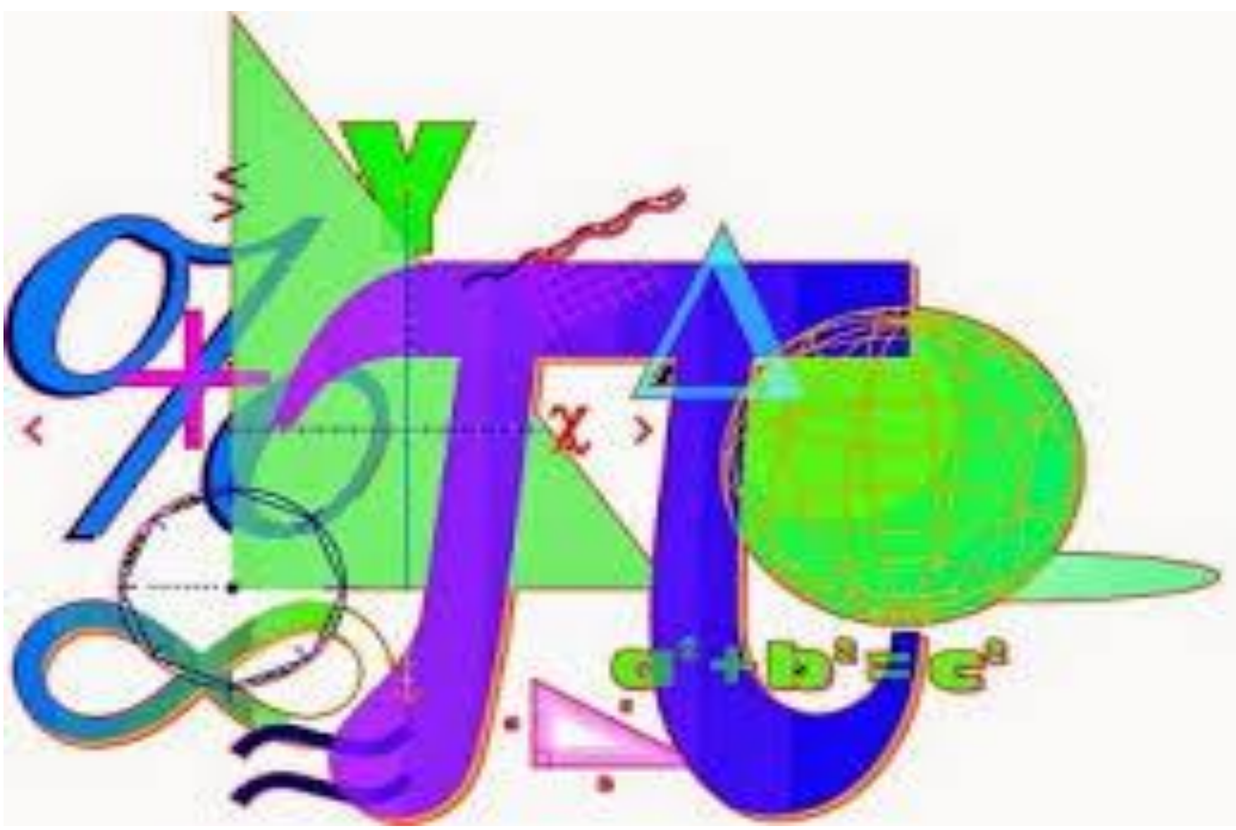
- ✓ Subsonique.
- ✓ Sonique.
- ✓ Supersonique.

Et D'après le théorème de Saint-Venant, la température T_0 au point d'arrêt (état générateur) est :

- ✓ $T_0 = 1050^{\circ}K$.
- ✓ $T_0 = 4683°K$.
- ✓ $T_0 = 223°K$.

Chapitre 01 :

Rappels mathématiques



Chapitre 01 : Rappels mathématiques

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions et les unités des grandeurs physiques. Nous présentons ici les méthodes d'analyse dimensionnelle, ainsi que leur intérêt, Calcul d’erreurs, Calcul vectoriel et les principaux opérateurs

Pré-requis:

- Notions des bases en physique
- Notions des bases en mathématique

Objectifs

Au terme de ce chapitre, l’étudiant doit être capable de connaître :

- Grandeurs fondamentales du système international
- Notions de dimensions
- Analyse Dimensionnelle
- Calcul d’erreurs
- Calcul vectoriel
- Principaux opérateurs

I.1. Analyse dimensionnelle

I.1.1.Grandeurs Physiques

Définition: une grandeur physique est une quantité qui se rapporte à une propriété et qui peut se mesurer (mesure direct : mesure de la masse avec une balance), ou calculer (mesure indirect par une relation mathématique : mesure de la résistance dans un circuit R= V/I).c.-à-d. comparer avec une grandeur de même nature : référence ; unité ; étalon. La grandeur physique est donc caractérisée par une unité et une dimension.

Il existe deux types de grandeurs physiques: Scalaires et Vectorielles.

Grandeurs scalaires: définies par un nombre et une unité de mesure.

Exemple : masse, temps, température….etc.

Grandeurs Vectorielles: quantité spécifiée par un nombre et une unité plus une direction et un sens (ou plusieurs nombres pour les représenter : Vecteur).

Exemple: vitesse, Force….etc.

Notion de dimension d'une grandeur physique: la dimension d'une grandeur correspond à sa nature physique où la connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique.

Exemple: temps, longueur, masse… ; approche qualitative. Question : qu'est-ce que c'est. Une grandeur physique est caractérisée par une dimension. La dimension de la grandeur G est notée par [G].

Exemple: G est une longueur ; alors [G]= L : l'équation aux dimensions L : dimension d'une longueur et non L en mètre : dimension ≠ unité. [G]= 1 : sans dimension (cas d'un angle).

I.1.2.Systèmes d'unités

Unité: Grandeur de référence (valeur unitaire), constante, mesure les grandeurs physiques ayant la même propriété.

Système international (SI): Le système international (SI) est constitué par les unités du système MKSA (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère).

Remarque: Il existe aussi d'autres systèmes d'unités en physique, comme par exemple : Le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde).

Grandeurs fondamentales du système international d'unités : il y'a 7 grandeurs fondamentales, et toutes les autres grandeurs sont des dérivées.

Grandeur physique	Dimension	Unité (symbole)
Longueur	L	Mètre (m)
masse	M	Kilogramme (Kg)
temps	T	Seconde (S)
Intensité de courant électrique	I	Ampère (A)
Intensité lumineuse	J	Candela (Cd)
Température	θ	Kelvin (K)
Quantité de matière	N	Mole (mol)

Grandeurs Supplémentaires du système international :

Grandeur physique	Dimension	Unité (symbole)
Angle plan	-	Radian (rad)
Angle solide	-	stéradian (sr)

Grandeurs dérivées du système international: une grandeur dérivée est une grandeur dont la dimension est liée à au moins une des sept grandeurs de base.

Exemples :

- Vitesse $v = dx/dt$; $[v] = L.T^{-1}$; unité: le mètre par seconde ($m.s^{-1}$)
- Accélération : $a = dv/dt = d^2x/dt^2$; $[a] = L.T^{-2}$; unité: le mètre par seconde-au-carré ($m.s^{-2}$).
- Surface $S = D.D$; $[S] = L.L = L^2$; unité : le mètre-au- carré (m^2).
- Force $F = m.a$; $[F] = [m.a] = M.L.T^{-2}$; unité: le Newton N ($Kg.m.s^{-2}$).

- Energie $E = \frac{1}{2} m.v^2$ ou travail $W = F.D$;$[E] = M.L^2.T^{-2}$; unité : le Joule-J-($Kg.m^2.s^{-2}$).
- Pression $P = \frac{F}{D^2}$; $[P] = [F/D] = M.L^{-1}.T^{-2}$; unité : le pascal Pa ($Kg.m^{-1}.s^{-2}$).

Unités couramment utilisées : Exemples

Calorie : 1Calorie= 4.184 Joule ; Litre : 1L= $10^{-3}m^3$; Are: 1 Are= $100m^2$; Heure : 1h = 3600s ; Pouse: 1Pouce = 2.54cm; Tonne: 1tonne = 10^3Kg

I.1.3. Equations aux Dimensions

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des grandeurs fondamentales. Dans une relation mathématique entre grandeurs, on replace chaque terme par sa dimension (L pour une longueur), on obtient l'équation aux dimensions. Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension.

Analyse dimensionnelle : utilisation des dimensions: L'équation aux dimensions permet de :

- Déterminer l'unité composée d'une grandeur physique en fonction des unités des grandeurs fondamentales.

- Vérifier de l'homogénéité d'une formule (les membres d'une égalité doivent avoir la même dimension)

- Rechercher de la forme d'une expression $A= f(B,C)= B^{\alpha}C^{\beta}$, ou trouve la solution de certains problème sans avoir à résoudre l'équation.

- Faire des conversions d'unités(Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions).

La dimension d'une grandeur s'exprime en fonction des sept dimensions fondamentales : $[G]= L^a .M^b .T^c .I^d .J^e .\theta^f .N^g$.

Règles d’écriture des unités physiques

Les noms d'unités sont des noms communs écrits en lettres minuscules. Ils prennent un "s" au pluriel sauf si les noms sont déjà terminés par un s, x ou z. Exemples: un mètre, un kelvin, un newton, des pascals.

Exception: Le nom propre prend une majuscule quand il est associé à l'unité degré : degré Celsius.

Pour les d'unités composées qui sont des produits : les noms des unités s’acordent.

Exemple : newton(s)-mètre(s) (unité de moment d'une force), sauf dans quelques cas où l'on écrira wattheures, voltampères (avec un seul s sans trait d'union et sans espace).

L'unité, quotient de deux unités, se forme en séparant le nom de l'unité dividende du nom de l'unité diviseur par la préposition "par".

Exemples: mètre(s) par seconde (unité de vitesse), joule(s) par kilogramme - kelvin (unité de capacité thermique massique).

Un multiple ou sous-multiple d'une unité se forme en associant au nom de l'unité le préfixe en toute lettre.

Exemples: picofarad, millimètre, mégawatt, térahertz, mégohm.

Règles d’écriture des symboles :

Les symboles des unités écrits en lettres minuscules sauf les noms propres comme : Ampére, Newton.

Avec préfixes: préfixe doit coller au symbole.

Exemple: hPa, dm.

Le produit des symboles de deux ou plusieurs unités est indiqué de préférence par un point comme signe de multiplication.

Il est préférable d’écrire: $m.s^{-2}$

I.2.Calcul d'erreurs

Pour toute grandeur mesurable G, il est possible de définir :

- sa valeur mesurée G

- sa valeur exacte G_0 qu'on ne peut pas atteindre. Dans la pratique, la valeur exacte étant inaccessible, on l'approche en effectuant la moyenne d'une série de mesures de la grandeur G : $G_{ref} = G_{moy} = \frac{1}{n}.\sum_1^n Gi$

Erreur Absolue : se définit alors par $e_a = G - G_{ref}$.

Cette erreur est la résultante de plusieurs erreurs Systématiques dues généralement aux appareils de mesures, accidentelles dues généralement aux expérimentateurs.

Incertitude absolue: L'incertitude absolue ΔG est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue (ΔG est toujours >0) : $G_{corr} = G \pm \Delta G$

Incertitude relative : Incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur de référence de G. Elle s'exprime également en termes de pourcentage.

$$\varepsilon(100\%) = 100.\ \Delta G/G_{ref}$$

L'incertitude relative exprime la qualité ou précision d'une mesure.

Quelques Instructions pour le calcul des incertitudes

L'addition: $G = A+B \Rightarrow \Delta G = \Delta A+\Delta B$

La soustraction : $G = A-B \Rightarrow \Delta G = \Delta A+\Delta B$

Cas d'un produit, d'un rapport ou d'une puissance : $G = k.\frac{A^\alpha B^\beta}{C^\gamma}$

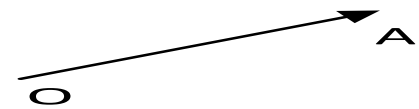
Où A, B et C sont des grandeurs que l'on mesure et k est une constante.

$$\frac{\Delta G}{G} = \alpha\frac{\Delta A}{A} + \beta\frac{\Delta B}{B} + \gamma\ \frac{\Delta C}{C}$$

I.3.Calcul Vectoriel

L'usage des vecteurs permet de représenter des grandeurs : vitesse, force, déplacement, accélération…etc.

Vecteur: un vecteur est un segment de droite orienté, il caractérisé par :
- Origine : point d'application (O)



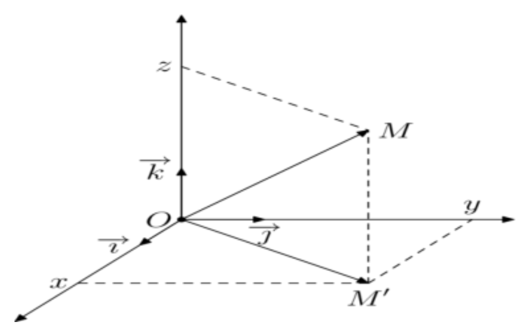
- Ligne d'action ; support : direction : celle de la droite (OA)

- Sens de O vers A

- Module ou l'intensité $\|\overrightarrow{OA}\| = |\overrightarrow{OA}|$: longueur du segment OA, mesuré en choisissant une unité graphique (de module 1).

Système de coordonnées cartésiennes :utilisé pour repérer un point M, il est composé de 3 axes orthogonaux ox, oy et oz avec 3 vecteurs unitaires (base) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orthonormée (ortho : $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$; normée : $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$).

Par la projection de M sur les axes ox, oy, oz : x, y, z sont les coordonnées de point M ; M (x, y, z) ; x, y, z sont les composantes de vecteur $\overrightarrow{OM}$



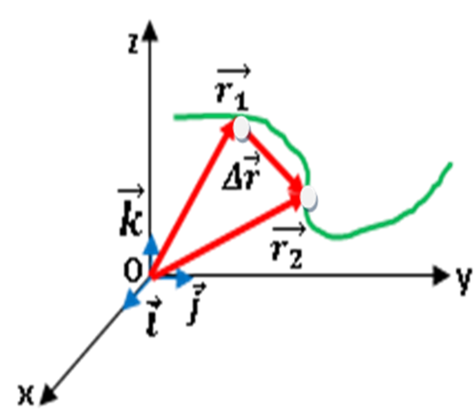
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \; ; \; \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Déplacement: correspond au changement de la position:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}: \quad \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\Delta r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

Déplacement élémentaire ou infinitésimale :



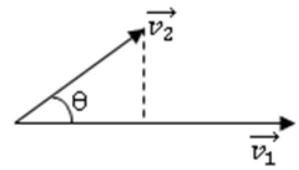
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{dr} = dx\,\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

L'objet se déplace de dx dans la direction ox, dy dans la direction oy et dz dans la direction oz.

Produit Scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$:

$\vec{v_1}.\vec{v_2} = |\vec{v_1}|.\ |\vec{v_2}|.\ \cos\theta$: est un scalaire (positif ou négatif), θ : l'angle entre les deux vecteurs.



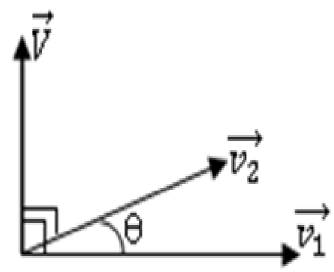
Formule analytique du produit scalaire

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$; $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

donc: $\vec{v_1}.\vec{v_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).\ (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Produit vectoriel de deux vecteurs

le produit vectoriel de deux vecteur $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ (PV) est un vecteur :



$\vec{V} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = |\vec{v_1}|.\ |\vec{v_2}|.\ \sin\theta\ \vec{u}$: $\vec{u}$: vecteur unitaire

$\vec{V} \perp \vec{v_1}$ et $\vec{V} \perp \vec{v_2}$; $\vec{V}$est perpendiculaire au plan formé par $(\vec{v_1}\ ,\vec{v_2}\ )$

Forme analytique du produit vectoriel

$\vec{V} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{o}$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{V} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$(y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\ \vec{k}$ (vecteur)

Champ scalaire et vectoriel

Champ scalaire : est une fonction à plusieurs variables qui à chaque point M(x,y,z) correspondre un scalaire : f(x,y,z)

Exemple : température

Champ vectoriel : fonction vectorielle à plusieurs variables qui à chaque point M(x,y,z) correspondre un vecteur : $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Exemple : champ de la pesanteur $\vec{g}$ (champ uniforme : même module même sens).

Analyse vectorielle

Forme différentielle totale d'une fonction à plusieurs variables f(x,y,z) :

Soit une fonction d'une seule variable f(x)

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$

Pour plusieurs variables, on appelle dérivée partielles

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$df = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy + \frac{\delta f}{\delta z}dz$

Dérivée d'une fonction vectorielle par rapport le temps : Soit la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$, à chaque valeur de t correspond un vecteur $\vec{V}$ (module, direction et sens : dépendent du temps) : $\vec{V}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d^2\,\vec{V(t)}}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Opérateur 'nabla':

L'opérateur 'nabla' ou $\vec{\nabla}$ est très utile en analyse vectorielle. Il permet de déterminer les notions de gradient, rotationnel, divergence et laplacien de manière simple. Il se définit comme suit : $\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta}{\delta z}\vec{k}$

Gradient d'une fonction :

Le gradient d'une fonction scalaire f (x, y, z) est un vecteur noté $\vec{\nabla}f$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ dont les composantes dans une base orthonormée sont les dérivées partielles de f par rapport à chaque variable :

$$\vec{\nabla}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\delta f}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta f}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta f}{\delta z}\vec{k}$$

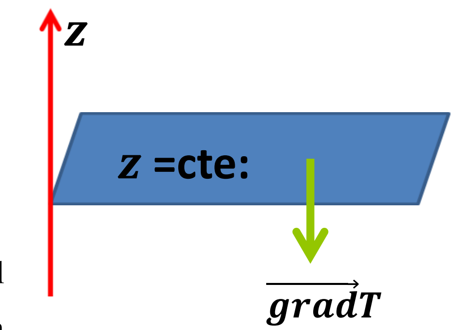
$\overrightarrow{\text{grad}}f$ est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de fonction f dans l'espace. Ou indique la direction de la plus grande variation de f

Exemple 1: la variation de la température avec l'auteur : suivant l'axe (oz) :

$T(z) = T(0) - az \quad ; a>0$

$\overrightarrow{\text{grad}}T = \frac{\delta T}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta T}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta T}{\delta z}\vec{k} = -a\vec{k}$

Exemple 2: gradient de la pression dans un fluide

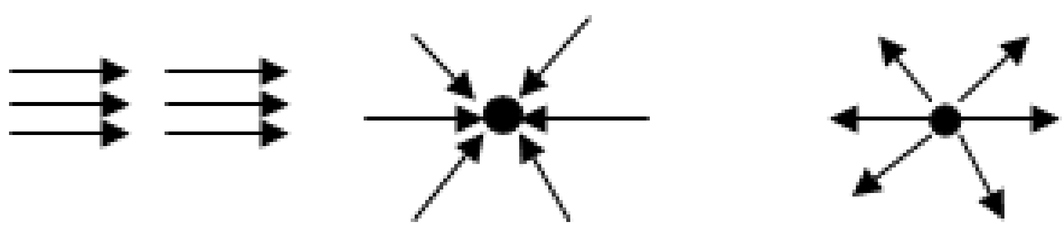


$P = \rho g z$

$\overrightarrow{\text{grad}}P = \frac{\delta P}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta P}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta P}{\delta z}\vec{k} = \rho g\,\vec{k}$ (variation suivant $\vec{k}$)

Divergence d'un vecteur : la divergence d'un champ vectoriel caractérisé comment un champ évolue dans sa propre direction (dérivées partielles non croisées : $\frac{\delta A_x}{\delta x}, \frac{\delta A_y}{\delta y}, \frac{\delta A_z}{\delta z}$ $\quad(\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$

$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = (\frac{\delta}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta}{\delta z}\vec{k}).(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$ (valeur scalaire)

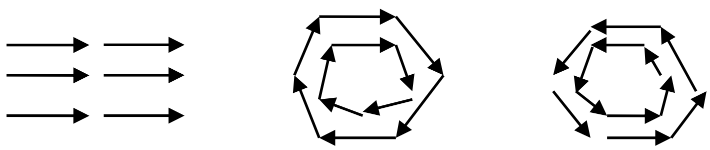


$\text{div}\vec{A} = 0$ $\quad$ $\text{div}\vec{A}<0$ (puit) $\quad$ $\text{div}\vec{A}>0$ (source)

Convergence $\quad$ Divergence

Rotationnel d'un vecteur: rotationnel d'un vecteur interprété l'axe de tourbillon en mécanique des fluides ($\vec{A}$: vitesse de fluide)

$$\overrightarrow{RotA} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\delta A_z}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\delta A_z}{\delta x} - \frac{\delta A_x}{\delta z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\delta A_y}{\delta x} - \frac{\delta A_x}{\delta y}\right)\vec{k} \text{ (vecteur)}$$



Irrotationnel — $\overrightarrow{RotA} \neq \vec{0}$ — $\overrightarrow{RotA} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{RotA} = \vec{0}$ — $\overrightarrow{RotA} < \vec{0}$ — $\overrightarrow{RotA} > \vec{0}$

Laplacien

On appelle Laplacien d'une fonction scalaire f (x, y, z) la divergence de son gradient, on le note div $(\overrightarrow{grad}f)$ ou $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}f)$ ou Δf

$$\Delta f = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta z^2}$$

En mécanique des fluides, pour un écoulement irrotationnel et incompressible, le potentiel des vitesses vérifie : $\Delta\phi = 0$

Exemple d'application:

Soient les fonctions scalaire $\Phi(x, y, z) = x^2.y.z^3$ et vectorielle $\vec{A}(x.y, z) = x.z\,\vec{i} - y^2\vec{j} + 2x^2y\,\vec{k}$

a) Calculer la différentielle des deux fonctions.

b) Trouver le gradient de $\Phi(x, y, z)$, la divergence de $\vec{A}$ et de $\Phi.\vec{A}$, le rotationnel de $\vec{A}$ et de $\Phi.\vec{A}$

Chapitre II :

Propriétés générales des fluides

Chapitre II : Propriétés générales des fluides

Le présent chapitre constitue une introduction à la mécanique des fluides dans laquelle on classe les fluides parfaits, les fluides réels, les fluides incompressibles et les fluides compressibles et on définit les principales propriétés des fluides.

Pré-requis :

- Notions des bases en physique
- Différents Etats de la matière
- Forces d'interactions moléculaires
- Généralités sur les fluides.

Objectifs

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

- Connaître les trois Etats de la matière.
- Connaître les propriétés physiques d'un fluide (masse volumique, poids volumique, densité et viscosité…etc).
- Définir les différents types des fluides.
- Distinguer les comportements mécaniques des fluides.

II.1. Forces d'interactions moléculaires

La matière est constituée par des atomes, ces atomes regroupent pour former les molécules dont leurs dimensions sont en quelques angströms (Å).Les molécules se regroupent entre elles sous l'action des forces « forces d'interaction moléculaires (cohésion) pour former la matière.

II.2. Etats de la matière : il existe trois états de la matière

Etat solide: dans les solides les forces d'interaction moléculaires sont très importantes. Les molécules ne peuvent pas déplacer les uns par rapport aux autres (fixés) ; gardent leurs formes. Le matériau à l'état solide a une structure compacte, peut revenir à sa forme initiale lorsque la contrainte est éliminée. La contrainte tangentielle jusqu'à une certaine limite sinon il y a rupture du matériau

Etat Liquide: dans les liquides, les forces d'interaction moléculaires (cohésion) sont faibles – certaine cohésion entre les molécules. Les molécules peuvent se mouvoir les uns par rapport aux autres c.-à-d. : prennent la forme des récipients qui les contiennent (volume définit). Le matériau à l'état liquide a une structure moins compacte et il n'ya pas de déformation fixe mais déformation continue tant que la contrainte visqueuse est appliquée et ne peut jamais revenir à sa forme initiale

Etat gaz: dans les gaz les forces d'interaction moléculaires (cohésion) sont très faibles (négligeables). Le mouvement des molécules est parfaitement désordonné. Le gaz a propriétés de s'entendre et d'occuper tout l'espace disponible.

