Sériés Numériques

Généralités

Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels,on pose

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La limite de S_n est appelée série de teme général u_n.

$(S_n)_n$ est apelée suite des sommes partielles de la série.

1.Convergence

Définition : Une séries de terme générale u_n est dite convergente si la suites de sommes partielles(S_n) est convergente .

Dans ce cas,la limite de la suite$(S_n)_n$ est appelée de la séries et on note :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Une séries qui n'est pas convergente set dite divergente .

En d'autres termes,si on note $l = \lim_{n\to\infty} S_n$ on a alors :

$\sum_{n\geq} u_n$ converge vers l = $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists m \in N: \forall n \in N(n \geq m \Rightarrow |S_n - l| < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists m \in N: \forall n \in N(n \geq m \Rightarrow |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - l| < \varepsilon)$

Exemples

1.Séries géométrique.Une séries géométrique est une séries dont le terme générale est de la forme u_n= a.q^n , a≠ 0

Pour ce type de séries ,le calcule de la somm partielle est donné par la formue suivante : $u_n = u_0 + u_1$ +……..+u_n=a+ a.$q + \cdots$.. a.q^n=a(1+ q + ….. +q^n)

$$= \begin{cases} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \; si \; q \neq 1 \\ a \; n+1 \quad si \; q = 1 \end{cases}$$

On remarque ainsi que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe si et seulement si $|q| < 1$ .Dans ce cas la série géométrique converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty}$ a. q^n= $a\,\frac{1}{1-q}$= $\frac{a}{1-q}$

2.Soit la série de terme général u_n=$\frac{1}{n(n+1)}$avec n≥ 1.On peut écrire après décomposition en éléments simples que : u_n=u_n=$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

D'où S_n= $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots \ldots \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ =1-$\frac{1}{n+1}$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$=$\lim_{n\to\infty} S_n$=1 ,notre série est convergente et vaut 1

Proposition1.

Soient $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ deux séries, on suppose que ces deux séries ne different que par un nombre fini de termes(i.e il existe p N tel que pour tout n≥ p *on a* u_n=v_n)alors les deux séries somt de même nature.

Proposition2.

Soit $(\sum u_n)$ une série convergente alors $\lim_{n\to\infty} u_n$=0.la réciproque est fausse.

Proposition3.

Soient $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ deux séries convergentes respectivement vers u et v.Alors :

1.La série$\sum(u_n + v_n)$est convergente et ona :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = u+v$$

2.Pour tout α R,la série$(\sum \alpha u_n)$ est convergente et ona :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \alpha$$

2.Séries à termes positifs

Définition :Une séries $(\sum u_n)