Les liquides et les gaz sont appelés ''Fluides''.

L'élément qui différencie les liquides des gaz c'est la ''Compressibilité''.

Matière $\begin{cases} \text{solides} \\ \text{fluides} \end{cases}$

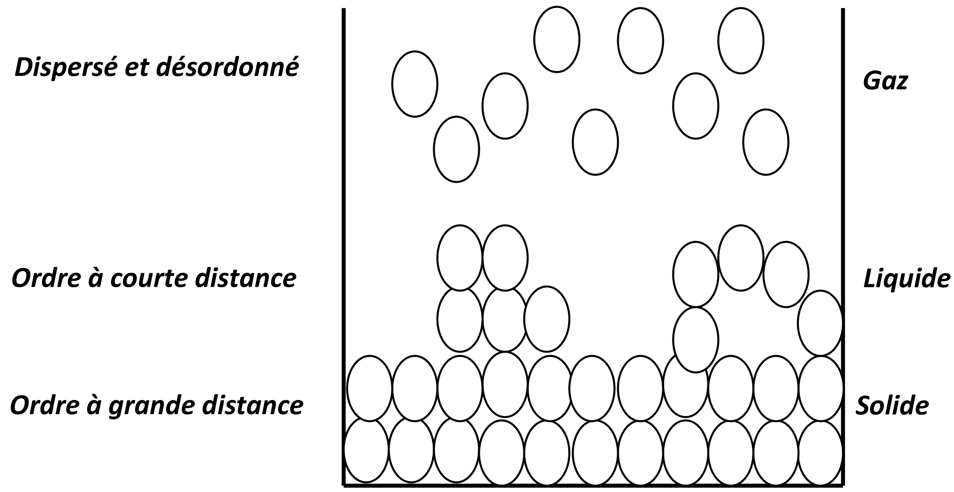


Figure II.1. Etats de la matière

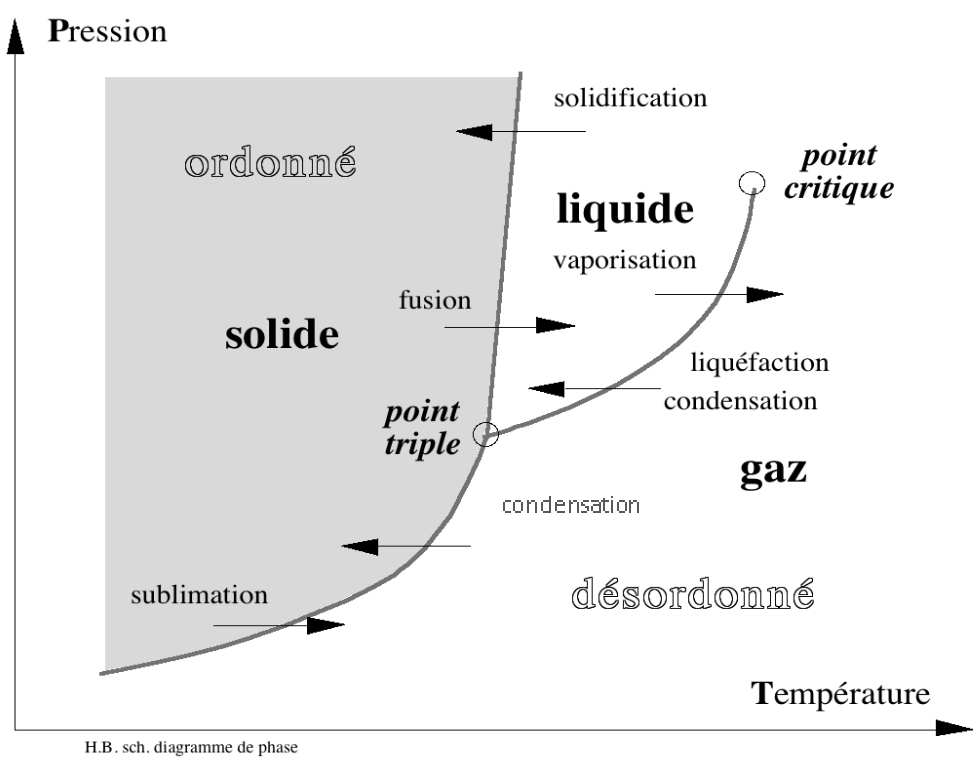


Figure II.2. Diagramme de phase d'une substance ordinaire

II.3.Milieu continu et particules des fluides

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Ses propriétés comme l'aspect moléculaire, la masse volumique, la viscosité…etc sont bien définies. Les forces de cohésion entres particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre et prend la forme du récipient qui le contient.

Avec les fluides, un phénomène nouveau apparaît lorsque l'on veut les déplacer, c'est la viscosité. La viscosité est une caractéristique physico-chimique qui définit le frottement interne des fluides et qui introduit alors la notion de fluide parfait et de fluide réel.

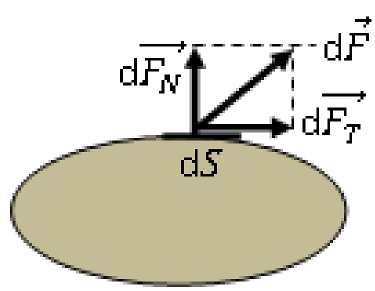
Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Notre cours est limité uniquement à des fluides newtoniens. Donc, un fluide peut être compressible, incompressible, visqueux ou non visqueux.

II.4.Définitions :

Fluide parfait:

Un fluide est dite parfait si sa viscosité est négligeable (non visqueux). Lorsque ce fluide est en mouvement les contraintes (force d'interaction) de frottement $d\overrightarrow{F_T}$ sont nulles.

Figure II.3. Forces d'interaction



Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS. On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes: une composante $d\overrightarrow{F_T}$ tangentielle (frottement) à dS et une composante $d\overrightarrow{F_N}$(cohésion) normale à dS.il est possible de décrire le mouvement d'un fluide parfait sans prendre en compte les effets de frottement. Donc $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface dS.

Fluide Réel :

un fluide réel est un fluide qui possède une viscosité (fluide visqueux) peut donner naissance à des contraintes de frottements lorsqu'il est en mouvement (résistance au mouvement). C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait.

Fluides incompressibles non visqueux

Ce sont des fluides pour lesquels la viscosité est négligeable et le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure (la variation de la masse volumique ρ est très faible).

Exemple: L'eau.

Fluides compressibles non visqueux

Caractérisés par une variation non négligeable de la masse volumique ρ (le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure), et pour lesquels la viscosité est négligeable.

Exemple: les gaz.

Fluides incompressibles visqueux

Ce sont des fluides pour lesquels la viscosité est non négligeable et le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure (la variation de la masse volumique ρ est très faible).

Exemple: L'huile.

Fluides compressibles visqueux

Caractérisés par une variation non négligeable de la masse volumique ρ (le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure), et une viscosité non négligeable.

Contraintes des frottements

Ces contraintes (forces de contact) sont produites par la viscosité des fluides lorsqu'ils sont en mouvement (résistance au mouvement), et elles donnent naissance à des pertes de charges et à dégagement de chaleur.

II.5.Propriétés physiques des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Ci-dessous nous présentons quelques propriétés des fluides :

Masse volumique: la masse volumique est le rapport entre une masse de matière homogène m et le volume V occupé par cette masse (masse de l'unité de volume)

$$\rho = \text{masse/volume} = \frac{m}{V}$$

Où m : masse en (kg) ; V : volume en (m^3)

ρ : Masse volumique en (kg/m^3), (g/cm^3)

$1 g/cm^3 = 10^3 \, kg/m^3$

Pour les liquides la masse volumique varie très peu avec la pression, mais plus sensiblement avec la température.

Contrairement à celle des liquides, la masse volumique des gaz varie beaucoup avec la pression et la température.

Selon la relation des gaz parfaits:

$$P.V = n.R.T$$

Avec (n = m/M) ; M : masse molaire

P. M = (m/V).R.T = ρ.R.T $\Rightarrow$ ρ = P. M/R.T

Exemples: Quelques masses volumiques dans des conditions normales de pression et de température (20°C sous 1.013 bar).

Fluides incompressibles

Fluide	masses volumique (kg/m^3)
Eau	10^3
Huile d'olive	$0,918.10^3$
Mercure	$13,546.\ 10^3$

Fluides compressibles

Fluide	masses volumique (kg/m^3)
Air	$0,00120510^3$
Hydrogène	$0,000085.10^3$
Méthane	$0,000717.\ 10^3$

Poids volumique:

Le poids volumique d'un corps est le poids de l'unité de volume du corps :

$$\varpi = \frac{mg}{V} = \frac{\rho V g}{V} = \rho g$$

ϖ : Poids volumique en (N/m^3).

m : masse en (kg)

g : accélération de la pesanteur en (m/s^2)

V : volume en (m^3).

Exemple:

$\varpi(Al) = 2700.9.81 = 2.646.10^4\ N/m^3$

Densité

La densité mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité. Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Exemple:

$d_{eau} = 1000/1000 = 1$

$d_{essence} = 700/1000 = 0.7$

Compressibilité:

C'est la faculté d'un fluide de pouvoir changer son volume sous l'action d'une pression. Considérons une petite masse m de fluide à la pression P et à un volume V à la température T, lorsque la pression passe de P à P+dP, le volume de V à V+dV la compressibilité isotherme est alors caractérisée par : Coefficient de compressibilité :

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = -\frac{1}{dP}\frac{dV}{V} \qquad \text{Unité : } Pa^{-1}$$

Il n'existe pas de fluide incompressible ($\chi = 0$) cependant pour les liquides, la compressibilité extrêmement faible.

La compressibilité ou non d'un fluide peut être caractérisée par la variation ou non de la masse volumique.

Exemple: Eau à 20°C : $\chi = 5.10^{-10}$ Pa^{-1}

Hélium (He) à 0°C et sous pression de 10^5 Pas : $\chi = 3.10^3$ Pa^{-1}

Viscosité :

L'eau, l'huile, le miel coulent différemment : l'eau coule vite, mais avec des tourbillons, le miel coule lentement, mais de façon bien régulière. Dans un fluide réel, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent. Les phénomènes dus à la viscosité des fluides ne se produisent que lorsque ces fluides sont en mouvement.

La viscosité d'un fluide est la résistance à l'écoulement. Ou bien glissement relatif de ses couches (contraintes tangentielles). La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit dv, à leur surface S et inversement proportionnelle à dz : Le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique du fluide :

$$F = \mu . S . \frac{dv}{dZ}$$

$$\tau = F/S = \mu . \frac{dv}{dZ}$$ (Contrainte : force par unité de surface)

µ : est la viscosité dynamique du liquide. Elle s'exprime en Pa.s (kg.m^{-1}.s^{-1}) ou Poiseuille (Pl) dans le système SI:

1 Pa.s = 1 Pl =1kg /m.s.

Dans le système CGS l'unité est le Poise(Po) avec 1 Po=10^{-1} Pl

Remarque: On utilise parfois la viscosité cinématique qui est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité cinématique ν, est le (m^2/s).

Dans le système CGS l'unité est le stockes où 1 stokes = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s.

Exemple:

Eau (20°C) : $\mu = 1{,}002 \cdot 10^{-3}$ Pl

Air (0 °C) : $\mu = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ Pl

L'expérience de Newton

Cette expérience simple démontrant l'influence de la viscosité des fluides sur sa mise en écoulement.

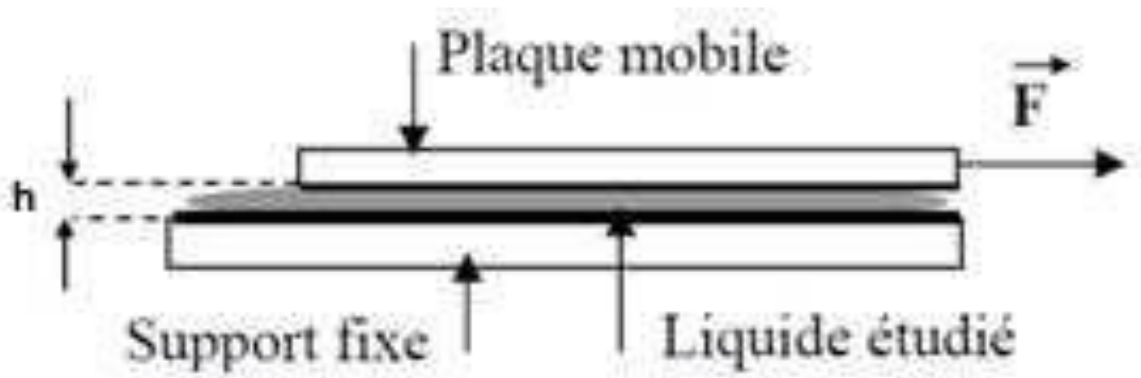


Figure II.4. Expérience de Newton

Un écoulement liquide entre deux plaques dont l'une est fixe et l'autre est animée d'un mouvement de translation à vitesse $\vec{v}$ sous l'action d'une force $\vec{F}$.

Lorsque la vitesse n'est pas trop grande, les couches de fluide ne se mélangent pas. C'est un écoulement laminaire avec une distribution de vitesse linéaire est obtenue entre la plaque fixe et la plaque mobile (Pour un fluide newtonien).

En effet, une particule de fluide en contact avec une paroi prend la vitesse de la paroi.

Vitesse d'une particule de fluide en contact avec la plaque mobile : $v=v_m$ (z=h)

Vitesse de la particule en contact avec la plaque immobile : $v_o=0$ (z=0)

$\frac{dv}{dZ}$ est vitesse ou taux de cisaillement (gradient de vitesse); accroissement de la vitesse entre les couches.

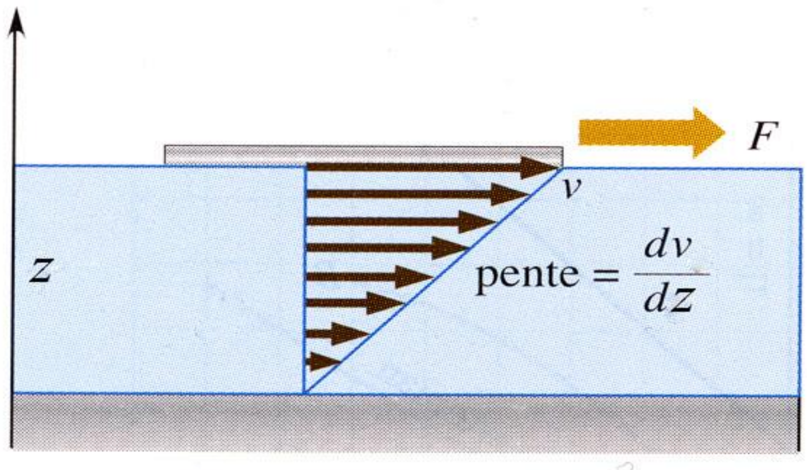


Figure II.5. Gradient de vitesse d'un écoulement liquide entre deux plaques.

$F = \mu.S.\frac{dv}{dZ}$ Loi de viscosité de Newton (la contrainte visqueuse est proportionnelle au taux de cisaillement).

<u>Fluides newtoniens</u>

satisfont à la loi de Newton. Ces fluides ont un coefficient de viscosité indépendant du gradient de vitesse (constante).

<u>Fluides non-newtoniens :</u>

Le fluide est non-newtonien lorsque la viscosité varie avec le gradient de vitesse (ou taux de cisaillement). La contrainte est donnée par la relation :

$$\tau = F/S = \mu_{app}.\frac{dv}{dZ}$$

$$\mu_{app} = K\,(.\frac{dv}{dZ})^{n-1}$$

$$\tau = \frac{F}{S} = K\,(.\frac{dv}{dZ})^{n}$$

μ_{app} représente la viscosité apparente ou effective du fluide non-newtonien considéré et K est une constante donnée qui dépend du fluide étudié et n l'index du fluide.

<u>Cas :</u>

Fluide newtonien : n=1

Fluide parfait : μ = 0

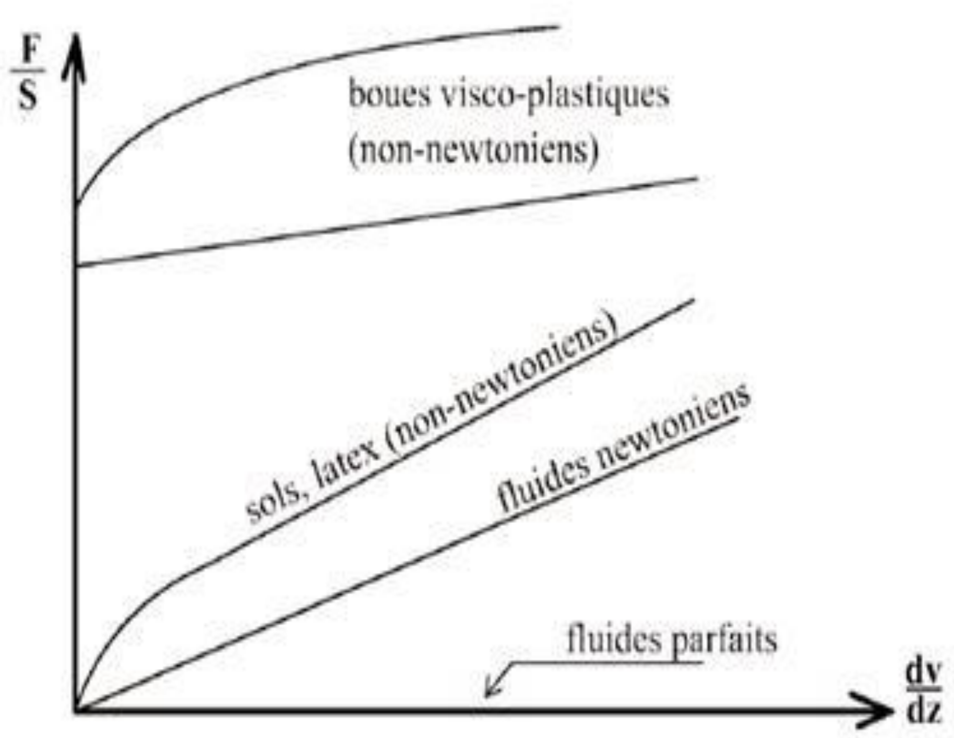


Figure II.6. Variation de $\tau = \frac{F}{S}$ en fonction de $\frac{dv}{dZ}$ de différents fluides.

Dans le cas général, sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. On dit qu'il existe un profil de vitesse.

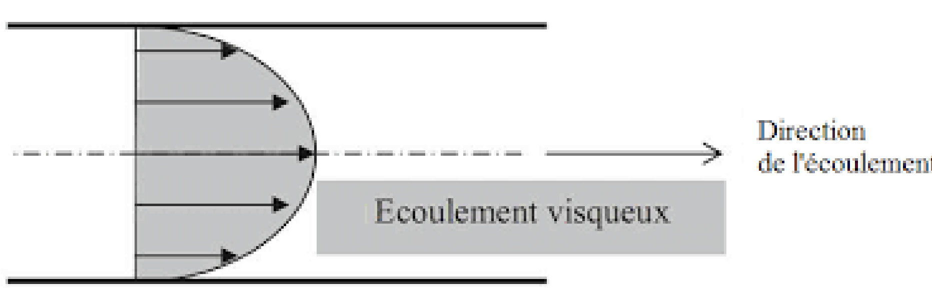


Figure II.7. Profil de vitesse.

Cas : écoulement d'un fluide parfait sur une plaque immobile (fixée)

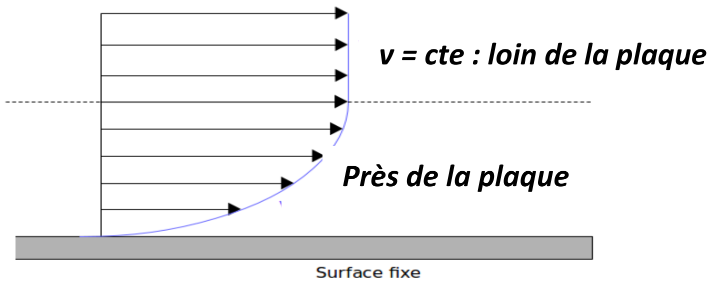


Figure II.8. Ecoulement d'un fluide parfait sur une plaque immobile.

Variation de la viscosité en fonction de la température

Dans le cas des gaz, une augmentation de la température entraîne un mouvement plus intense des molécules et accroît le mélange moléculaire et donc la viscosité augmente. Dans le cas d'un liquide, lorsque la température augmente les molécules se séparent entre elles, décroissant l'attraction entre elles et donc la viscosité diminue.

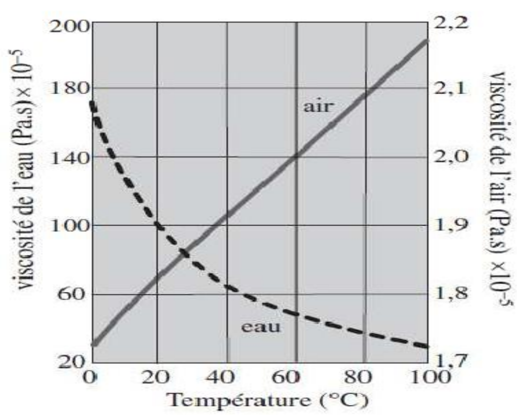


Figure II.9. Variation de la viscosité en fonction de la température.

Exemple :

Eau (0°C) : $\mu = 1{,}787 \cdot 10^{-3}$ Pl

Eau (20°C) : $\mu = 1{,}002 \cdot 10^{-3}$ Pl

Eau (100°C) : $\mu = 0{,}2818 \cdot 10^{-3}$ Pl

II.6. Exemples d'application:

1. Si 5 m^3 de certaines huiles pèsent 45 kN, calculer le poids volumique, la densité, et la masse volumique de l'huile.

Solution

Le poids volumique: $\varpi = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \frac{\rho V g}{V} = \rho g$ $\varpi = \frac{P}{V} = 9KN/m^3$

La masse volumique : $\rho = \frac{\varpi}{g} = 914 kg/m^3$

La densité : $d = \frac{\rho}{\rho_{eau}} = 0.914$

2. Une plaque (2m x 2m) à 0,25 mm de distance d'une plaque fixe se déplace à 40 cm/s et nécessite une force de 1 N. Déterminer la viscosité dynamique du fluide entre les plaques.

Solution: $\tau = F/A = 0.25 N/m^2$

$$\tau = F/A = \mu.\frac{dv}{dZ} \Rightarrow \mu = \frac{\tau}{\frac{dv}{dZ}} = 1.56.10^{-4} \text{ pas.s}$$

3. Un fluide avec une viscosité dynamique μ = 0.001 (kg/m.s) s'écoule sur une plaque ($v_{max} = 45 m/s$ correspond à y= 3m).

Déterminer le gradient de vitesse (dv/dy) et l'intensité de la contrainte de cisaillement aux points y = 0, 1, 2 et 3 m, en supposant qu'entre le point A et B :

a) la vitesse varie de façon linéaire.

b) la distribution de vitesse est parabolique avec un gradient de vitesse nulle au point A.

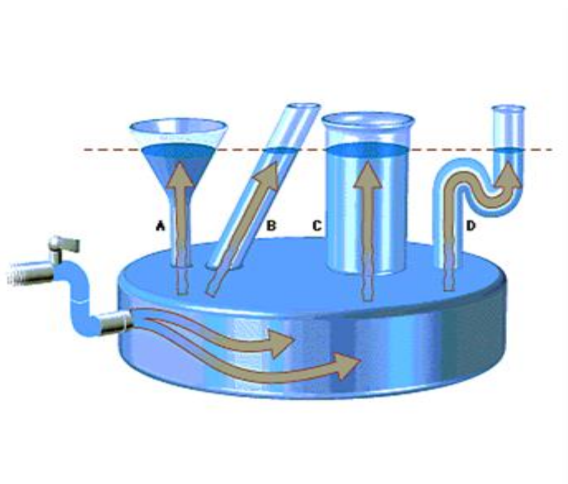
Solution

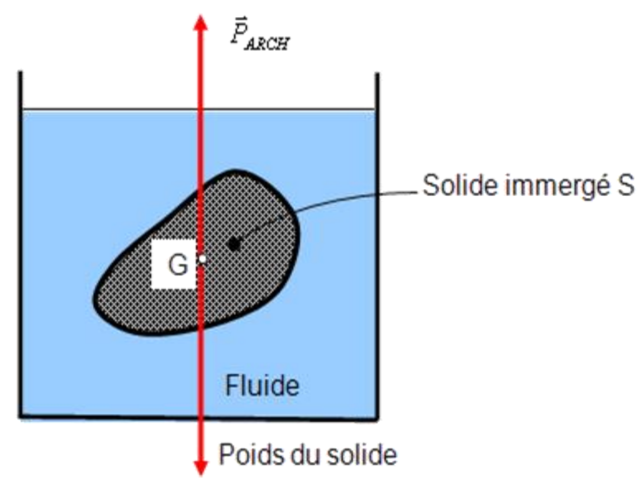
a) $dv/dy = 15\ s^{-1}$, $\tau = \mu.\frac{dv}{dZ} = 0.0015\ N/m^2$ pour tout y

b) dv/dy = 30, 20, 10, 0 s^{-1} et τ = 0.030, 0.020, 0.010, 0 N/m^2 pour y = 0, 1, 2 et 3 m.

Chapitre III :

Statique des fluides





Chapitre III: Statique des fluides

Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. La notion de pression, forces de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la loi fondamentale de l'hydrostatique sont expliqués.

Pré-requis:

- Généralités sur les fluides.
- Le principe fondamental de la statique
- Connaître le calcul d'intégral et le gradient d'une fonction scalaire
- Notion de force de volume

Objectifs:

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable:

- d'appliquer loi fondamentale de l'hydrostatique
- d'énoncer le théorème de Pascal
- de déterminer la force de pression exercée sur une paroi quelconque
- de déterminer la poussée d'Archimède appliquée sur les solides

immergés dans un fluide.

III.1. Introduction

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. On notera que dans ce cas il n'y a pas de manifestation de la viscosité et donc l'étude reste valable pour le cas des fluides réels.

Lors d'une plongée sous-marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface.

L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact. Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs.

III.2. Pression en un point d'un fluide

Définition de la pression:

Soit une masse quelconque de fluide, prenons un point M de cette masse et divisons la en deux partie (I) et (II), telle que la surface de séparation passe par M.

La partie (I) exerce sur la partie (II) une certaine force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ alors : $\vec{T}= \frac{\overrightarrow{dF}}{ds}$: tension (contrainte) au point M.

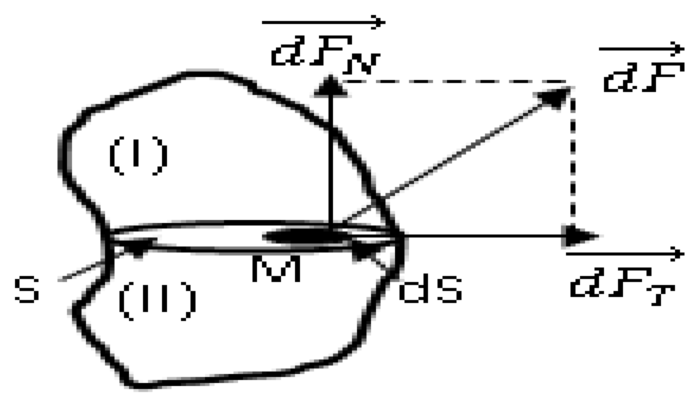


Figure III.1. Forces d'interaction

$\vec{P}=\frac{\overrightarrow{dF_N}}{ds}$: tension (contrainte) normale (verticale) au point M.

$\vec{\tau}=\frac{\overrightarrow{dF_T}}{ds}$: tension (contrainte) tangentielle (horizontale) au point M.

La grandeur scalaire de la tension normale s'appelle «pression hydrostatique » : $|\vec{P}|=\frac{|\overrightarrow{dF_N}|}{ds}$

C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

Fluide au repos : La composante tangentielle est nulle $|\vec{\tau}|=\frac{|\overrightarrow{dF_T}|}{ds}=0$

Unité de pression

Unité normalisée:

Dans le SI, l'unité de la pression est le pascal, ou newton par mètre au carrée (N/m^2). Le multiple recommandé est le bar : 1bar = 10^5Pas.

Unités Industrielles:

Manomètres à colonne de liquide, sont gradués directement en hauteur de liquide manométrique.

Exemple:

Le millimètre de colonne d'eau (mmCE) : 1mm d'eau = 1kgf/m^2 = 9.81 pas

Le millimètre de mercure (mmHg) : 1mm de mercure= 13.595 mm d'eau = 133.3 pas.

- Pression atmosphérique (pression en atmosphère) :

1atm = 760mmHg = 10.33 m d'eau = 1.013.10^5Pas ≈ 1bar

III.3. Forces de volume et de contact dans un système fluide:

Soit une surface (S) séparé un système fluide en mouvement (au repos en deux partie (I) et (II). Dans le système, la partie II est soumise de la part de la partie I à deux types de forces :

- Forces volumiques comme la force de pesanteur, magnétiques, électriques…etc, que traduisant des actions à distance.

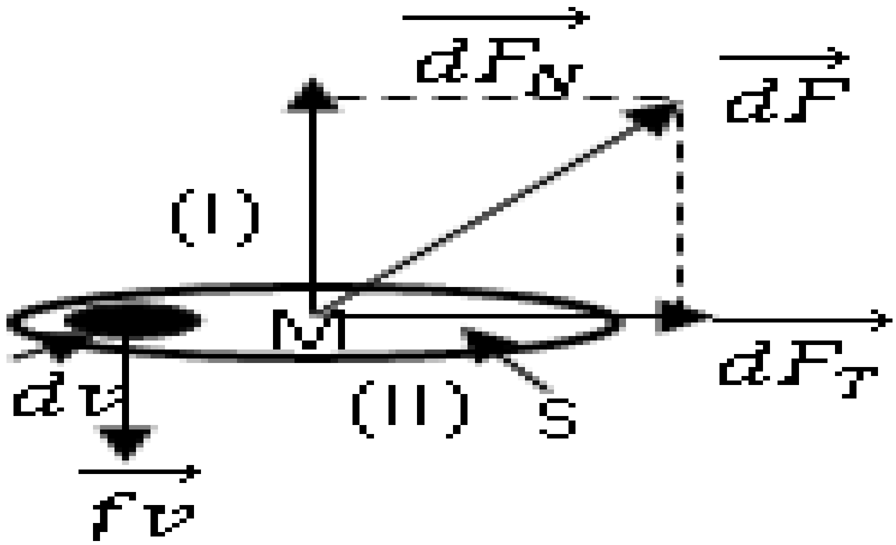


Figure III.2. Forces volumiques et forces de contact

Les forces volumiques: $\overrightarrow{dF_v} = \overrightarrow{fv}.dv$

$\overrightarrow{fv}$ est la force par unité du volume

Force de pesanteur : $dF_v = \rho g.dv = \varpi.\,dv$

- Forces de contact: comme la force de pression.

$\overrightarrow{dF_s} = \overrightarrow{fs}.ds$

$\overrightarrow{fs}$: est la force par unité du surface, appelée contrainte (pression dans le cas de fluide parfait ou réel au repos : composante normale).

La composante tangentielle est liée à la viscosité du fluide c.-à-d. les contraintes de frottement. Fluide parfait : viscosité = 0 ⇒ les contraintes de frottement sont nulles.

Gradient de pression dans un système fluide (en équilibre):

On étudie les forces exercent sur un élément du fluide sous forme d'un cylindre élémentaire dx, dy ,dz

- Les forces du volume $\overrightarrow{dF_v} = \overrightarrow{fv}.dv$

- Les forces de contact : force de pression (le cas de fluide parfait ou réel au repos).

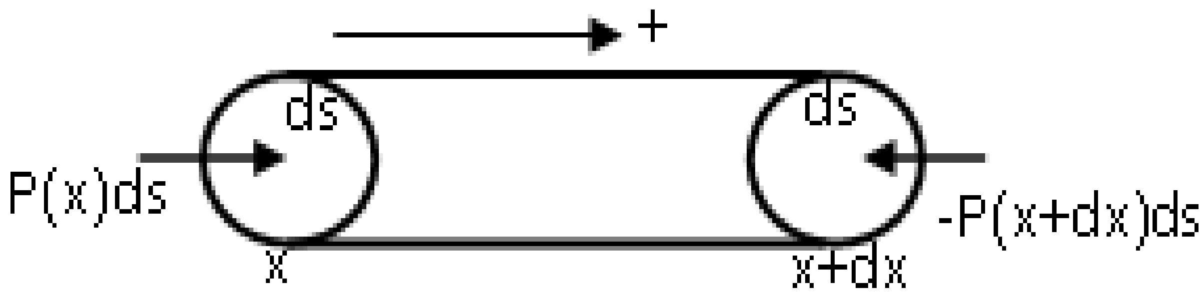


Figure III.3. Gradient de pression dans un système fluide.

Soient f_x, f_y et f_z les composantes de la force fv suivant les axes ox, oy et oz.

Suivant l'axe ox : déplacement de x à x+dx : P(y) = cte , P(z) = cte L'élément est en équilibre: $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P(x)ds - P(x+dx)ds + f_x dv = 0$

$$\Rightarrow P(x)dydz - (P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx)dydz + f_x dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow f_x = + \frac{\partial P}{\partial x}$$

Même démonstration suivant les axes oy et oz, ce qui donne :

$$f_y = + \frac{\partial P}{\partial y} \text{ et } f_z = + \frac{\partial P}{\partial z}$$

On peut représenter ces équation sous forme vectorielle et on fait leur somme, on trouve : $\overrightarrow{fv} = \overrightarrow{grad}\, P$

$$\overrightarrow{grad}\, P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{fv} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

$\overrightarrow{fv} = \overrightarrow{grad}$ P: l'équation fondamentale de la statique des fluides

III.4. Statique des fluides incompressibles dans le champ pesanteur:

Dans ce cas, il ya seulement des forces de pesanteur: $\overrightarrow{fv} = -\rho\,\vec{g}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f_y = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = f_z = -\rho g$$

En intégrant l'équation, on obtient l'équation fondamental de la statique des fluides incompressibles dans le champ pesanteur : $P + \rho g z = Cte$

Remarques

1) Si en intégrant l'équation entre 2 points M_1 et M_2 de hauteur z_1 et z_2 et de pression P_1 et P_2 on obtient: $P_2 - P_1 = \rho g\,(z_1 - z_2) = \rho g h$

2) Surfaces d'égales pressions (isobares) : les isobares se sont des plans horizontaux. P=cte $\Rightarrow dP=0 \Rightarrow dz=0 \Rightarrow z=cte$.

Exemple: la surface libre : $P=P_{atm}=cte \Rightarrow$plan horizontal.

Vases communiquent:

Le principe des vases communicants établit qu'un liquide homogène remplissant plusieurs récipients, reliés entre eux à leur base et soumis à la même pression atmosphérique, s'équilibre à la même hauteur dans chacun d'eux. Ceci est vrai quels que soient leur forme et leur volume.

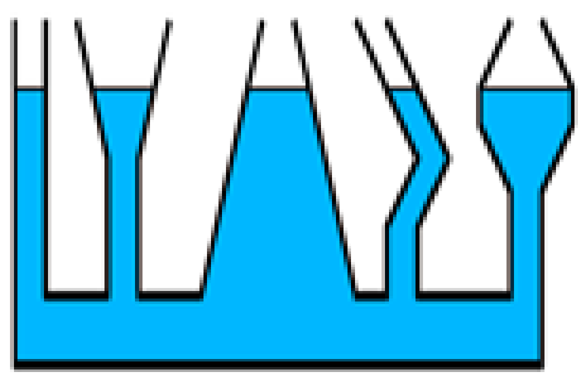


Figure III.4. Vases communiquent.

Pression absolue et pression relative

La pression absolue est la pression réelle mesurée par rapport au vide absolu (c'est- à dire l'absence totale de matière, correspond à la pression nulle.).

La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique (pression de l'air).existant au moment de la mesure :

$P = P_{atm} + \rho gh$: Pression absolue.

$P = \rho gh$: Pression relative.

Donc : Pression absolue = pression atmosphérique +Pression relative.

III.5. Applications: (mesure de la pression)

1) Baromètre: mesure de la pression atmosphérique: $P_{atm} - P = \rho gh$.

Comme la pression P est nulle (vide) : $P_{atm} = \rho gh$

Exemple: mercure

$\rho = 13568 kg/m^3$

$h = 760 mm$

$P_{atm} = 1.013.10^5 Pas$

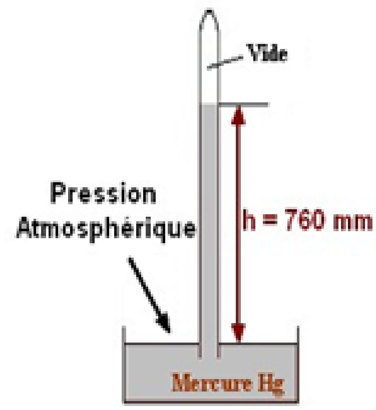
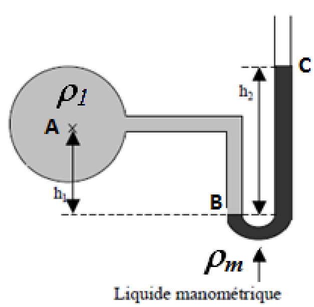


Figure III.5. Baromètre.

2) Manomètre: mesure la différence de pression en fonction de la différence de hauteur du liquide contenu dans le manomètre $\Delta P = P - P_0 = \rho g \Delta z = \rho gh$

$P_A - P_{atm} = \rho_m gh_2 - \rho_1 gh_1$



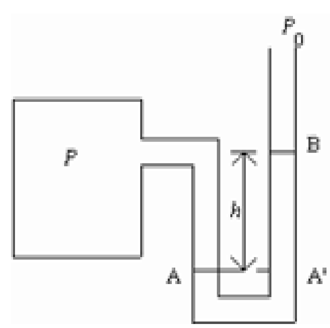


Figure III.6. Manomètre.

Transmission des pressions dans les liquides

Théorème de Pascal: Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

Principe de la statique entre A et B:

$P_A = P_B + \rho.g.\,h$

Si on exerce une force sur la surface, on provoque une surpression ΔP
$P_B' = P_B + \Delta P$

Principe de la statique :

$P_A' = P_B' + \rho.g.\,h$

$P_A' = P_B + \Delta P + r.g.\,h \;\Rightarrow P_A' = P_A + \Delta P$

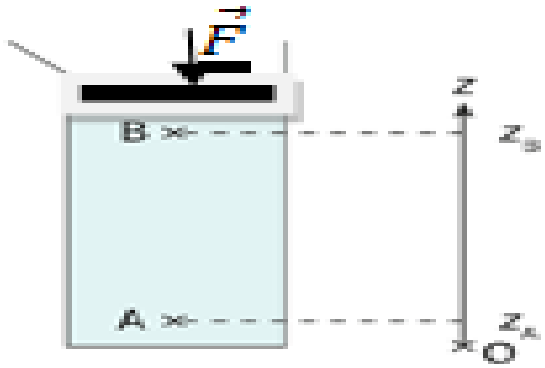


Figure III.7. Transmission des pressions dans les liquides.

Application

Presse hydrostatique: basé sur le théorème de pascal

F_1 exercée sur le petit piston produit une augmentation de pression égale

$\Delta P = \frac{F_1}{S_1}$.

Cette différence de pression transmise au piston S_2 :

$\Delta P = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = S_2\,\Delta P = F_1.\frac{S_2}{S_1} >> F_1\ (S_2 >> S_1)$

Amplifier la force F_1

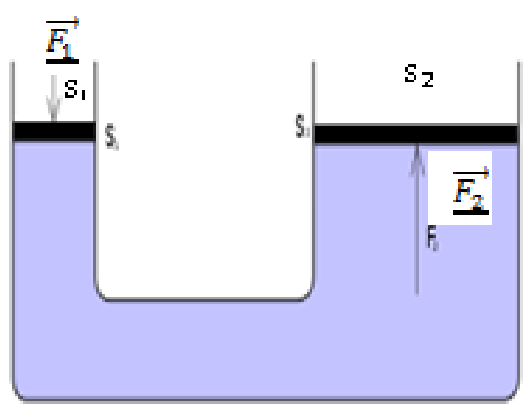


Figure III.8. Presse hydrostatique.

Equilibre de deux fluides non miscibles :

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique (ρ_2), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (ρ_1) est versé, il est observé une dénivellation $h=(h_1-h_2)$ entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique.

$P_B - P_A = \rho_1 g h_1 \quad P_B - P_C = \rho_2 g h_2$

$P_A = P_C \Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$

Les dénivellations de deux liquides non miscibles sont en rapport inverse de leurs masses volumiques.

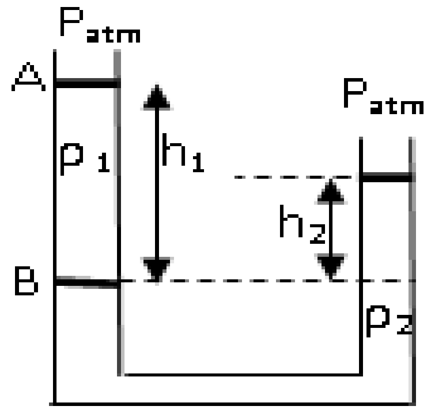


Figure III.9. Equilibre de deux fluides non miscibles.

III.6. Statique des fluides compressibles (gaz):

Pour un fluide compressible la variation de la masse volumique es donnée par l'équation d'état :

$\rho = \frac{PM}{RT}$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} g \Rightarrow \frac{dP}{p} = -\frac{gM}{RT} dz \Rightarrow \text{lin}\frac{P}{P_0} - \frac{gM}{RT} z \Rightarrow \qquad P = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT} z\right)$$

III.7. Forces de pression exercés par un fluide au repos sur des surfaces solides

Force de pression sur une surface horizontale:

$F = PS = \rho g h S$

Figure III.10. Force de pression sur une surface horizontale.

Force de pression sur une surface verticale :

Pression n'est pas uniforme sur toute la surface

La force de pression sur un élément de surface ds et la force élémentaire perpendiculaire à ds.

$\mathrm{dF} = \rho g(h - z)\mathrm{dS} \;=\; \rho g(h - z)\mathrm{dy.dz} \Rightarrow F = \sum \mathrm{dF} = \int \mathrm{dF}$

$F = \int_0^L \mathrm{dy}.\int_0^h \rho g(h - z).\mathrm{dz} = \rho g L.\frac{h^2}{2} = \rho g S.\frac{h}{2} = \rho g S.h_G$

G: centre de gravité, $S = h.L$

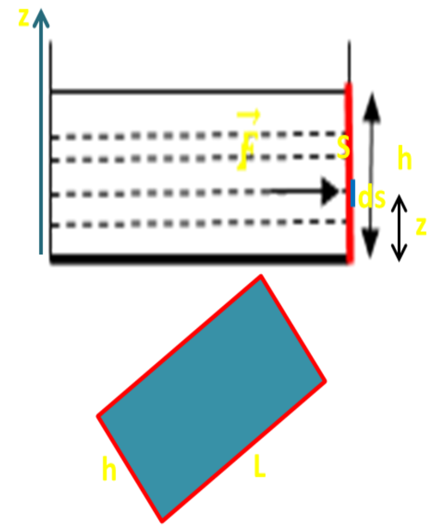


Figure III.11. Force de pression sur une surface verticale.

Centre de poussée : Point d'application de F

Soit Δ la droite d'intersection entre la surface libre et la surface S considérée.
Le moment de la force résultante doit être égal au moment de la force de pression distribuée.

$M(\vec{F}/(\Delta)) = \vec{M}(\vec{F}/O).\vec{e} = (\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}).\vec{e} = F.\,OC = \rho g S.h_G.\,OC$

D'autre part: $M(\vec{F}/(\Delta)) = \int M(\overrightarrow{dF}/(\Delta)) = \int \mathrm{dF}.\,OB = \int \rho g z^2 \mathrm{d}\,S$

$\int z^2 \mathrm{d}\,S = I_\Delta$: est le moment d'inertie de la surface par rapport à ***Δ***

$S.h_G.\,OC = I_\Delta \Rightarrow OC = \frac{I_\Delta}{S.h_G}$

Théorème des axes parallèles : $I_\Delta = I_{\Delta G} + S.{h_G}^2 \;\Rightarrow OC \;=\; \frac{I_{\Delta G}}{S.h_G} + h_G$

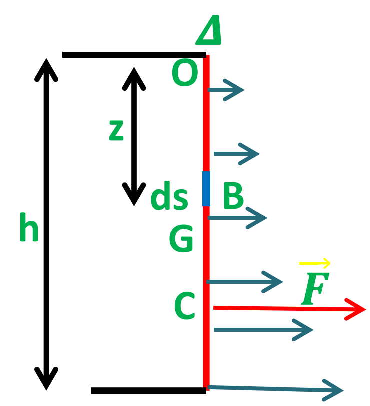


Figure III.12. Centre de poussée

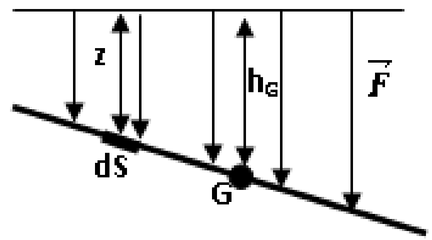
Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G

Exemple : $S = h.L$ $\quad h_G = \frac{h}{2}$ $\quad I_{\Delta G} = \frac{L.h^3}{12}$ $\quad OC = \frac{2}{3}h$

Force de pression sur une surface inclinée :

G: centre de gravité

La force de pression sur un élément de surface ds et la force élémentaire perpendiculaire à ds.



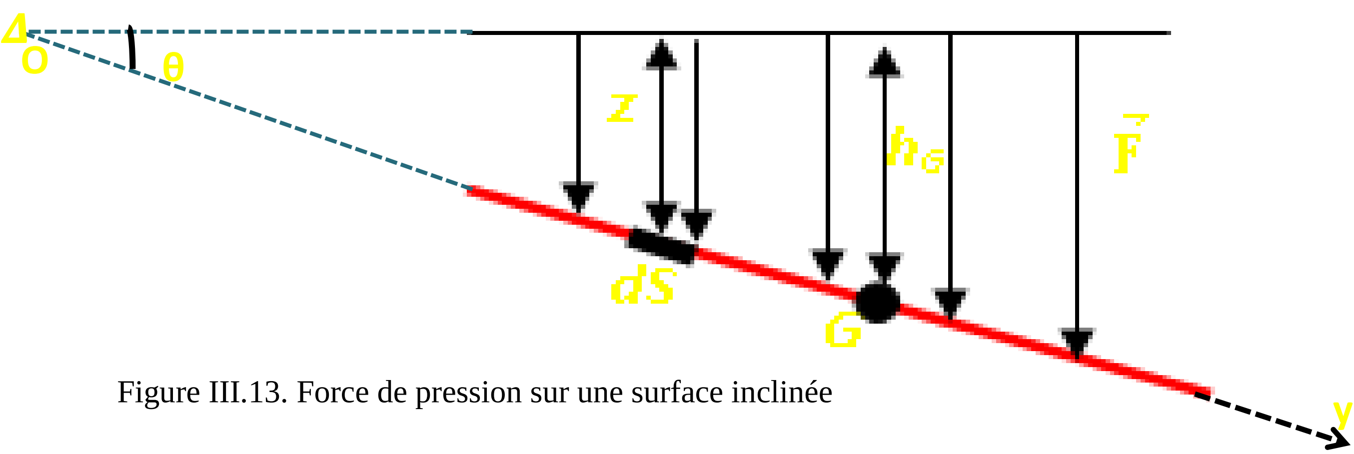


Figure III.13. Force de pression sur une surface inclinée

$dF = \rho gzdS \Rightarrow F = \sum dF = \int dF = \int \rho gzdS = \int \rho gy\sin\theta dS = \rho g\sin\theta \int ydS$

$\int ydS = y_G S$: Moment statique de la surface S par rapport à l'axe ***Δ***

$F = \rho g\sin\theta\ y_G S = \rho g\ h_G S$

Centre de poussée : Point d'application de F

$y_p = \frac{I_{\Delta G}}{S.y_G} + y_G$

Forces exercées par un fluide sur des parois quelconque (cylindriques):

$\vec{F}$ exprimer en fonction de $\overrightarrow{F_h}$ et $\overrightarrow{F_V}$

$F = \sqrt{F_h^2 + F_V^2}$

F_h : la force normale s'exerçant sur la projection verticale de la surface courbée sur le plan verticale à la surface libre (ds').

$dF_h = \rho gzdS' \Rightarrow$

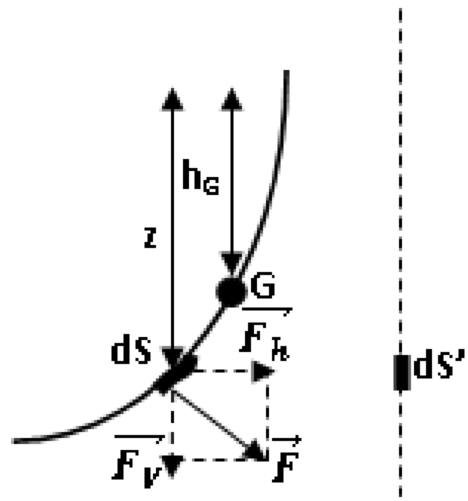
$F = \int dF_h = \int \rho gzdS' = \rho gh_G S'$

h_G est la profondeur du centre de gravité de la surface S'

F_V : la force verticale est égale au poids du volume du liquide situe au-dessus de cette surface.

$dF_V = \rho gzdS = \rho gdV \Rightarrow$

$F_V = \rho gV$



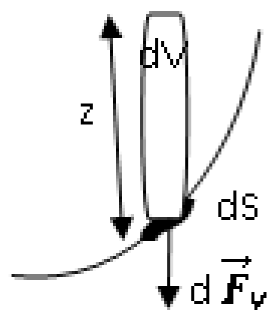


Figure III.14. Forces exercées par un fluide sur des parois quelconque (cylindriques)

III.8. Poussée d'Archimède

Equilibre d'un volume de liquide

Considérons, à l'intérieur d'un liquide au repos, un volume de liquide V limite par une surface S. Ce volume est soumis à deux types de forces :

a) Poids P appliqué en son centre de gravité G.

b) Résultante des forces de pression exercées par le liquide voisin. $\vec{F} = \sum P_i dS_i$

L'élément en équilibre : $\vec{F} = -\vec{P}$; $F = P$

Le point G est à la fois le centre de gravité et centre de poussée.

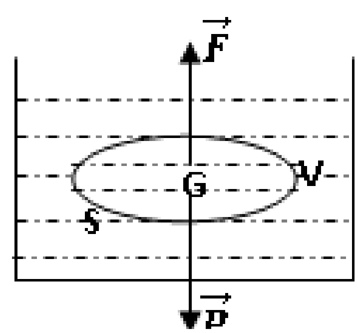


Figure III.15. Volume de liquide V limite par une surface S

Un solide placé dans un liquide (ρ_L) au repos peut prendre l'une des positions suivantes :

1) Une partie seulement du solide est immergée (à l'intérieur du liquide). On dit que « le solide flotte ».

2) Le solide est complètement immergé et reste entre 2 couches liquides.

3) Le solide est complètement immergé mais touche le fond (il coule).

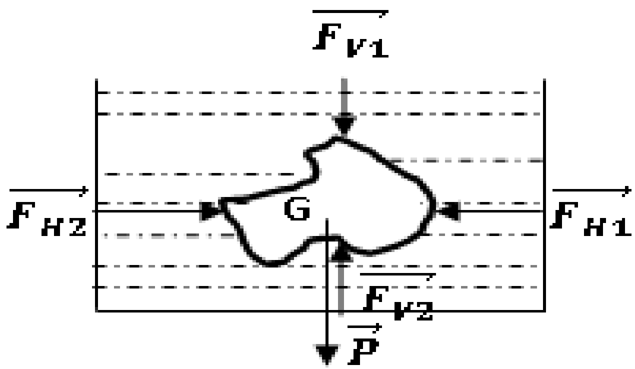


Figure III.16. Un solide placé dans un liquide au repos

Ce solide est soumis à deux types de forces : Poids P appliqué en son centre de gravité G et les forces de pression

F_H : s'annulent entre elles : $\overrightarrow{F_{H2}} = -\overrightarrow{F_{H1}}$

Les forces verticales : F_{V2}- $F_{V1} = \rho g V$

Théorème d'Archimède

Dans les différents cas, le solide subit de la part du liquide qui l'entoure une poussée (poussée d'Archimède) verticale, dirigée de bas en haut et égale à poids du volume du liquide déplacé. Cette force est appliquée au centre de gravité du liquide déplacé.

La poussée d'Archimède est : $A = \rho_L\, V_{dép}.g$

Le liquide étant incompressible $V_{dép} = V_{im}$

$$A = \rho_L\, V_{im}.g$$

A en (N), ρ_L (Kg/m^3), g (m/s^2) et V_{im} (m^3)

Condition de flottaison:

À l'équilibre statique:

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P = A$

$P = \rho_s . V_s . g$

$A = \rho_L . V_{im} . g \Rightarrow$

$\rho_L . V_{im} = \rho_s . V_s$

ρ_s : masse volumique du solide.

Vs : volume de solide

V_{im} : volume de solide immergé

Pour que le solide Flotte, il faut que $\rho_s < \rho_L$

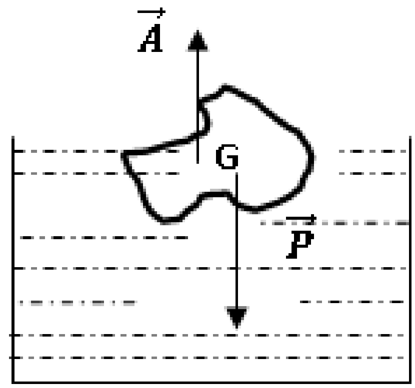


Figure III.17. Un solide en équilibre dans un liquide au repos ; Condition de flottaison

Condition d'immersion:

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P = A$

$P = \rho_s . V_s . g$

$A = \rho_L . V_{im} . g$

$V_{im} = V_s$

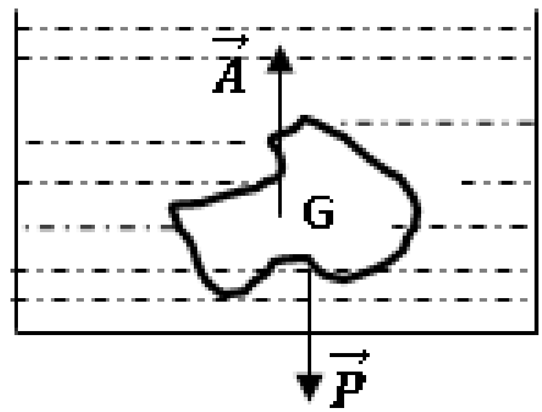


Figure III.18. Un solide en équilibre dans un liquide au repos ; Condition d'immersion

Pour que le solide soit immergé et reste entre deux couches liquides, il faut que $\rho_s = \rho_L$

Solide complètement immergé et touche le fond:

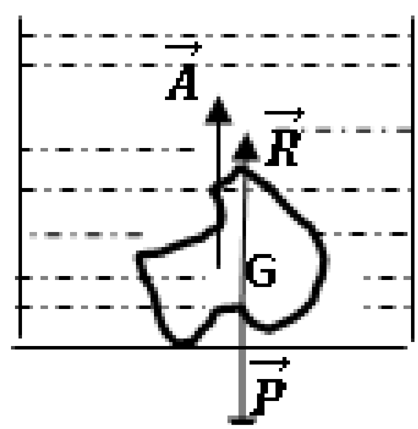


Figure III.19. Solide complètement immergé et touche le fond

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P = A + R$

$P = \rho s\ .V_s\ .g$

$A = \rho L\ .V_{im}\ .g$

$V_{im} = V_s$

Pour que le solide soit complètement immergé et touche le fond, il faut que $\rho s > \rho L$

Condition de stabilité :

P : appliquée en G centre de gravité du solide.

A : appliquée en C centre de poussée

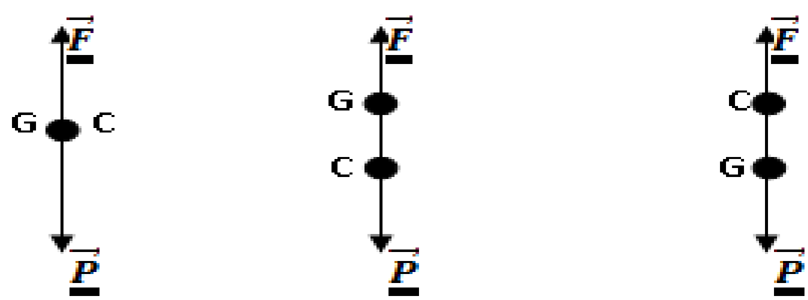
C : est le centre géométrique du solide immergé, il peut être différent de G. C : dépend de la forme et non de la constitution du solide.

Du fait que le solide est soumis à A et P alors, G et C doivent être sur la même verticale.

* si G et C sont confondus (solide homogène), la stabilité est indifférente.

* G en dessous de C : équilibre stable

* G en dessus de C : équilibre instable.



Solide homogène Équilibre instable Équilibre stable

Figure III.20. Condition de stabilité

III.9. Exemples d'application:

1. Déterminer (a) la pression manométrique (relative) et (b) la pression absolue de l'eau à une profondeur de 9 m de la surface.

Solution : L'EFHS :

La pression manométrique (relative) est la pression au-dessus de la pression atmosphérique normale : $P_r = \rho gh = 0.88131 .10^5$ pas

La pression absolue: $P_{ab} = \rho gh + P_{atm} = = 0.88131 .10^5 + 1.01213 .10^5 = 1.89344 .10^5$ pas

2. Un réservoir fermé contient 1.5 m d'huile (ρ_{hui} = 888.8 kg/m^3), 1 m d'eau (ρ_{eau} = 1000kg/m^3) et 20 cm de mercure (ρ_{mer}= 13567 kg/m^3), et en haut un espace qui contient de l'air. Si la pression en bas du réservoir est P_{Bas} = 60 kPa, qu'elle est la pression de l'air en haut du réservoir ?

Solution ; L'EFHS : $P_{Bas} = P_{Air} + \rho_{hui}gh + \rho_{eau}gh_e + \rho_{mer}gh_m \Rightarrow P_{Air} = 10500$ Pa

3. Un bouchon en liège est maintenu au fond d'un récipient rempli d'eau. On le lâche. a) Que va faire le bouchon ? b) Le bouchon possède un volume de 0,250 dm^3. La masse volumique du liège est de 0,2 kg.L^{-1} .Calcule le poids du bouchon et l'intensité de la poussée d'Archimède.

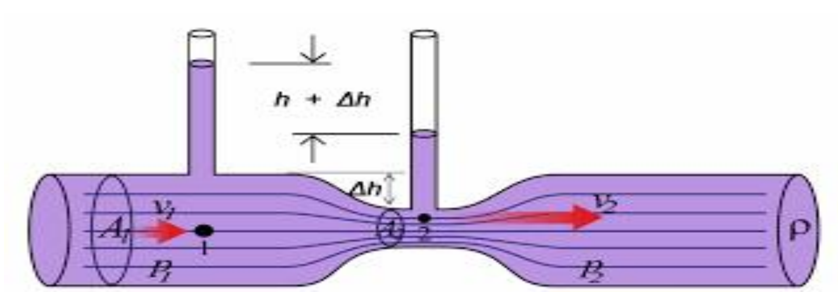
Solution

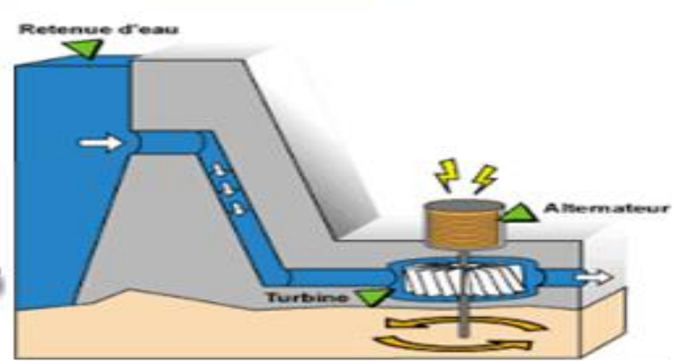
a) Le bouchon remonte à la surface.
b) P(bouchon) = m(bouchon).g

   P(bouchon) = 0,2.0,250.9,81 = 0,49 N

   Pa = ρ_{eau}.V(bouchon).g = 2,45 N.

Chapitre IV : Dynamique des fluides parfaits incompressibles





Chapitre IV : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

L'objectif de la dynamique est de relier l'écoulement aux actions qui lui donnent naissance. On fait un bilan des forces s'exerçant sur une particule de fluide puis on applique les lois de la mécanique classique. Nous allons étudier les écoulements pour lesquels les forces de viscosités sont négligeables.

Pré-requis:

- Généralités sur les fluides.
- Loi fondamentale de l'hydrostatique.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Le principe fondamental de la Dynamique.
- Notion de débit.

Objectifs:

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- d'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible avec ou sans échange d'énergie.
- d'appliquer l'équation d'Euler pour le cas d'un fluide parfait
- d'appliquer l'équation de continuité.

IV .1. Introduction

La dynamique des fluides est la science qui s'intéresse au comportement des fluides en mouvement.

On considère que les fluides étudiés sont parfaits et incompressibles (On ne tiendra pas compte des effets de viscosité $\mu = 0$ et $\rho = cte$). On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

L'équation de continuité (conservation de la masse).

Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).

Le théorème d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement).

IV .2. Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement.

IV .3. Ligne de courant, tube de courant

Une ligne de courant est une ligne tangente en tous ces points au vecteur vitesse des particules qui se trouvent sur cette ligne au moment donné. L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé forme le tube de courant.

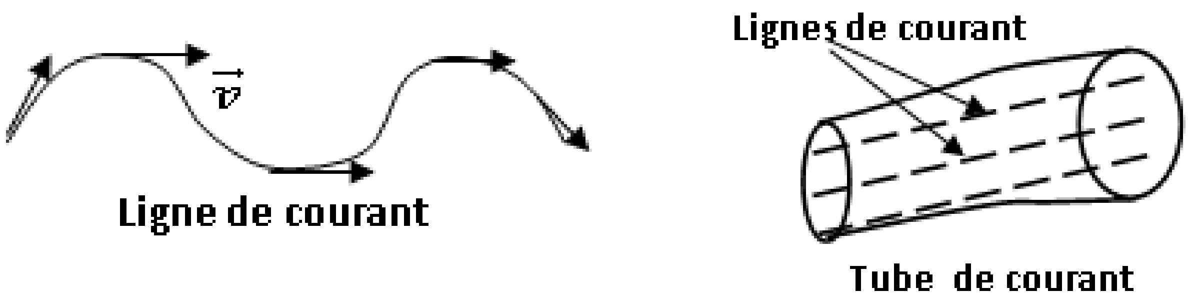


Figure IV.1. Ligne de courant, tube de courant

IV .4. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des x ; pour les autres directions y et z elle se fait de façon analogue.

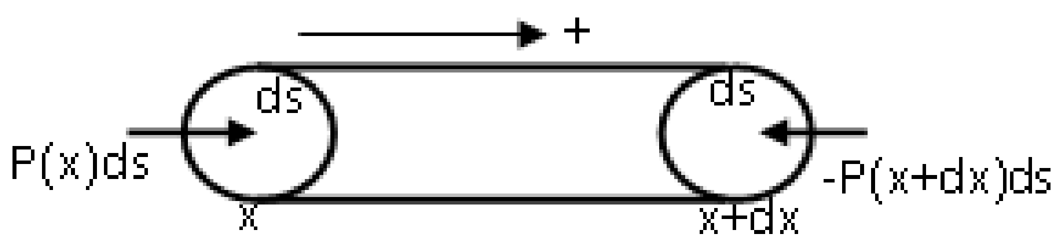


Figure IV.2. Elément de volume

Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dSdx) sont :

1. La force de volume : fv.(dSdx)

2. Les forces de pression : p(x)dS et P(x+dx)dS

3. La force d'inertie (accélération) :ρa_x (dSdx) $\left(a_x = \frac{dV_x}{dt}\right)$

L'équation de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ex}} = m.\vec{a}$

Suivant ox : $\sum F_{ex} = ma_x = m\frac{dV_x}{dt} = \rho dSdx\frac{dV_x}{dt}$

La condition d'équilibre des forces selon la direction de ox s'écrit : $P(x)ds - P(x+dx)ds + f_x\, dSdx = \rho dSdx\frac{dV_x}{dt}$

$$\Rightarrow f_x - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho\frac{dV_x}{dt}$$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle :

$$\vec{fv} - \overrightarrow{grad}\, P = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Ce sont les équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou équations d'Euler.

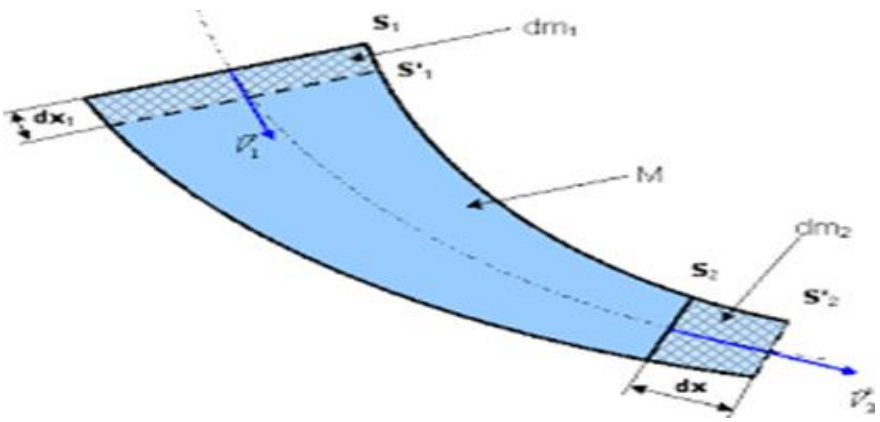
1. $\vec{fv}$: Force de volume par volume unitaire.

2. $\overrightarrow{grad}\, P$: Force de pression par volume unitaire.

3. $\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$: Force d'inertie par volume unitaire.

IV .5. Equation de Continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



S_1 et

Figure IV.3. Veine d'un fluide incompressible animée d'un écoulement permanent

S_2 sont respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t.

S'_1 et S'_2 sont respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t' (t+dt)

$\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.

dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt .

dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1.

dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2.

m : masse comprise entre S_1 et S_2

dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1.

dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2.

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+m)

A l'instant t' : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(m+dm_2)$ La masse déplacée étant conservée, on écrit alors:

$dm_1+m = m+dm_2$

Soit $dm_1 = dm_2$

Alors : $\rho_1 dV_1 = \rho_2\, dV_2$

Ou encore : $\rho_1\, S_1\, dx_1 = \rho_2\, S_2\, dx_2$

En divisant par dt, on obtient:

$\rho_1\, S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2\, S_2\, \frac{dx_2}{dt}$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1V_1 = S_2V_2$$

L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

IV .6. Notion de débit

Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm /dt quand dt tend vers zéro:

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

Où :

q_m : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s].

dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt.

En tenant compte des équations précédentes, on obtient:

$$q_m = \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2 = \rho S V$$

S : Section de la veine fluide en (m^2)

V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers zéro:

$$q_V = \frac{dV}{dt}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dV : Volume élémentaire, en (m^3), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt.

- dt : Intervalle de temps en secondes (s)

$$dV = \frac{dm}{\rho}$$

On peut écrire également que:

$$q_V = S.V$$

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique:

$$q_m = \rho q_V$$

IV .7. Théorème de Bernoulli

Cas d'un écoulement sans échange de travail

Soit un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible dans une conduite (reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe de 'équation de continuité).

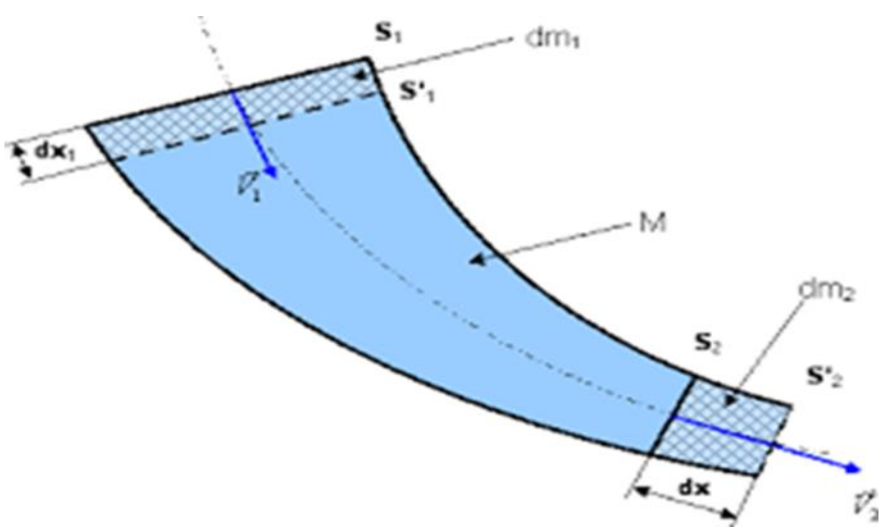


Figure IV.4. Écoulement permanent d'un fluide incompressible dans une conduite

Les deux sections S_1 et S_2 délimitent à l'instant t une certaine masse de fluide. Les caractéristiques du fluide à l'instant t sont :

- en S1 : ρ, v_1 , p_1 et z_1

- en S2 : ρ, v_2 , p2 et z_2

A l'instant (t + dt), cette masse se déplace et se trouve entre deux sections S'_1 et S'_2. On A donc $dm = dm_1 = dm_2$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à dm : (La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures):

$$\Delta E_C(dm) = \sum W(\overrightarrow{F_{ex}})$$

La variation de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C(dm) = \frac{1}{2} dm\,(v_2^2 - v_1^2)$$

Travail de force de pesanteur:

$$Wp = dm.g.(z_1 - z_2).$$

Travail des forces intérieures est nul car le fluide est parfait (μ =0)

Travail des forces de pression :

Sur S_1 : $Wp_1 = Fp_1.dx_1 = P_1.S_1.v_1.dt$

Sur S2 : $Wp_2 = -Fp_2.dx_2 = -P_2.S_2.v_2.dt$

Sur surface latérale : $Wp_2 = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} dm\,(v_2^2 - v_1^2) = dm.g.(z_1 - z_2) + P_1.S_1.v_1.dt - P_2.S_2.v_2.dt$$

On a: $dm = \rho.S_1.v_1.dt = \rho.S_2.v_2.dt \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} dm\,(v_2^2 - v_1^2) = dm.g.(z_1 - z_2) + P_1.\frac{dm}{\rho} - P_2.\frac{dm}{\rho} \Rightarrow$$

$$(P_1 - P_2) + (\rho g z_1 - \rho g z_2) + \left(\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$P + \rho g\, z + \frac{1}{2}\rho v^2 = Cte \quad \text{(en Pas)}$$

L'équation de Bernoulli pour un écoulement d'un fluide incompressible et permanant.

Les termes de cette équation sont des énergies par unité de volume (J/m^3), ce sont aussi des termes de pression (Pa). ($1J/m^3 = 1N\,m/m^3 = 1N/m^2 = 1Pa$).

Donc le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie par unité de volume.

P : Pression statique : C'est la grandeur que l'on mesure par exemple par un manomètre.

ρgz: Energie potentielle de position par unité de volume (pression de pesanteur)

$\frac{1}{2}\rho v^2$: Energie cinétique par unité de volume ou pression dynamique (cinétique).

$P + \rho g\, z + \frac{1}{2}\rho v^2$: est appelée aussi la charge du fluide

Autre forme du théorème de Bernoulli :

En divisant toute l'expression par ρg, on obtient :

$$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{Cte (en mètre)}$$

z : coté du point considère

$\frac{P}{\rho g} = h_P$: Hauteur de pression : hauteur d'une colonne du fluide incompressible qui produit la pression P.

$\frac{v^2}{2g} = h_c$: Hauteur cinétique : hauteur d'où doit tomber dans le vide une particule fluide à une vitesse $v = \sqrt{2gh}$

La hauteur $h_z = h_P + z$ es dite hauteur piézométrique, représente ligne piézométrique.

$$h_t = h_P + h_c + z = \text{Cte}$$

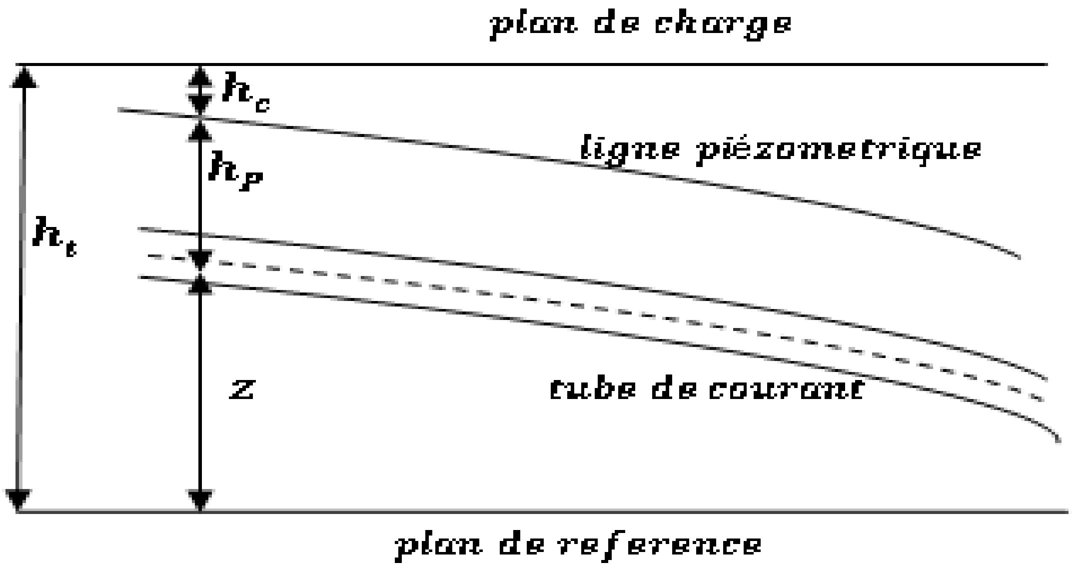


Figure IV.5. Interprétation graphique de la relation de Bernoulli

On peut trouver l'équation de Bernoulli on multiplie les deux termes de équation générale de la dynamique des fluides parfaits ou équation d'Euler :

$\vec{fv} - \overrightarrow{grad}\,P = \rho\,\frac{d\vec{V}}{dt}$ par le déplacement élémentaire

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \vec{V}dt$

$\vec{fv}.\,d\vec{r} = -\,\rho g dz$

$\overrightarrow{gradP}.\,d\vec{r} = dP$

$\frac{d\vec{V}}{dt}.\,d\vec{r} = \vec{V}\,d\vec{V}$

Par l'intégration, on obtient l'équation :

$$P + \rho g\,z + \frac{1}{2}\rho v^2 = Cte$$

Applications du théorème de Bernoulli

1. Vitesse de vidange d'un réservoir : Formule de Torricelli

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique ρ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. (S >>s).

Le long de la ligne de courant on applique le théorème de Bernoulli entre surface libre et la sortie de l'orifice :

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

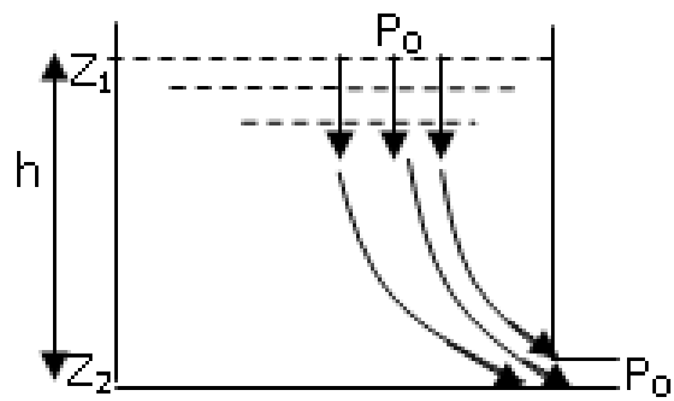


Figure IV.6. Vidange d'un réservoir

Réservoir ouvert à l'air libre $p_1 = p_0 = p_{atm}$

Sortie du liquide à l'air libre $p_2 = p_0 = p_{atm}$

$z_2 = 0$; $z_1 = h$ (plan de référence en 2) : $z_1 - z_2 = h$

S >>s ⇒ $V_2 >> V_1$ donc $V_1 = 0$ (négligeable)

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh} \quad \text{: Formule de Torricelli.}$$

La vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'origine, quelle que soit la masse volumique du liquide.

V_2 est la vitesse théorique V_{th}, par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l'orifice de section s, est donné par:

$$Q_{th} = V_{th}.s \Rightarrow Q_{th} = s.\sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la viscosité et la forme de l'orifice, la vitesse est plus petite que la vitesse théorique.

On écrit:

$$V_r = \alpha_1.\ V_{th} = \alpha_1.\ \sqrt{2gh}$$

$\alpha_1 < 1$: appelé coefficient de vitesse.

La section du fluide à la sortie de l'orifice est : $s_r = \alpha_2\ s_{th}$

$\alpha_2 < 1$: appelé coefficient de contraction de section.

$$Qr = Sr.\ Vr = \alpha_1.\ \alpha_2.\ s_{th}.\sqrt{2gh} = \alpha.\ Q_{th}$$

$\alpha = \alpha_1.\ \alpha_2$: appelé coefficient de débit.

Calcul du temps de vidange:

On exprime que le volume évacué pendant le temps dt est égal à la diminution de volume dans le réservoir soit :

Le volume évacué pendant le temps dt est égal à : Qv.dt où Qv est le débit volumique

La diminution de volume dans le réservoir est : -S.dz où S est la section du réservoir et dz la variation de hauteur dans le réservoir pendant le temps dt

Le débit volumique est égal à : $Qv = \alpha.s.\sqrt{2gz} = -S\frac{dz}{dt}$

$\Rightarrow\ \alpha.s.\sqrt{2gz}\ dt = -Sdz \Rightarrow$

$dt = -\frac{Sdz}{\alpha.s.\sqrt{2gz}}$

Pour une vidange complète, l'intégration entre h et zéro donne:

$$t = -\frac{S}{\alpha.s.\sqrt{2g}}.\int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{S}{\alpha.s.\sqrt{2g}}.2\sqrt{h} = \frac{2Sh}{\alpha.s.\sqrt{2gh}} = \frac{2Vo}{Qvo}$$

V_0 : représente le volume initial contenu dans le réservoir.
Qv_0 : représente le débit en volume initial au débit de l'expérience.

Mesure du débit dans une conduite à l'aide du tube de VENTURI « effet de Venturi » :

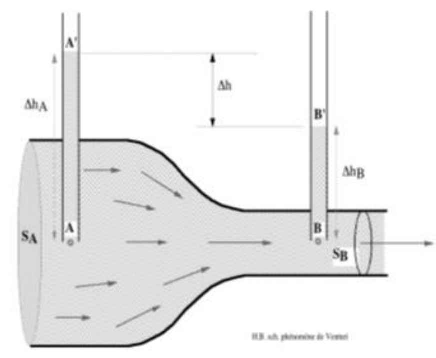


Figure IV.7. Tube de VENTURI

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections S_A et S_B où les pressions sont respectivement p_A et p_B. Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d'un fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue.

$V_B > V_A$; $p_B < p_A$ $(h_B = h_A)$.

On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (A) et (B), on obtient :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

On a l'équation de continuité $Q_V = S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow \quad v_B = v_A . \frac{S_A}{S_B} \Rightarrow$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\rho v_A^2 S_A^2 \left(\frac{S_A^2 - S_B^2}{S_B^2 . S_A^2}\right) = \frac{1}{2}\rho Q_V^2 \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)$$

$$P_A = P_{atm} + \rho g h_A \; ; \quad P_B = P_{atm} + \rho g h_B \Rightarrow$$

$$P_A - P_B = \rho g\,(h_A - h_B) = \rho g h \Rightarrow$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho Q_V^2 \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right) \Rightarrow Q_V = \left(\frac{2gh}{S_A^2 - S_B^2}\right)^{1/2} . S_A . S_B$$

$$v_A = \frac{Q_V}{S_A} = \left(\frac{2gh}{S_A^2 - S_B^2}\right)^{1/2} . S_B$$

Vitesse d'écoulement : tube de Pitot

Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant.

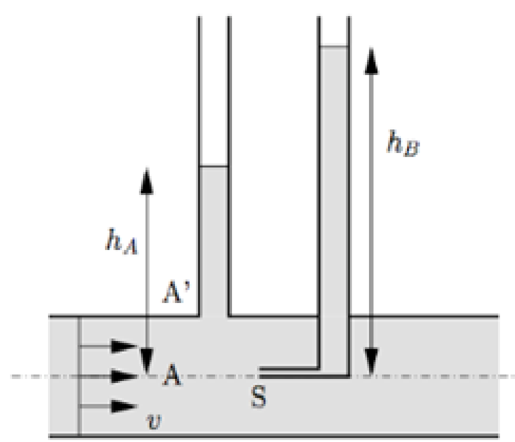


Figure IV.8. Tube de Pitot

A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'ya plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Théorème de Bernoulli (A-B) :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$z_A = z_B$; $v_B = 0$

Hydrostatique: $P_B - P_A = \rho g(h_B - h_A) = \rho g h \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2gh}$: vitesse d'écoulement du liquide dans la conduite horizontale.

IV .8. Théorème de Bernoulli Généralisé :

Cas d'un écoulement (A) –(B) avec échange d'énergie (travail)

Lorsque le fluide travers une machine, il échange de l'énergie avec cette machine hydraulique se forme de travail ΔW pendant une durée Δt, la puissance échangée est: $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

La turbine transforme l'énergie hydraulique du liquide en énergie mécanique.

La pompe transforme l'énergie mécanique fournie par un moteur en énergie hydraulique.

Si : $P>0$: l'énergie est reçue par le fluide (pompe)

Si : $P <0$: l'énergie est fournie par le fluide (turbine).

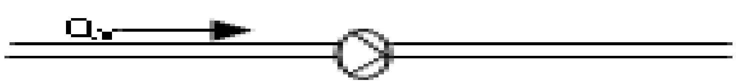


Figure IV.9. Machine hydraulique

(pompe – turbine)

Le rendement d'une machine est le rapport entre la puissance fournie et la puissance utilisée.

Dans le cas d'une pompe :$\eta = \frac{P_h}{P_a}$: P_h est la puissance hydraulique échangée avec le fluide, P_a est la puissance absorbée sur l'arbre d'entrée.

Dans le cas d'une turbine : $\eta = \frac{P_a}{P_h}$: P_h est la puissance hydraulique échangée avec le fluide, P_a est la puissance obtenue à l'arbre de sortie.

Relation de Bernoulli :

$$(P_2-P_1) + \rho g\,(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2) = E$$

E : Quantité positive ou négative (unité : Pascal), c'est l'énergie par unité de volume fournie par une pompe au liquide ou absorbée par une turbine.

$$P = E.\,Q_V \Rightarrow E = \frac{P}{Q_V} \Rightarrow (P_2-P_1) + \rho g\,(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2) = \frac{P}{Q_V}$$

IV .9. Théorème d'Euler

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide.

En mécanique

«Pour étudier l'état d'un objet, il est utile d'introduire des informations sur l'objet et sur son mouvement, c.-à-d : pour deux objets avec même vitesse (ou avec même masse), il est plus facile d'arrêter (ou déplacer) celui qui a la plus petite masse (la plus petite vitesse). On définit la quantité du mouvement QM ($\vec{P}$) comme le produit de masse d'un corps par sa vitesse :

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Tout changement de vecteur de quantité de mouvement QM ($\vec{P}$) d'un système est le résultat d'une interaction (force). Le principe de la dynamique, nous permet de lier la cause (action) à l'effet observé (variable de QM dans le temps). Il s'ecrit :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$$

Théorème de la quantité de mouvement ; théorème d'Euler

On peut énoncer ce théorème de la façon suivante : la dérivée des quantités de mouvement d'un système matériel (fluide qui entre en S_1 à une vitesse V_1 et sort par S_2 à une vitesse V_2) dont on étudie le mouvement, est égale à l es actions extérieures (forces) agissant sur ce système (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2).

$$\sum \vec{F}_{ex} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \ .$$

$$m = cte \Rightarrow \sum \vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

Ce théorème est d'un usage très large tant pour des applications hydrauliques, aérodynamiques, poussée d'un réacteur ….etc

Équations d'Euler : $\vec{fv} - \overrightarrow{grad}\, P = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$

$$\vec{fv}.\,dv - \overrightarrow{grad}\, P.dv = \rho.dv\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dm}{dt}.\, d\vec{V}$$

$$\vec{F}_{volumique} - \vec{F}_{pression} = \frac{dm}{dt}.\,(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \Rightarrow \sum \vec{F}_{ex} = q_m.\,(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Exemple :

La force exercée par le fluide sur la conduite entre les sections S_1 et S_2.

$$\sum \vec{F}_{ex} = q_m.\,(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

$\sum \vec{F}_{ex}$: représente la somme vectorielle des forces (Le poids du fluide compris entre S_1 et S_2 et les efforts de pression appliqués sur la section S_1 et S_2).

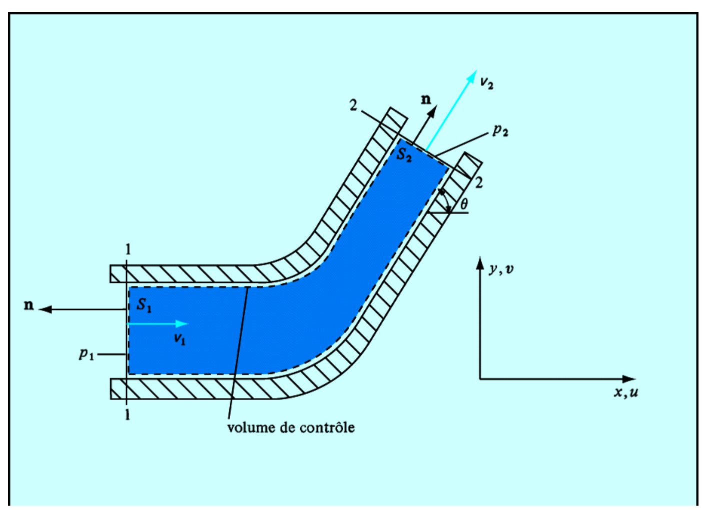


Figure IV.10. Forces exercée par le fluide sur une conduite

IV.10. Exemples d'application:

1. Dans une conduite de 30,0 cm de diamètre, l'eau circule avec un débit-volume de 1800 L/min. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement. Le diamètre devient égal à 15,0 cm ; calculer la nouvelle vitesse moyenne.

Solution

a) $q_v = 1800\text{L}/\min = 0.03m^3/s$

$$S = \pi.\frac{d^2}{4} = 0.07m^2$$

$$q_v = v.S \Rightarrow v = \frac{q_v}{S} = 0.43\text{m/s}$$

b) $S = \pi.\frac{d^2}{4} = 0.017m^2$

$$v = \frac{q_v}{S} = 1.76\text{m/s}$$

2. Le fuel contenu dans le réservoir source (1) est transféré vers le réservoir (2) par l'intermédiaire d'une pompe et d'une canalisation. On donne : - Le débit volumique qv= 200 l/s - La densité du fuel d= 0,85. - Z_1=15 m et Z_2=55 m. - On suppose le fuel comme fluide parfait et que les niveaux des réservoirs varient lentement. Déterminer la puissance Pa mécanique sur l'arbre de la pompe si son rendement est de 0,8.

Solution : Appliquons le Théorème de Bernoulli entre les surfaces libres S_1 et S_2 :

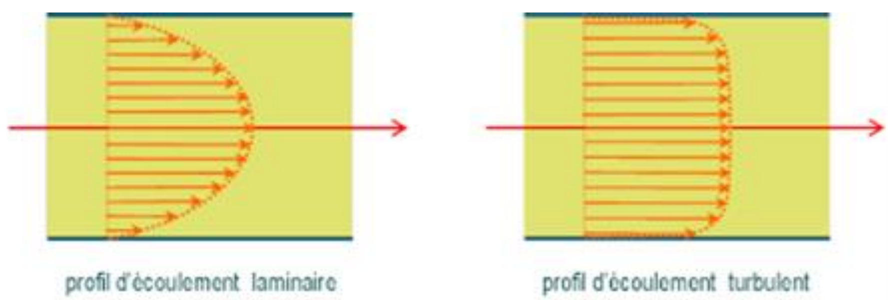
$(P_2\text{-}P_1) + \rho g\,(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2) = \frac{P_h}{q_v}$ or $P_1=P_2=P_{atm}$ et $v_1 = v_2$ par hypothèse

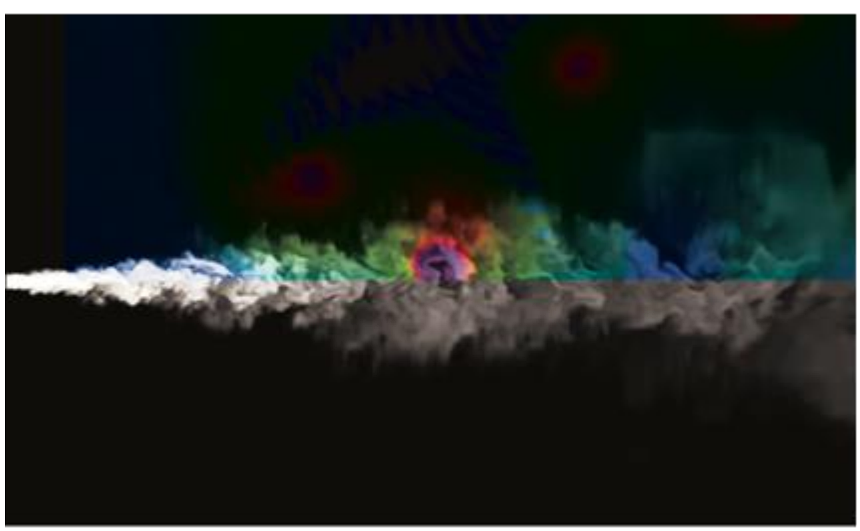
Donc : $P_h = q_v.\rho g\,(z_2 - z_1)$

$\rho = d.\rho_{eau}$

$P_a = \frac{P_h}{\eta}$ = 83.385KW.

Chapitre V : Dynamique des fluides réels incompressibles





Chapitre V : Dynamique des fluides réels incompressibles

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique des fluides visqueux. Les notions de débits, viscosité, nombre de Reynolds, régimes d'écoulement, pertes de charge et théorème de Bernoulli généralisé sont expliqués.

Pré-requis:

- Généralité sur les fluides.

- Dynamique des fluides parfaits incompressibles.

- Viscosité et forces de frottement

Objectifs:

Au terme de ce chapitre l'étudiant doit être capable :

- de distinguer les différents régimes d'écoulement d'un fluide.

- d'étudier l'écoulement de Poiseuille.

- d'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent

d'un fluide réel incompressible avec échange d'énergie.

- de déterminer les pertes de charge

V.1.Introduction

Contrairement à un fluide parfait par lequel, le frottement est négligeable, un fluide réel (ou visqueux) en écoulement est le siège de frottement qui peut être important. Cette perte d’énergie est due au frottement entre deux couches de fluide voisines ou entre le fluide et la paroi d’une conduite. Pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s’exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s’opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

V.2. Les différents régimes d’écoulements:

Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Expérience historique de Reynolds

L'expérience historique d'Osborne REYNOLDS (1883) consiste à faire s'écouler dans un tube transparent un filet (lignes de courant) coloré du même liquide que celui qui circule dans le tube et à la même vitesse.

-Lorsque la vitesse commune du filet coloré et du liquide principal est faible, le liquide coloré suit une trajectoire rectiligne, parallèle à l'axe du tube. En fait chaque élément de fluide se déplace en ligne droite, parallèlement aux parois solides qui le guident. Ce type d'écoulement est appelé laminaire

Figure V.1. Ecoulement laminaire

(Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles).

- A partir d'une certaine vitesse de l'écoulement, le filet coloré se mélange brusquement dans l'eau après avoir parcouru une distance, c'est une transition entre le régime laminaire et celui turbulent. On dit que le fluide s'écoule en régime transitoire.

- Lorsque la vitesse commune du filet coloré et du liquide principal est très élevée, le mouvement du liquide coloré devient beaucoup plus complexe, dans toutes les directions et variant dans le temps et dans l'espace, en direction et en intensité. De plus le liquide coloré perd son identité : il est dispersé dans le liquide transparent. Ce type d'écoulement complexe, avec des fluctuations dans le temps et l'espace, est appelé Turbulent

Figure V.2. Ecoulement turbulent

Les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes. On peut tenter d'identifier les paramètres qui peuvent induire le passage d'un type d'écoulement à un autre

- la vitesse du fluide V : comme l'a montré l'expérience, plus elle est grande plus on aura tendance à observer le régime turbulent.

- la viscosité du fluide μ: plus elle est grande, plus on aura tendance à observer le régime laminaire, car les frottements gêneront la formation des tourbillons.

- le diamètre de la conduite D: plus il est petit, plus on aura tendance à observer le régime laminaire, car les tourbillons seront plus difficile à obtenir dans une géométrie étroite.

$$Re = \frac{V.D}{\upsilon} = \frac{V.D.\rho}{\mu} \qquad \text{nombre de Reynolds}$$

Où D : diamètre de la conduite (en m).

V : vitesse d'écoulement (en m/s).

ρ : masse volumique du fluide (en kg/m^3)

μ : Coefficient de viscosité dynamique (en Pa.s)

ν : Coefficient de viscosité cinématique (en m²/s).

Si Re<2000, le régime est Laminaire.

Si Re>3000, le régime est turbulent.

Si 2000<Re<3000, le régime est transitoire.

Signification physique du nombre de Reynolds «Re »

Dans un fluide en écoulement visqueux, la quantité de mouvement du fluide peut être transférée par diffusion et par convection

Transfert par convection: transfert de QM est parallèle à la direction de l'écoulement où le fluide est soumis à des forces d'inertie:

$$\mathrm{Finertie} = \mathrm{m.a} = \rho\mathrm{v}.\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}}$$

Transfert par diffusion: le mode de transfert, liée à la viscosité du fluide (forces de frottement) :

$$\mathrm{Ffrot} = \mu.\mathrm{S}.\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dz}}$$

Le rapport de ces deux forces : $\frac{\mathrm{Finertie}}{\mathrm{Ffrot}} = \mathrm{Re}$

Pour les faibles vitesses (faible nombre de Reynolds), il y a prédominance des forces de frottement. Le champ de vitesse du fluide varie de façon régulière où les couches de fluide glissent les unes sur les autres ; c'est l'écoulement laminaire stable, où les effets diffusifs de viscosité sont prépondérants.

Pour les grandes vitesses (grand nombre de Reynolds), il y a prédominance des forces d'inertie. L'effet convectif est prépondérant et l'écoulement est instable et turbulent.

V.3. Théorème de BERNOULLI pour un fluide réel

Lors d'un écoulement de fluide réel, il se produit du frottement entre deux couches voisines ou entre le fluide et paroi du conduit. Ces frottements engendrent des pertes d'énergie .La relation de Bernoulli s'écrit sous la forme : $P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + J_{12}$

$$(P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2) - (P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2) = J_{12}$$

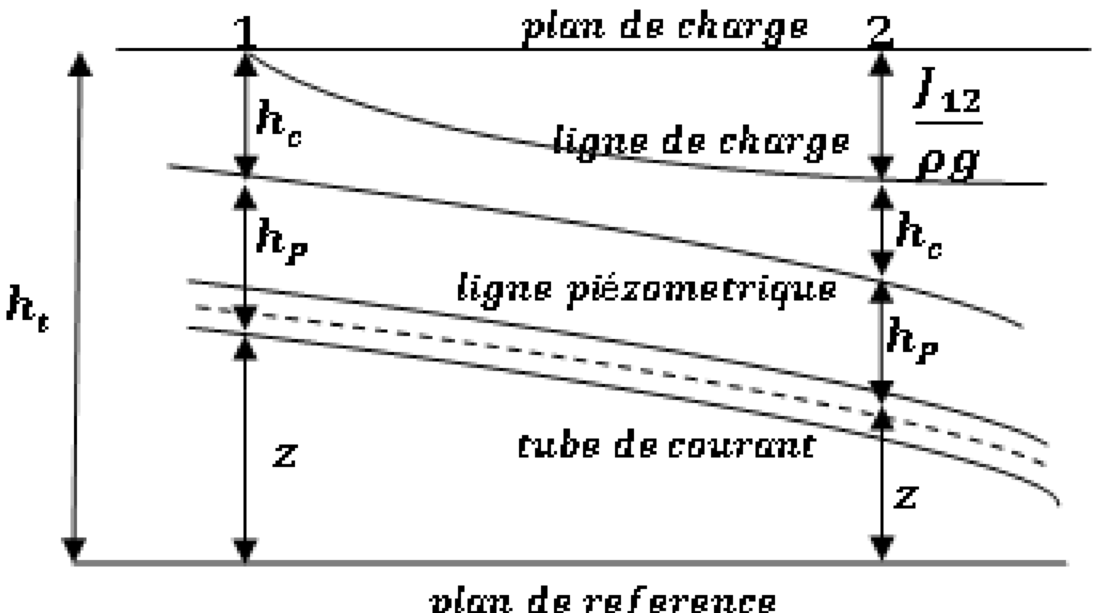


Figure V.3. Interprétation graphique de la relation de Bernoulli

En l'absence de pertes de charge, la ligne de charge est confondue avec le plan de charge

J_{12} (Perte de charge) : positive, unité (Pa), c'est l'énergie par unité de volume perdue entre les sections 1 et 2.

La perte de charge J_{12} peut être due à une perte de charge linéaire (frottements entre les différentes couches de liquide et des frottements entre le liquide et la paroi interne de la conduite le long de l'écoulement et une perte de charge singulière (résistance à l'écoulement provoqués par les accidents de parcours (vannes, coudes, etc…):

$$J_{12} = J_L + J_S$$

Perte de charge linéaire J_L: sont des pertes de charge réparties régulièrement le long des conduites.

$$J_L = \lambda.\frac{L}{D}.\frac{1}{2}\rho V^2$$

- D : diamètre de la conduite considérée (m)

- L : longueur de la conduite (m)

- V : vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s)

- λ (Sans dimension) : Coefficient de perte de charge régulière, Il dépend de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent) et de l'état de surface de la conduite.

- Si l'écoulement est laminaire Re<2000: on applique la loi de Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{R_e}$$

Si l'écoulement est turbulent, on a deux cas :

- Turbulent lisse : 3000<Re<10^5 : on applique la loi de Blasius:

$$\lambda = 0.316.R_e^{-\frac{1}{4}}$$

λ ne dépend que de R_e

- Turbulent rugueux: Re>10^5 on a la loi de Blench :

$$\lambda = 0.79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$$

ε : rugosité (hauteur moyenne des aspérités) de la surface interne de la conduite (mm)

Si 2000<Re<3000 : c'est le régime transitoire entre le laminaire et le turbulent. Pour ce cas, il n'y a pas de loi. Mais on peut utiliser la loi de Blasius.

Perte de charge singulière J_S:

$$J_S = K.\frac{1}{2}\rho V^2$$

K : Coefficient de perte de charge singulière. Il dépend de la nature de la singularité (nature et la géométrie de l'accident de forme).

Exemples:

Coude à angle droit (90°) K =1

Sortie (élargissement) brusque : K =1.

V.4. Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite

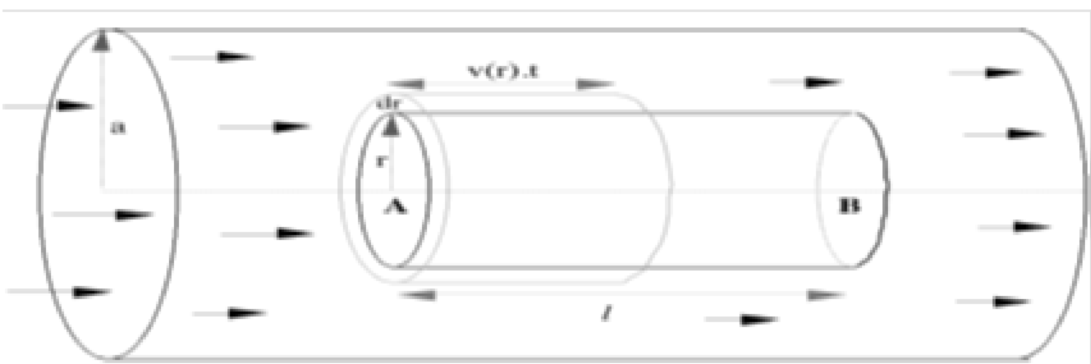


Figure V.4 .Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite

Suivant l'axe (ox) :

$$Fpression/ox = (P_A - P_B).\pi r^2$$

$$Ffrottement/ox = \mu.S.\frac{dV}{dr} = \mu.2\pi r.l.\frac{dV}{dr}$$

Cylindre en équilibre (V=Cte):

Ffrottement +Fpression =0

$(P_A - P_B).\pi r^2 = -\mu.2\pi r.l.\frac{dV}{dr} \Rightarrow$

$dV = -\frac{1}{2\eta.l}(P_A - P_B).rdr$

Par l'intégration : $V(r) = -\frac{(P_A - P_B)}{4\mu.l}.r^2 + C$

$V(a) = 0 \Rightarrow$

$$V(r) = \frac{(P_A - P_B)}{4\mu.l}.(a^2 - r^2)$$

Loi de Poiseuille

Dans un tuyau cylindrique étroit de rayon a, la vitesse d'écoulement d'un fluide visqueux varie en fonction de la distance r à l'axe du tuyau:

$$V(r) = \frac{(P_A - P_B)}{4\mu.l}.(a^2 - r^2)$$

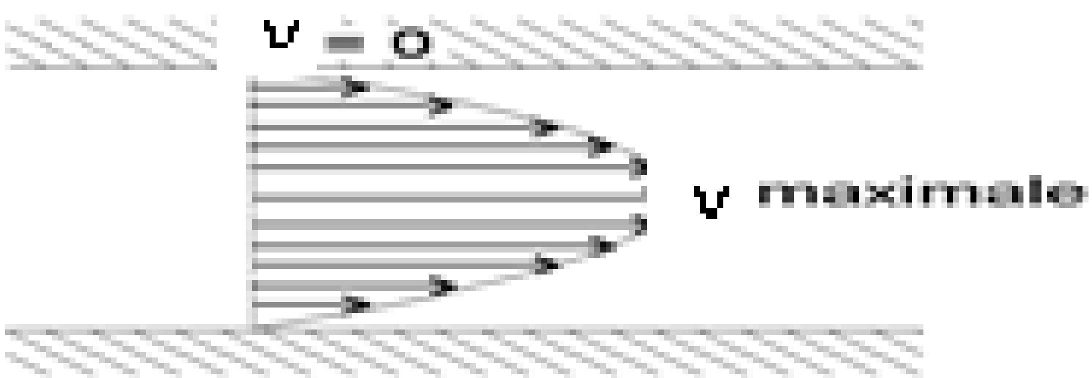


Figure V.5.Profil de vitesse dans un plan quelconque contenant l'axe du cylindre

$V_{max} = \frac{(P_A - P_B)}{4\mu.l}.a^2$ (r=0 : centre)

Débit volumique

$$Qv = \int_0^a dQv = \int_0^a 2\pi r.\ V(r)dr = \frac{\pi(P_A - P_B)}{8\mu.l}.a^4$$

Loi de Poiseuille

Le débit d'un fluide visqueux dans un tube étroit de rayon a est :

$$Qv = \frac{\pi(P_A - P_B)}{8\mu.l}.a^4$$

Vitesse moyenne :

$$Qv = S.V_{moy} \quad \Rightarrow$$

$$V_{moy} = \frac{Qv}{S} = \frac{Qv}{\pi a^2} = \frac{(P_A - P_B)}{8\mu.l}.a^2 \Rightarrow$$

$$V_{moy} = \frac{Vmax}{2}$$

La vitesse moyenne de l'écoulement est donc la moitié de la vitesse maximale

V.5. Théorème de Bernoulli Généralisé

$$(P_2 - P_1) + \rho g\,(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2) = E - J_{12} = \frac{P}{Qv} - J_{12}$$

E (Quantité positive ou négative : Pompe ou turbine).

V.6. Exemple d'application:

Une pompe à essence de rendement $\eta = 67.4\%$ et de débit volumique $q_v = 0.629 L/s$ assure le remplissage d'un réservoir d'automobile. La pompe aspire l'essence de masse volumique $\rho = 750 kg/m^3$ à partir d'une grande citerne dont la surface libre située à une altitude Z_1 et une pression $P_1 = P_{atm}$=1bar. On suppose que le niveau d'essence dans la citerne varie lentement ($v_1=0$). La pompe refoule l'essence, à une altitude Z_2, sous forme d'un jet cylindrique, en contact avec l'atmosphère à une pression $P_2 = P_{atm}$=1bar se déversant dans le réservoir de l'automobile à une vitesse v_2. La différence des cotes entre la section de sortie de la conduite et la surface libre de la citerne est $H = Z_2 - Z_1 = 2$m. La conduite a une longueur L=3,32 m et un diamètre d=2 cm. La viscosité dynamique de l'essence est $\mu = 0.0006 Pas.s$ et $g = 9.81 m/s^2$.

1-Déterminer la vitesse d'écoulement v_2 de l'essence dans la conduite. 2-Calculer le nombre de Reynolds R_e .3-Déterminer la nature de l'écoulement.4-Calculer le coefficient de perte de charge linéaire λ. 5-En déduire la perte de charge linéaire J_{12} 6-Appliquer le théorème de Bernoulli généralisé et calculer la puissance P_a sur l'arbre de la pompe.

Solution

1) $v_2 = \frac{q_v}{s} = \frac{4.q_v}{\pi.d^2} = 2 m/s$

2) $Re = \frac{v.d}{\upsilon} = \frac{v.d.\rho}{\mu} = 50000$

3): $3000 < Re < 10^5$ donc il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4) on applique la loi de Blasius: $\lambda = 0.316. R_e^{-\frac{1}{4}} = 0.0211$

5) $J_{12} = J_L = \lambda.\frac{L}{d}.\frac{1}{2}\rho v^2 = 5250$ J/m^3

6) $(P_2 - P_1) + \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\eta P_a}{q_v} - J_{12}$ or $H = z_2 - z_1 = 2$m et $v_1 = 0$

Donc : $P_a = \frac{q_v}{\eta}.(\rho g H + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + J_{12}) = 20$w.

ChapitreVI :

Dynamique des fluides compressibles

Chapitre VI : Dynamique des fluides compressibles

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique des fluides compressibles.

L'équation d'état des gaz parfaits, l'équation de continuité et l'équation d'énergie des fluides compressibles sont expliqués.

Pré-requis:

- Généralité sur les fluides.

- Dynamique des fluides réels incompressibles.

- Certaines notions de thermodynamique.

Objectifs :

Au terme de ce chapitre l'étudiant doit être capable :

- d'appliquer l'équation de continuité et l'équation d'énergie (Saint-Venant) pour des fluides compressibles.

- de calculer la vitesse du son et le nombre de Mach dans un fluide compressible.
- d'identifier la nature d'un écoulement (subsonique ou supersonique).

VI.1.Introduction

L'étude de l'écoulement d'un fluide compressible devient plus compliquée que celle d'un fluide incompressible. En effet, les variations de température ou de pression qui peuvent apparaître dans l'écoulement d'un liquide ne modifient en rien les volumes mis en jeu car la dilatation ou la compression sont généralement négligeables. En revanche, ces phénomènes prennent une grande importance lorsqu'il s'agit de vapeurs ou de gaz.

VI.2.Equation d'état des gaz parfaits

L'équation d'état d'un fluide de masse donnée est une relation qui lie sa pression P, son volume v et sa température absolue T. L'équation d'état d'un gaz parfait est:

$$P\,v = r\,T$$

$$v = 1/\rho$$

r: étant la constante des gaz parfait (pour l'air: $r = \frac{R}{M} = 287\ J/Kg\ °K$).

v: Volume massique ; ρ : masse volumique en (kg/m^3).

T : température en (^0K).

VI.3.Equation de continuité

De la même manière que pour les fluides incompressibles, elle s'écrit:

$\rho_1\, S_1\, V_1 = \rho_2\, S_2\, V_2$

Débit massique : $q_m = \rho_1\, S_1\, V_1 = \rho_2\, S_2\, V_2$

Cette équation traduit la continuité du débit massique du fluide entre deux sections quelconques (1) et (2) dans l'écoulement.

VI.4.Equation d'énergie

Elle traduit la conservation de l'énergie d'une particule de fluide entre deux sections quelconques (1) et (2):

$(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = (Q + W)_{12}$

Q: Chaleur échangée avec le milieu extérieur.

W : Travail utile échangé avec le milieu extérieur.

$\Delta H = (H_2 - H_1)$: Variation d'enthalpie au cours de cet échange par unité de masse en (J/Kg):

$$\Delta H = H_2 - H_1 = C_P \Delta T = C_P (T_2 - T_1)$$

C_P : Chaleur spécifique à pression constante en [J/Kg °K]

$C_P = r.\frac{\gamma}{\gamma - 1}$ (cours de thermodynamique)

$$\Delta H = C_P \Delta T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Delta (\frac{P}{\rho})$$

Donc :

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\frac{P}{\rho})$$

Δ T : Variation de température (^{0}K)

$\Delta E_c = \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$: variation de l'énergie cinétique du Kg de fluide.

$\Delta E_P = g(z_2 - z_1)$: Variation d'énergie potentielle du Kg de fluide.

Si dans une machine thermique, une turbine à vapeur, un compresseur d'air, la différence $(z_2 - z_1)$ n'est que de quelques mètres, on peut alors le négliger par rapport aux deux autres dans l'équation ci-dessus.

Si on suppose :

- qu'il n'y pas d'échange de travail (pas de machine).
- que l'écoulement est adiabatique et réversible, $Q = 0$ (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur)
- que la variation de l'énergie potentielle est négligeable $\Delta E_P = 0$

Nous obtenons la relation dite de Barré de Saint-Venant:

$$\Delta H + \Delta E_c = 0$$

$$(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 0$$

$H + \frac{1}{2}V^2 = Cte$: relation de Barré de Saint-Venant

Nous constatons que dans la conduite, et sans intervention du milieu extérieur, il y a transformation de l'énergie thermique (enthalpie) en énergie cinétique (vitesse).

VI.5.Célérité du son et nombre de Mach

La vitesse du son, appelée également célérité du son, est donnée par l'expression suivante :

$$C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma . r . T}$$

On appelle nombre de Mach le rapport :

$$M = \frac{V}{C}$$

M : varie avec la vitesse d'écoulement et avec l'état du fluide varie (célérité c).

Si $M < 1$: Ecoulement est dit subsonique.

Si $M > 1$: L'écoulement est dit supersonique.

VI.6. Etat générateur

L'état générateur est l'état du fluide lorsque sa vitesse est nulle. Aux grandeurs caractérisant cet état nous affecterons l'indice 0 : P_0,ρ_0 ,T_0,H_0,C_0….etc.

$$C_P T + \frac{1}{2}V^2 = C_P T_0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{C_P T} = \frac{T_0}{T}$$

En utilisant les équations :

$C_P = r.\frac{\gamma}{\gamma - 1}$

$C = \sqrt{\gamma.r.T}$

$\frac{P}{P_0} = (\frac{\rho}{\rho_0})^{\gamma} = (\frac{T}{T_0})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (cours de thermodynamique)

On obtient l'équation suivante :

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 = \frac{T_0}{T} = (\frac{\rho_0}{\rho})^{\gamma - 1} = (\frac{P_0}{P})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Équation de Barré de Saint Venant (BSV).

VI.7.Etat critique et vitesse limite

Etat critique

L'état d'un fluide en un point où la vitesse est sonique est appelé « état critique » : V= C et M=1. Il est déterminé en fonction de l'état générateur :

$$\frac{\gamma + 1}{2} = \frac{T_0}{T_c} = (\frac{\rho_0}{\rho_c})^{\gamma - 1} = (\frac{P_0}{P_c})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Vitesse limite

La vitesse limite d'un écoulement compressible est atteinte lorsque la détente est poussée jusqu'à P=0 donc T=0 :

$$\frac{1}{2}V_L^2 = C_P T_0 \Rightarrow V_L = \sqrt{2C_P T_0}$$

Cette vitesse est intéressante à plusieurs titres : Elle est déjà la vitesse maximum que peuvent atteindre les gaz d'échappement d'une fusée dans le vide, elle conditionne donc la poussée maxi des moteurs de fusée.

VI.8. Exemple d'application:

Soit un écoulement permanent d'un débit q_m = 2 Kg/s d'air dans une conduite de deux extrémités S_1 et S_2 ($S_2 > S_1$)

On donne:

P_1 = 40 N/cm^2, T_1 = 400 °K, V_1 = 100 m/s, Cp = 1.09 KJ/Kg°K.

P_2 = 40 N/cm^2, T_2 = 1000 °K, V_2 = 100 m/s,

Quelles sont les sections d'entrée et de sortie de la conduite ainsi que la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur ?

Solution

a) La masse volumique: $\rho_1 = \frac{P_1}{rT_1}$

Débit $q_m = \rho_1 . S_1 . V_1 = \rho_1 . \frac{\pi d^2}{4} . V_1$

$$d_1 = (\frac{4q_m rT_1}{\pi V_1 P_1})^{\frac{1}{2}} = 85.5mm.$$

D'une manière similaire, on trouve la valeur du diamètre de sortie: d_2 = 95,6 *mm.*

b) Pour déterminer la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur, on applique l'équation d'énergie : $(\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1) + \frac{1}{2}(\mathrm{V}_2^2 - \mathrm{V}_1^2) + \mathrm{g}(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1) = (\mathrm{Q} + \mathrm{W})_{12}$ entre deux points situés sur l'axe du diffuseur.

Le travail W_{12} échangé avec l'ambiance étant nul et les deux points étant situés sur la même horizontale $(\mathrm{z}_2 = \mathrm{z}_1)$ alors cette équation devient:

$$\mathrm{Q}_{12} = (\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1) + \frac{1}{2}(\mathrm{V}_2^2 - \mathrm{V}_1^2) = \mathrm{C}_\mathrm{p}.(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) + \frac{1}{2}(\mathrm{V}_2^2 - \mathrm{V}_1^2) = 669KJ/Kg$$

Cette quantité étant positive, le fluide a donc reçu de la chaleur du milieu extérieur ce qui a provoqué l'augmentation de la vitesse depuis la section d'entrée jusqu'à la section de sortie du diffuseur.

TD N° 01

Exercice 01

Trouver la dimension et l'unité de :

volume $V= 4/3\ \Pi R^3$, masse volumique ρ, constante R : $PV= nRT$, constante de gravitation G : $F= Gm_1\ m_2/R^2$, l'accélération g : $y= ½.gt^2$

Exercice 02

Vérifier l'homogénéité des formules suivantes :

1) $X = vt$; 2) $X =½\ a\ t$; 3) $V^2 = 2ax^2$; X : distance, V :vitesse, a :accélération, t :temps.

Exercice 03

La relation entre la résistance de l'air et la vitesse d'un corps en mouvement est donnée par l'équation :

$F = KV^n$; K : constante, n : nombre entier positif.

Trouver la dimension de K en fonction de n.Déterminer l'unité de K dans le (SI) pour n=1, n=2.

Exercice 04

L'énergie d'une particules de masse m et vitesse v et de autour z donnée par :

Energie cinétique $E_c= ½\ m\ v^2$, Energie potentielle $E_p = mg\ z$ (g : accélération de la pesanteur)

• Vérifier l'homogénéité dimensionnelle de ces équations.

• La grandeur $E_m = m^{\alpha}\ C^{\beta}$ est une énergie. trouver α et β . (C : la vitesse de la lumière dans le vide).

Exercice 05

Un ressort est caractérise par sa constante de raideur k et sa longueur au repos l_0. Lorsqu'il subit une déformation, l_0 devient alors l, et il exerce une force de rappel de module : $F = k\,|\,l - l_0|$.

• Quelle est la dimension et l'unité de k ? • Montrer que l'expression $½\ k\ (l - l_0)^2$ est homogène à une énergie.

Exercice 06

- La masse volumique de Fer est de ρ_{fer} = 7860 Kg/ m^3, Calculer ρ_{fer} en (tonne/ m^3).
- La masse volumique de l'eau est de ρ_{eau} = 1000 Kg/ m^3, Calculer ρ_{eau} en (Kg/ L).
- La masse volumique de l'hélium est de ρ_{He} = 0.1785 Kg/ m^3, Calculer ρ_{He} en (g/ cm^3)
- Le débit volumique Q_v de l'eau est de 30 m^3/h. Calculer Q_v en (L/s).

Exercice 07

Calculer la relation entre les unités suivantes dans différents systèmes SI et CGS : Kg.m^{-3} et g.cm^{-3} ; Newton et le dyne ; pascal et le barye.

Exercice 08

Déterminer l'incertitude relative $\Delta\rho/\rho$ de la masse volumique d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse m = (1± 0.001)kg et de son arête a=(0.5 ± 0,001)m

Exercice09

Déterminer l'incertitude relative de La période (T) d'un pendule simple $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. On donne g = 9,81 m.s-^{2} avec une précision de 0,1 % et l = (0,5 ± 0,002) m.

Exercice 10

Déterminer la position (x ± Δx)m à l'instant t = (4,18 ± 0,01)s d'un point matériel, déplace avec un MRUV : x= ½ at^2 +V_0t + X_0 , avec a= (2,1 ± 0,01)m.s^{-2}, V_0= (3,15 ± 0,01)m.s^{-1} et X_0= (1,5 ± 0,01)m

TD N° 02

Exercice 01

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité d=0,7. On donne :

- l'accélération de la pesanteur $g=9,81\ m/s^2$

- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000\ kg/m^3$

Exercice 02

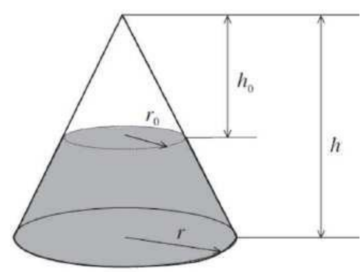
Soit un volume d'huile $V= 6m^3$ qui pèse $G= 47KN$. Calculer la masse volumique, le poids volumique et la densité de cette huile sachant que $g= 9.81\ m/s^2$. Calculer le poids G et la masse M d'un volume V= 3 litres d'huile d'olive ayant une densité d=0,918.

Exercice 03

Un volume V = 250 l d'un liquide de masse volumique $\rho_0 = 850\ kg/m^3$ est contenu dans un réservoir cylindrique de surface de base $S = 215\ cm^2$.
Déterminer la densité et la masse du liquide dans le réservoir.

Exercice 04

Trouver la hauteur de la surface libre si $0,02\ m^3$ d'eau sont remplies dans un réservoir de forme conique (voir la figure ci-contre) de hauteur h = 0,5 m et de rayon à la base de r = 0,25 m. Combien de quantité d'eau supplémentaire est nécessaire pour remplir entièrement le réservoir ? Si ce réservoir contient 30,5 kg d'huile, quelle est la masse volumique de cette huile ?



Exercice 05

On comprime un liquide dont les paramètres à l'état initial sont : p_1= 50bar et V_1= 30.5 dm^3 et les paramètres à l'état final sont : p_2= 250bar et V_2= 30dm^3. Calculer le coefficient de compressibilité χ de ce liquide

Exercice 06

Un récipient rigide en acier est rempli d'un liquide à 15 atm. Le volume du liquide est de 1,232 litre. A une pression de 30 atm, le volume du liquide est de 1,231 litre. Quel est le coefficient de compressibilité ?

Exercice 07

- Quelle est l'influence de la température sur la viscosité ?

- Convertir le stockes en m^2/s.

- Déterminer la viscosité dynamique d'une huile moteur de densité d = 0.9 et de viscosité cinématique ν = 1.1 Stockes.

Exercice 08

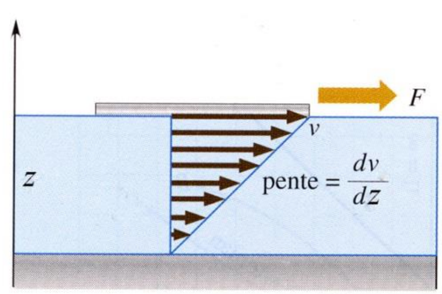
La viscosité de l'eau à 20°c est de 0.01008 Poise. Si la densité est de 0.988, calculer la valeur de la viscosité cinématique en m^2/s et en Stokes

Exercice 09

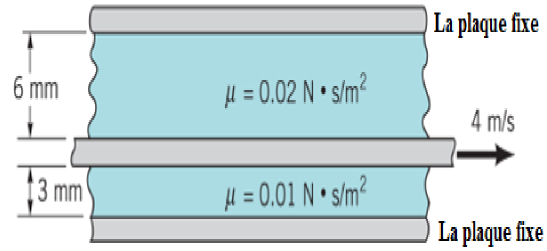
Du fuel porté à une température T=20°C a une viscosité dynamique $\mu = 95.10^{-3}$ Pa.s. Calculer sa viscosité cinématique ν en stockes sachant que sa densité est d=0,95. On donne la masse volumique de l'eau est 1000 kg /m^3

Exercice 10

On suppose que de l'huile ayant une viscosité μ=0.29 Pa.s s'écoule entre les deux plaques dont l'une est soumise à la force F (voir figure ci-contre). Calculer la contrainte visqueuse τ dans l'huile si la vitesse de la plaque supérieure est de v_m= 3m/s et que la distance entre plaque est de h = 2 cm. Exprimer la relation v= f(z).



Exercice 11



Une grande plaque mobile se trouve entre deux grandes plaques fixes comme illustré sur la figure ci-dessus. Deux fluides newtoniens ayant des viscosités indiquées sur la figure se trouvent de part et d'autre de la plaque mobile, le profil de vitesse étant linéaire. Déterminer l'amplitude et la direction des contraintes de cisaillement qui agissent sur les murs fixes lorsque la plaque mobile se déplace à une vitesse de U = 4 m/s. On supposera que la distribution des vitesses entre les parois de part et d'autre de la plaque mobile est linéaire.

Exercice 12

Deux grandes surfaces planes sont à 2,4 cm l'une de l'autre et l'espace entre elles est rempli d'un liquide de viscosité 0.81 Pa.s. Quelle est la force nécessaire pour tirer une plaque très fine de 0,5 m^2 de surface a la vitesse constante 60 cm/s, si :

1. La plaque est située au milieu.
2. La plaque est située à 0,8 cm d'une des surfaces.

Faites l'hypothèse que le profil de vitesse est linéaire.

TD N° 03

Exercice 01

a) Rappeler l'équation qui exprime la variation de pression dp en fonction de la hauteur dz

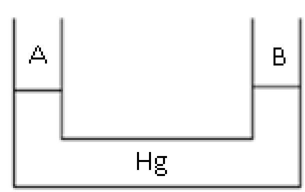
b) Pour un fluide non compressible,

- Intégrer l'équation et obtenir la loi fondamentale de l'hydrostatique
- A quelle profondeur h sous l'eau se situe une plongeur quand il est soumis a une pression de 5 et 10atm, on donne p_0=760mmHg, ρ_{Hg} =13.6.10^3kg/m^3.

c) Pour l'étude de l'atmosphère terrestre, on supposera que g =C^{te} et que ρ de l'aire est proportionnelle à la pression $\rho(z) = \alpha p(z)$, on note p_0=p (z_0), M_{air}=29g/mol, R=8.31 Pa.$m^3mol^{-1}.K^{-1}$

- écrire dp en termes de ces variables.
- intégrer l'équation et obtenir la loi de variation exponentielle de p en fonction de z.
- A quelle hauteur la pression de l'air, équivaut-elle à la moitié de sa valeur au niveau de la mer.

Exercice 02



Un tube en U, constitué d'une branche A de section S=4cm^2, et d'une branche B de section S=2cm^2, contient du mercure ρ_m=13.6g/cm^3.

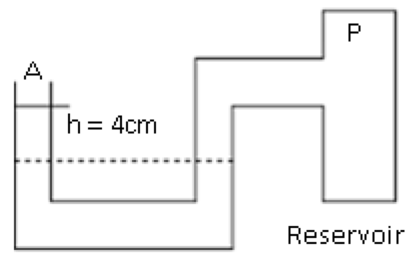
Dans la branche A, on verse 20 cm^3 d'eau et dans la branche B 30cm^3,ρ_e=1 g/cm^3

1- Calculer les hauteurs h_a et h_b des colonnes d'eau dans les branches A et B

2- Calculer les hauteurs h entre les deux niveaux de mercure et h’ entre les surfaces libres de l’eau dans les deux branches.

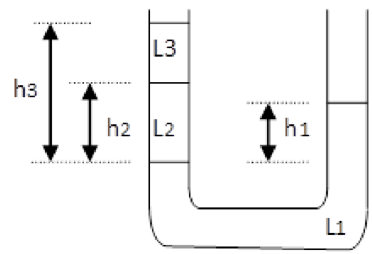
3- Quel valeur d’huile de ρ_h=0.8g/cm^3, doit-on verser dans la branche A pour que les surfaces libre de l’eau et de l’huile dans les branches A et B, soient dans la même plan horizontal.

4- Quelle est la pression du gaz dans le réservoir P (fig)



Exercice 03

On observe trois liquides non miscibles entre eux, dans un tube U (figure)

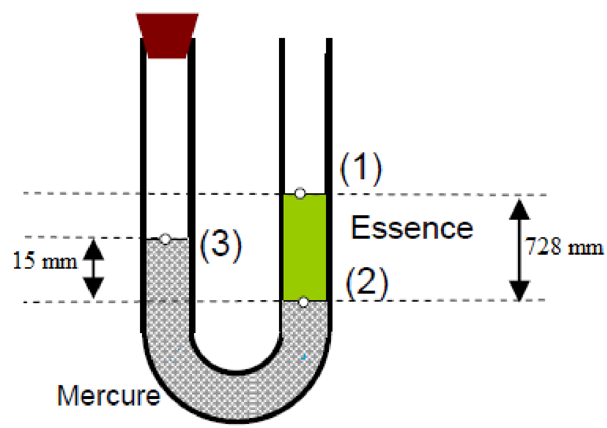


1) Exprimer h2 en fonction de ρ_1 , ρ_2, ρ_1 et h_1, h_3.

2) Déterminer l’épaisseur de la tranche L_3 pour que la surface de séparation entre L_2 et L_3 soit au même niveau que la surface libre du liquide L_1.

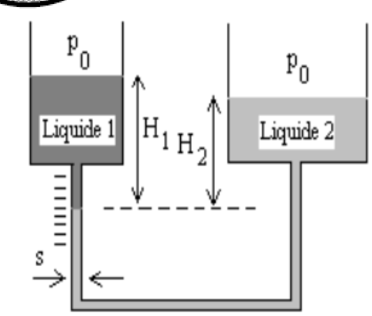
Exercice 04

Soit un tube en U ferme a une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.
Calculer la pression P_3 du gaz emprisonne dans la branche ferme. On donne :
ρ_{Hg}=13600 Kg/m3 et $\rho_{essence}$=700Kg/m3, P_{atm}=10^5 Pa



Exercice 05

Un manomètre différentiel est constitué de deux récipients cylindriques, de sections droites respectives S_1 et S_2, reliés par un tube de section



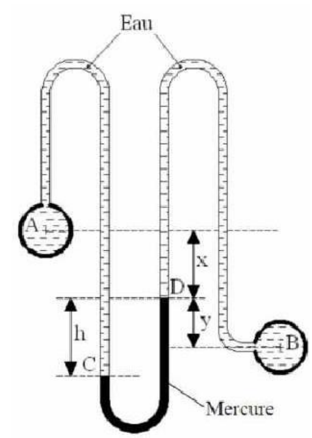
intérieure s constante. L'ensemble contient deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1, ρ_2.

1) Initialement, la pression au-dessus des deux liquides est la même et égale à P_0, la surface de séparation est définie par H_1 et H_2.
En déduire une relation entre ρ_1, ρ_2, H_1 et H_2.

2) On provoque au-dessus du liquide 1 une surpression ΔP et la surface de séparation des deux liquides se déplace de Δh. En déduire la sensibilité $\Delta h / \Delta P$

A.N: $\rho_1 = 998$ Kg / m^3, $\rho_2 = 1024$ Kg / m^3, $S_1 = S_2 = 100s$

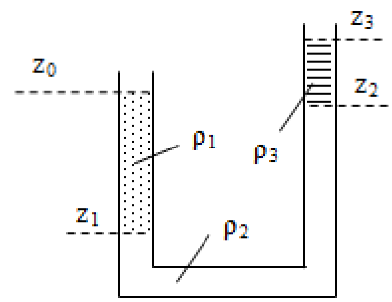
Exercice 06



Les récipients A et B contiennent de l'eau aux pressions respectives de 2,80 et 1,40 bar.
Calculer la dénivellation h du mercure du manomètre différentielle. On donne : $x + y = 2$ m et la densité du mercure $d = 13{,}57$

Exercice 07

Etudier l'équilibre du tube en U de la figure ci-contre, contenant trois liquides non miscibles.
Application numérique :
$\rho_1 = 103$ kg/m^3, $\rho_2 = 13.6\ 103$ kg/m^3, $\rho_3 = 700$ kg/m^3,
$z_0 - z_1 = 0.2$ m, $z_3 - z_2 = 0.1$ m, $z_1 + z_2 = 1$ m, $g = 9.81$ m/s^2

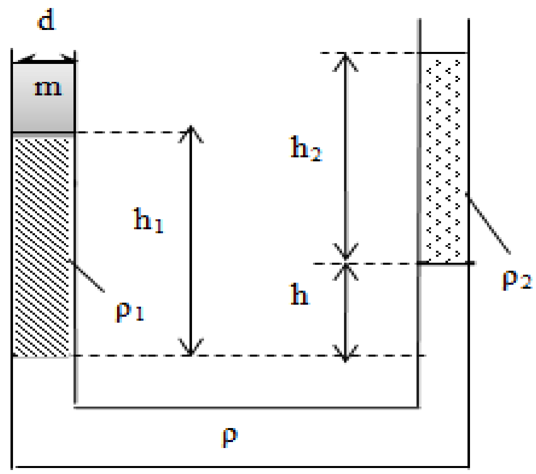


Exercice 08

Deux liquides de masse volumique ρ_1 et ρ_2 sont en équilibre de part et d'autre d'une quantité d'eau (ρ) dans un tube en U. L'une des extrémités est ouverte et l'autre est fermée par un bouchon cylindrique coulissant de diamètre d=5cm et de masse m comme indiqué sur la figure ci-contre.

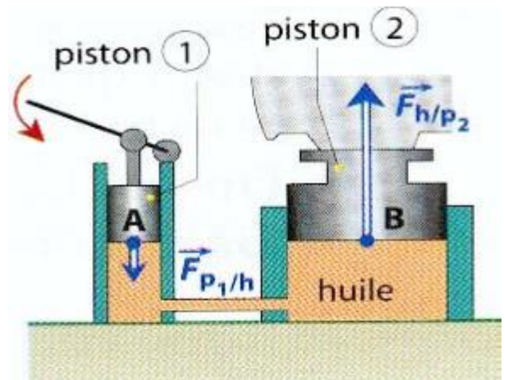
1.Déterminer la relation donnant la masse m en fonction des masses volumiques ρ, ρ_1 , ρ_2 et des hauteurs h, h_1 , h_2 .

2. Retrouver la masse m lorsque ρ_1= 650 kg/m^3, h_1 = 25 cm, ρ_2= 850 kg/m^3, h_2 = 30 cm et h=0.



Exercice 09

La figure ci-dessous représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire. Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit, au point (A), par une force de pression Fp_1/h sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force Fh/p_2 On donne :



- les diamètres de chacun des pistons : D_1 = 10 mm; D_2 = 100 mm.

- l'intensité de la force de pression en A : Fp_1/h = 150 N:

1) Déterminer la pression P_A de l'huile au point A.

2) Quelle est la pression P_B ?

3) En déduire l'intensité de la force de pression Fh/p_2.

4) Le piston (1) descend d'une hauteur h_1 = 0.1m, De quelle hauteur h_2 monte le piston (2)

Exercice 10

On considère une sphère pleine en bois de rayon r=20 cm et une sphère creuse en acier de rayon r=20 cm et d'épaisseur e=8 mm. On suppose que le volume compris entre 0 et (r-e) est vide.

On donne :

- la masse volumique du bois : ρbois = 700 kg/m^3

- la masse volumique de l'acier : ρacier = 7800 kg/m^3

- la masse volumique de l'eau : ρeau = 1000 kg/m^3

1) Déterminer le poids de chaque sphère.

2) Déterminer la poussée d'Archimède qui s'exercerait sur chacune de ces sphères

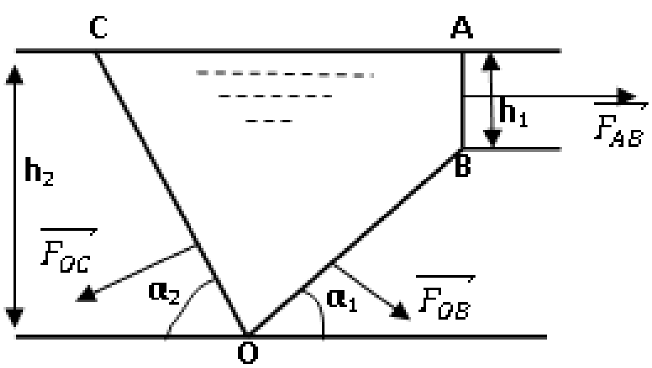
Si elles étaient totalement immergées dans l'eau.

3) Ces sphères pourraient-elles flotter à la surface de l'eau ?

4) Si oui quelle est la fraction du volume immergé ?

Exercice 11

Un réservoir de longueur L = 5m et dont la section en coupe est représentée ci-dessous, est rempli d'eau. On donne : $\rho = 10^3$ Kg/m^3 ,h_1 = 366 mm, h_2 = 1000 mm, α_1 = 30° et α_2 = 60°



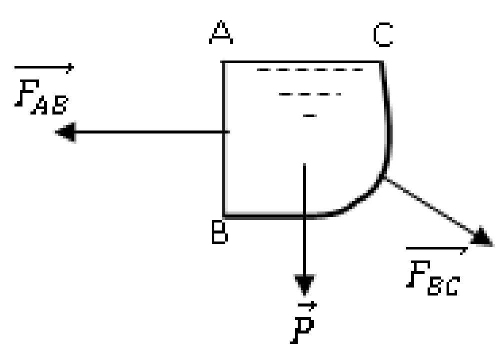
On posera OB = OC = d et $h_3 = h_2 - h_1$

1. Calculer les résultantes des forces de pression exercées sur les surfaces AB, OB et OC

2. Vérifier que la somme vectorielle de ces résultantes est égale au vecteur poids du liquide contenu dans le réservoir.

Exercice 12

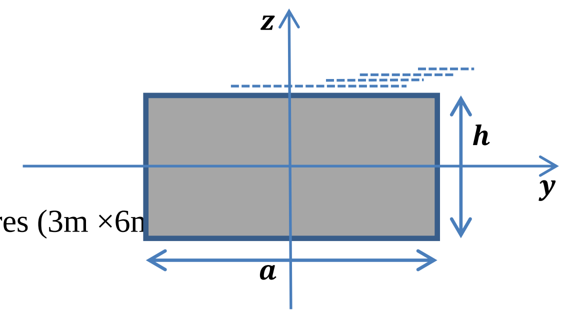
On considère un réservoir qui a la forme d'un quart de cylindre de rayon R et de longueur L. Le réservoir est rempli de liquide de masse volumique ρ. Déterminer l'effort exercé par le liquide sur la surface courbe.



Exercice 13

La figure ci-contre représente un barrage de longueur a=100 m, hauteur h=30 m. Calculer l'intensité de la résultante des forces de pression de l'eau sur le barrage. Déterminer la position du point d'application de cette poussée.
Représenter la.

On donne : $I_{ZG} = \frac{a.h^3}{12}$; g = 9.81m/s^2



Exercice 14

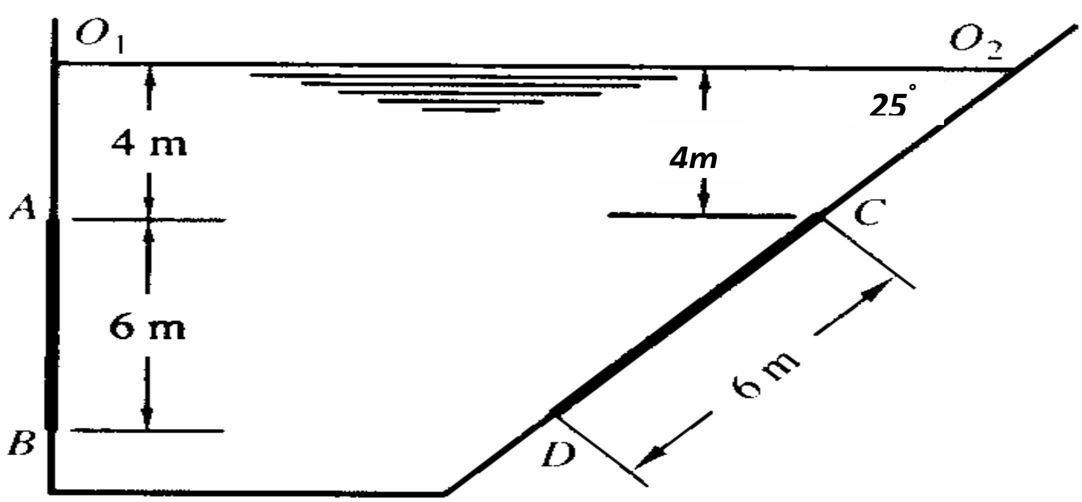
Un réservoir est équipé par deux vannes rectangulaires (3m ×6m

1. Calculer la force de pression sur AB et CD

2. Déterminer le centre de poussée sur AB et CD

3. La vanne CD est remplacée par une vanne circulaire, quel serait le diamètre de la vanne pour garder la même force calculée en 1)

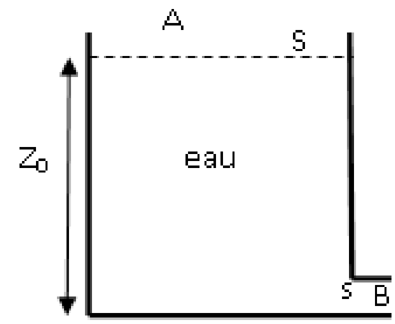
4. Déterminer le nouveau centre de poussée sur CD.



TD N° 04

Exercice 01

Une citerne de section S contient de l'eau. Un petit orifice B, de section s <<< S, se trouve à une profondeur z_0 sous la surface libre de l'eau ; P_0 est la pression atmosphérique.



1) l'orifice est d'abord fermé par un bouchon.

Calculer la pression au point B et la force exercée par l'eau sur le bouchon.

2) On enlève le bouchon.

Montrer que la vitesse de descente du niveau libre est très inférieure à celle du jet en B.

3) Déterminer la vitesse de l'écoulement en fonction du niveau de l'eau libre z.

Calculer la vitesse du jet à la sortie de l'orifice et le débit volumique Q_v de ce jet.

4) Calculer la vitesse du jet après une chute de 2m.

5) Si $Q_v = 0.5$L/s. A quelle distance h de la surface libre se trouve l'orifice.
On donne : $P_0 = 10^5$ Pas, ρ (eau) = 1g/ cm^3, z_0= 2m, s = 1cm^2, S = 100cm^2, g = 10m/s^2.

Exercice 02.

On considère une lance d'incendie, de section d'entrée S, de section de sortie s << S ; l'eau est en sortie à la pression P_0 et en entrée à la pression P_1. L'eau est supposée un fluide parfait en écoulement incompressible.

- Déterminer le rapport entre v_E et v_S.
- Exprimer le débit en fonction de $P_1 - P_0$.
- Déterminer la composante selon l'axe Ox de la force exercée par celui qui tient la lance pour maintenir celle-ci en place.

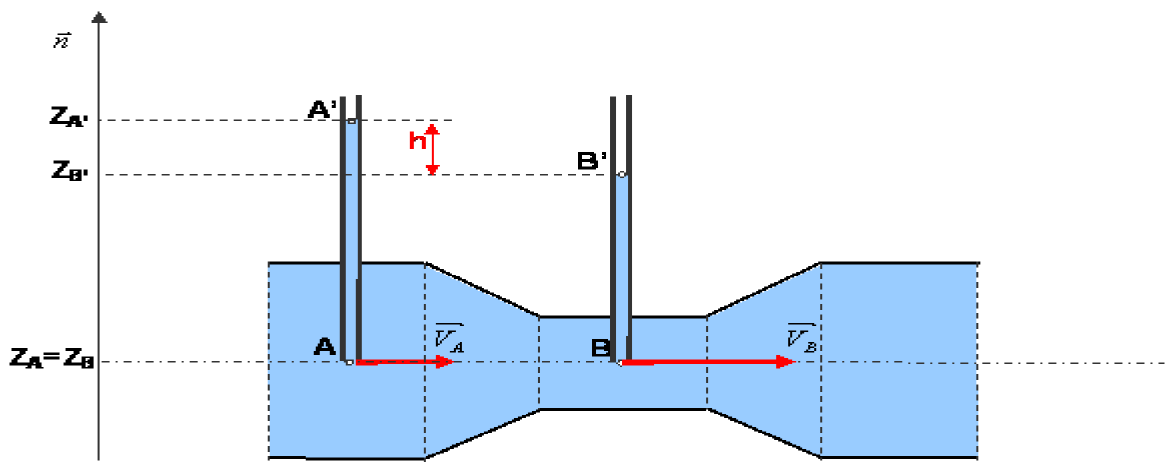
AN: P_1 = 10 bars; P_0 = 1 bar; s = 1 cm^2

Exercice 03

Une conduite de section principale SA et de diamètre d subit un étranglement en B où sa section est SB. On désigne par $\alpha = \frac{S_A}{S_B}$ le rapport des sections.

Un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ , s'écoule à l'intérieur de cette conduite. Deux tubes plongent dans la conduite ayant des extrémités respectivement A et B. Par lecture directe de la dénivellation h, les deux tubes permettent de mesurer le débit volumique qv qui traverse la conduite.

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de la vitesse V_B en fonction de VA et α .



2) Ecrire la relation de Bernoulli entre les points A et B. En déduire l'expression de la différence de pression (PA-PB) en fonction de ρ , VA et α .

3) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points A et A'.

4) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points B et B'.

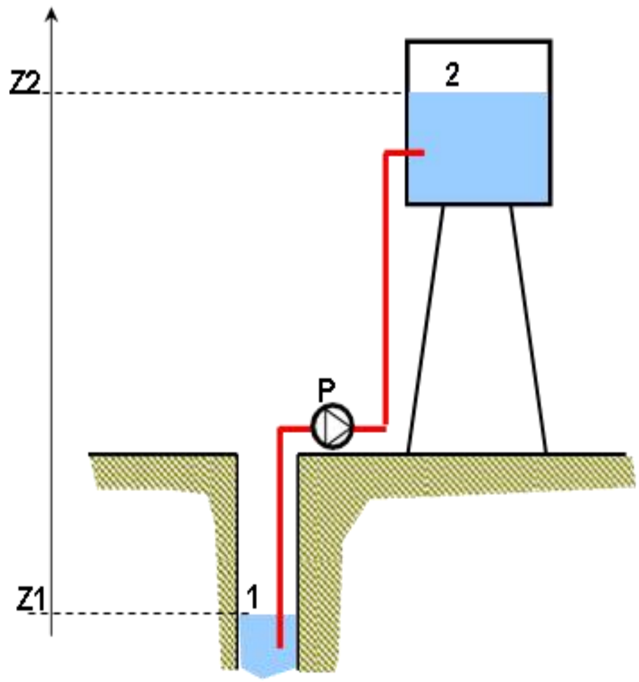
5) En déduire l'expression de la vitesse d'écoulement V_A en fonction de g, h,et α

6) Donner l'expression du débit volumique q_v en fonction de d, g, h, et α .

Faire une application numérique pour :

- un diamètre de la section principale d=50 mm
- un rapport de section α = 2.
- une accélération de pesanteur : g= 9,81 m/s^2
- une dénivellation h=10 mm.

Exercice 04



Une pompe P alimente un château d'eau à partir d'un puit à travers une conduite de diamètre d= 150 mm.

On donne :

- les altitudes : Z_2=26 m, Z_1= - 5 m
- les pressions P_1=P_2=1,013 bar
- la vitesse d'écoulement V = 0.4 m/s
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2

On négligera toutes les pertes de charge.

1) Calculer le débit volumique Qv de la pompe en L/s.
2) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les surfaces 1 et 2.
3) Calculer la puissance utile P_u de la pompe.
4) En déduire la puissance Pa absorbée par la pompe sachant que son rendement est de 80%.

Exercice 05

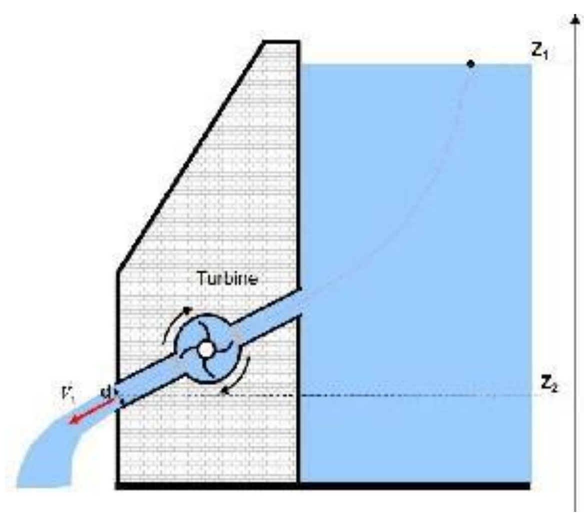
La figure ci-dessous représente un barrage qui est équipé d'une turbine dont les aubes sont entrainées par un jet d'eau sous pression. La conduite de sortie de diamètre d= 2,5 m est situé une altitude Z_2=5m. Le débit volumique q_v=25 m^3/s. On suppose que le niveau d'eau dans le barrage (Z_1=30 m) varie lentement (V_1=0), et les pertes de charges sont évaluées à J_{12} =-32,75 J/kg. On donne :

-la masse volumique de l'eau : 1000 kg/m^3.

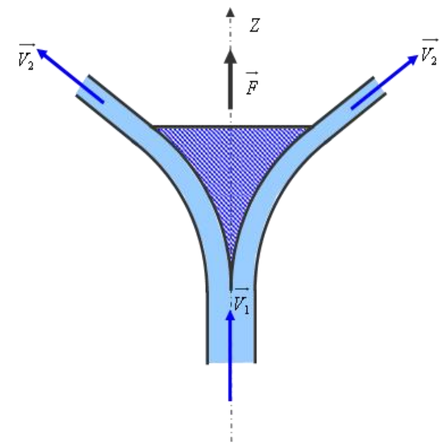
-l'accélération de la pesanteur : g=9,81 m/s^2.

1) Calculer la vitesse V_2 d'écoulement d'eau la sortie de la canalisation en m/s.

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la puissance Pa disponible sur l'arbre de la turbine en MW si son rendement est de 60%.



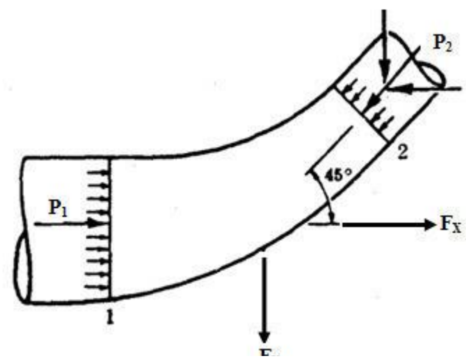
Exercice 06



Considérons un obstacle symétrique par rapport à l’axe oz. Le jet d’un écoulement de débit massique q_m, de vitesse V_1et de direction parallèle à l’axe oz, percute l’obstacle qui le dévie d’un angle β . Le fluide quitte l’obstacle à une vitesse V_2 de direction faisant un angle β par rapport à l’axe oz.

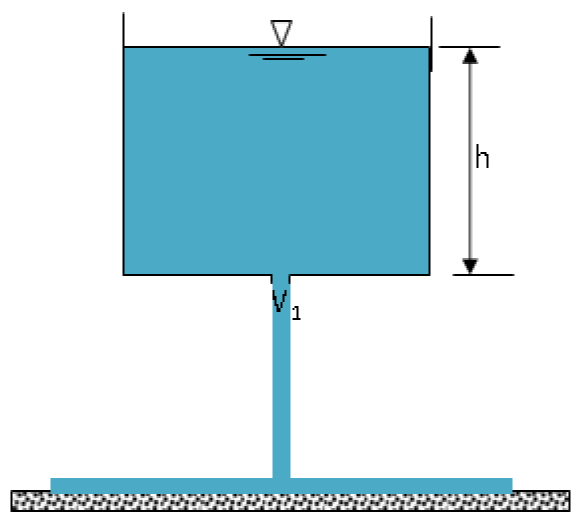
Calculer la force F exercée par le jet sur l’obstacle en direction oz.

Exercice 07



Un coude convergent de 45°, de 600 mm de diamètre en amont, de 300 mm en aval, débite 0,444 m^3 d’eau à la seconde sous une pression de 145 kPa. Calculer la réaction du coude sur la force exercée par l’eau.

Exercice 08



Un jet d’eau verticale sort par l’orifice circulaire d’un réservoir. Le jet se bute contre une plaque horizontale perpendiculaire à l’axe du jet. Si le diamètre de l’orifice est 12,5 cm et la hauteur d’eau dans le réservoir est 9 m.

1. Calculer la vitesse du jet à la sortie du réservoir.
2. Calculer la force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet.

TD N° 05

Exercice 01

Un liquide visqueux de masse volumique ρ = 910 kg/ m^3 et de viscosité cinématique υ = $2,3.10^{-4}$ m^2/s est transporté de A vers B à travers une conduite cylindrique d'axe horizontal de longueur L = 2km et de rayon R = 8cm, avec une vitesse moyenne V_m = 0.5m/s, la pression P_A =3atm. L'écoulement est permanent et le débit est donné par la formule de poiseuille :

$Q = \pi.R^4.\Delta P \ / \ 8L\mu$; ΔP : perte de charge ($P_A - P_B$).

1) Calculer le débit volumique Q d'écoulement.

2) Calculer la pression au point B.

3) Vérifier le caractère d'écoulement (laminaire ou turbulent).

4) Quel doit être le rayon R_0 d'une conduite cylindrique qui transporte de l'eau de viscosité cinématique υ_0 = 9.10^{-7} m^2/s à la vitesse moyenne 2m/s pour assurer la similitude dynamique de cet écoulement avec celui du liquide étudie.

Exercice 02

Pétrole de viscosité μ=0.11 Pa.s et de densité 0.9 circule dans une conduite de longueur 1650m et de diamètre 25cm à un débit volumique 19.7 L/s.

Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système SI et le système CGS.

- Calculer la vitesse de l'écoulement et le débit massique.
- Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement.
- Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire et calculer la perte de charge dans la conduite.

Exercice 03

De l'huile de viscosité absolue 0,101 Pa.s et de densité 0,850 circule dans 3000 m de conduite de fonte de 300 mm de diamètre au rythme de 44,4 L/s.

Quelle est la perte de charge dans la conduite ?

Exercice 04

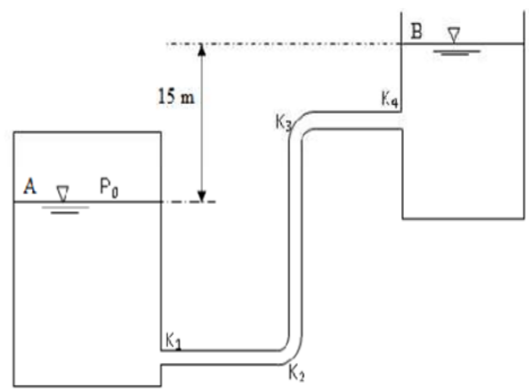
Calculer la perte de charge pour 305 m de longueur de conduite de fonte neuve, sans revêtement, de diamètre intérieur égal à 305 mm, quand :

a) de l'eau à 15,6 °C y coule à 1,525 m/s

b) du fuel-oil moyen à 15,6 °C coule avec la même vitesse.

On donne la rugosité de la fonte ε = 0,244mm, la viscosité cinématique de l'eau à 15,6C° ν_{eau}= 1,13. $10^{-6}m^2/s$ et la viscosité cinématique du fuel-oil à 15,6 ° ν_f= 4,41. $10^{-6}m^2/s$.

Exercice 05



Grace à une surpression P_0, l'eau circule du réservoir A vers le réservoir B au moyen d'une conduite de diamètre d = 300mm, de rugosité ε = 0,3mm et de longueur L = 170m. Les coefficients des pertes de charges singulières sont K_1= 0,5 à la sortie du réservoir A, K_2 = K_3= 0,15 pour les deux coudes et K_4 = 1 à l'entrée du réservoir B.

Déterminez la pression manométrique P_0 pour avoir un débit de Q_v = 200 L/s.

On donne: $\rho = 10^3 Kg/m^3$, $g= 9.81m/s^2$, $\nu= 1.005.10^{-6}m^2/s$.

Exercice 06

Un pipe-line de diamètre d=25 cm est de longueur L est destiné acheminer du pétrole brut d'une station A vers une station B avec un débit massique q_m=18kg/s.

Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes :

- masse volumique =900 kg/m^3.

-viscosité dynamique =0,261Pa.s.

On suppose que le pipe-line est horizontal.

1) Calculer le débit volumique q_v du pétrole.

2) Déterminer sa vitesse d'Écoulement V.

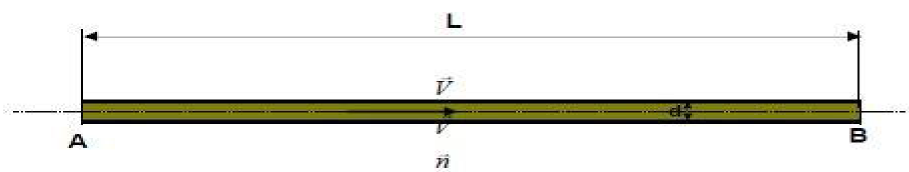
3) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

4) Quelle est la nature de l'écoulement ?

5) Calculer la valeur du coefficient de perte de charge linéaire.

6) Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B.
Préciser les conditions d'application et simplifier.

7) Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B partir de laquelle la chute de pression (P_A-P_B) dépasse 3 bar.



Exercice 07

Une pompe de débit volumique qv = 2,8l/s remonte de l'eau entre un bassin et un réservoir travers une conduite de diamètre d=135 mm.

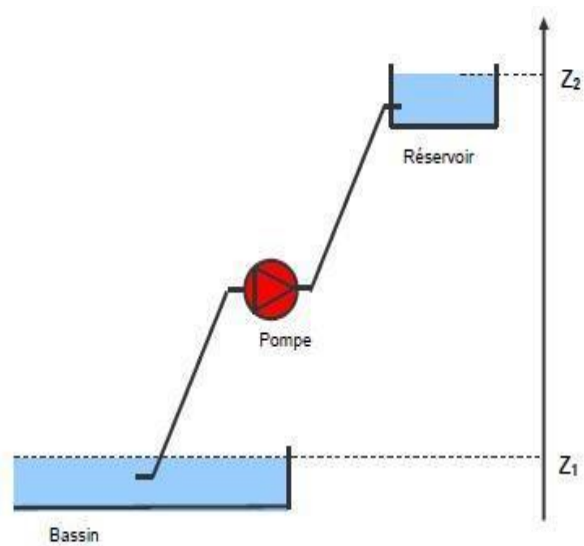
On donne :Z_1 = 0 ; Z_2 = 35 m

-P_1 = P_2 = 1013 mbar

-viscosité dynamique de l'eau μ= 1.10^{-3} Pa s.

-longueur de la conduite L=65 m.

On négligera toutes les pertes de charge singulières.



1) Calculer la vitesse d'écoulement V de l'eau dans la conduite.

2) Calculer le nombre de Reynolds. L'écoulement est laminaire ou turbulent ?

3) Calculer le coefficient de pertes de charge linéaire. En déduire les pertes de charges J_{12} tout au long de la conduite.

4) Appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la puissance nette P_{net} de la pompe.

5) Le rendement de la pompe étant de 80 %, calculer la puissance absorbée par la pompe.

Exercice 08

Une pompe de débit volumique q_v = 2L/s et de rendement η=70 % remonte de l'eau à partir d'un lac jusqu'au réservoir situé sur une colline. L'eau est acheminée dans une conduite de diamètre d=130 mm formée de trois tronçons rectilignes :

AB de longueur L_1= 10 m, CD de longueur L_2= 12 m, EF de longueur L_3= 8 m. et de deux coudes 45^0 : BC et DE : ayant chacun un coefficient de perte de charge Ks=0,33.

On suppose que :
-les niveaux d'eau varient lentement, -les niveaux : Z_1=0 m , Z_2= 10 m,

-les pressions : $P_1=P_2=P_{atm}$, -la viscosité dynamique de l'eau μ= 1.10^{-3} Pa s,

-la masse volumique de l'eau : 10^3 kg/m^3, -l'accélération de la pesanteur : g = 9.81m^2/ s.

1) Calculer la vitesse V d'Écoulement d'eau dans la conduite en m/s.

2) Calculer le nombre de Reynolds R_e .

3) Préciser la nature de l'Écoulement.

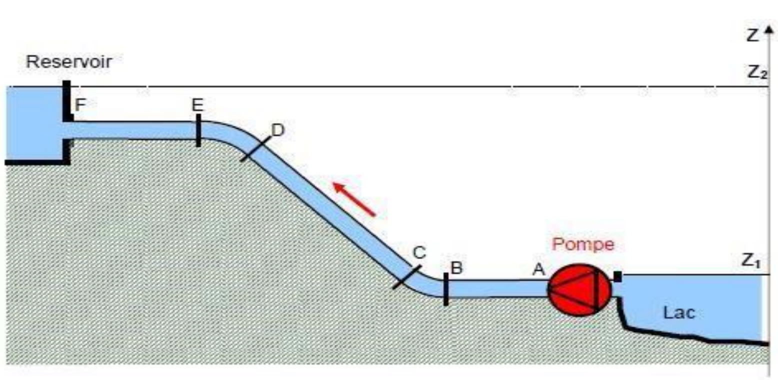
4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire, en précisant la formule utilisée.

5) Calculer les pertes de charges linéaires $L_{inéaire}$ en J/kg:

6) Calculer les pertes de charges singulières $S_{ingulière}$ en J/kg:

7) Déterminer la puissance nette P_n de la pompe en Watt.

8) En déduire la puissance Pa absorbée par la pompe.



TD N° 06

Exercice 01

Soit un compresseur d'air qui aspire de l'air à l'admission avec une température de 15 °C et une vitesse de 40 m/s. Il le refoule avec une température de 50 °C et une vitesse de 60 m/s. Comme on considère souvent que ces machines sont adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur), Calculer le travail échangé ? Cp = 1.09 KJ/Kg°K.

Exercice 02

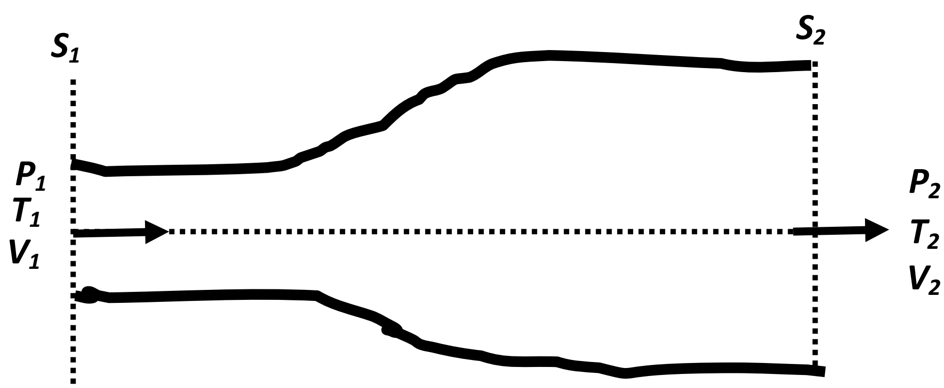
Soit un écoulement permanent d'un débit q_m = 2 Kg/s d'air dans une conduite

On donne:

P_1 = 40 N/cm^2, T_1 = 400 °K, V_1 = 100 m/s, Cp = 1.09 KJ/Kg°K.

P_2 = 40 N/cm^2, T_2 = 1000 °K, V_2 = 100 m/s,

Quelles sont les sections d'entrée et de sortie de la conduite ainsi que la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur ?



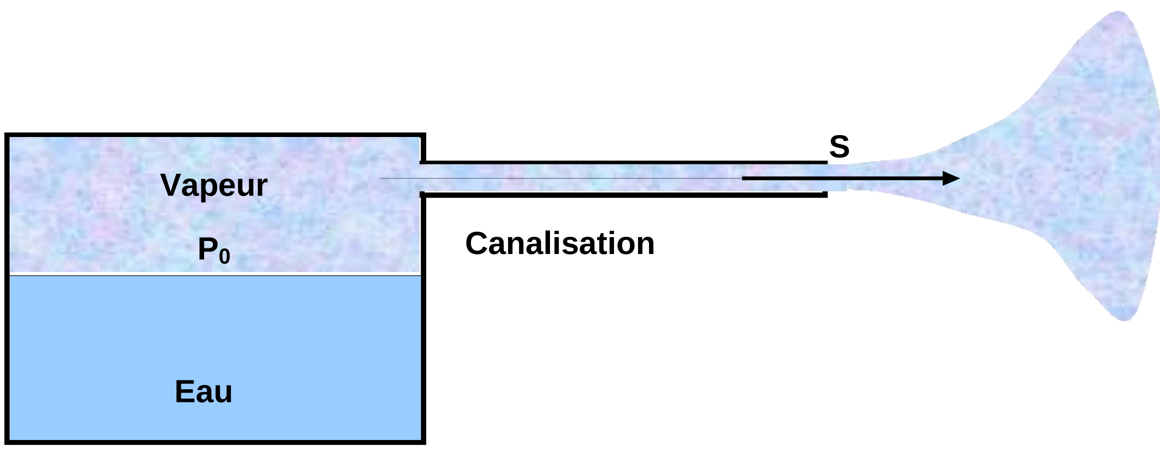
Exercice 03

La figure ci-dessous représente une chaudière qui produit de la vapeur d'eau à un débit massique q_m=13,4 kg/s. Par une canalisation cylindrique, la vapeur arrive dans une section S de diamètre d=10 cm à une pression P=15 bar et une température T=541 °K. On donne : r=462 J/kg°K. On donne les caractéristiques de la vapeur d'eau :

γ =1,3.

r=462 J/kg°K.

1. On suppose que la vapeur est un gaz parfait, calculer la masse volumique ρ de la vapeur d'eau en sortie de la chaudière.
2. Déterminer la vitesse d'écoulement V.
3. Calculer la célérité du son C.
4. 4) En déduire le nombre de Mach M. Préciser la nature de l'écoulement.
5. 5) Ecrire l'équation de Saint-Venant en terme de rapport de pression, et calculer la pression d'arrêt P_0 à l'intérieur de la chaudière.



Exercice 04

Un avion vole à un nombre de Mach M= 0,95 et à une altitude où la pression atmosphérique est P_{atm} = 0,2332 bar et la masse volumique ρ = 0,349 Kg/m^3.

1) Calculer la vitesse de l'avion en Km/h.

2) Calculer la pression et la température du point d'arrêt sur le bord d'attaque de l'aile.

L'air est assimilé à un gaz parfait : γ = 1,4 et r = 287 J/kg.K

Exercice 05

Un corps céleste en chute libre, freiné par les couches d'air de la haute atmosphère tombe sur terre. A une altitude de 10 km :

- la vitesse du corps V=3000 m/s,
- la température de l'air T=223 ^{0}K,
- la masse volumique de l'airρ = 0,412 kg / m^3
- la pression de l'air P=0,265 bar.

On donne γ = 1,4 .

1) Calculer la vitesse du son C.

2) Déterminer le nombre de Mach M.

3) Quelle est la nature de l'écoulement d'air autour du corps ?

4) Appliquer le théorème de Saint-Venant pour calculer la température T_0 et la pression P_0 de l'air au point d'arrêt.

Exercice 06

Un réservoir contient de l'air comprimé à une pression P0= 4 bar, supposée pression d'arrêt à l'état initial. L'ouverture d'une vanne dans ce réservoir provoque la détente de l'air vers l'extérieur sous forme d'un jet ayant un diamètre d = 5 mm. Les paramètres extérieurs du jet d'air à l'état final sont :

- Pression P= 1 bar.
- Température T=25 ^{0}C,

On donne γ = 1,4 et r=287 J/Kg.^{0}K.

1) Calculer la vitesse du son C à l'extérieur du réservoir en (m/s).

2) Déterminer la masse volumique ρ de l'air à l'extérieur du réservoir en (kg/m^3).
(On suppose que l'air est un gaz parfait.)

3) Ecrire l'équation de Saint-Venant, en terme de rapport de pression, entre un point d'arrêt et un point sur le jet d'air.

4) En déduire le nombre de Mach M au niveau du jet d'air.

5) Quelle est la nature de l'écoulement ?

6) Calculer la vitesse d'écoulement V du jet d'air en (m/s).

7) En déduire le débit massique q_m (kg/s).

Références

1. Notions de mécanique des fluides, Riadh BEN HAMOUDA, Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008

2. Cours Mécanique des Fluides ? Henri BROCH Professeur émérite de Physique et de Zététique Université Nice Sophia Antipolis v.4.0 2016

3. Mécanique des fluides, Candel S. Dunod, 2001

4. Mécanique des fluides cours, jimmy roussel, C.P.I.2 - Chem.I.St2 : 2005-2006

5. Mécanique des fluides incompressibles, Mohamed MAALEJ Centre de Publication Universitaire (CPU) 2001

6. Mécanique des fluides, sakir amiroudine, jean-luc battaglia, dunod, paris, 2011.

7. Guide de mécanique, Jean-louis fanchon, Editions Nathan, 9 Rue Méchain 75014 Paris 1996

8. A.Ameur, "Mécanique des fluides appliquée à l'eau: principe fondamentaux et exercices corrigés", Edition castilla,2009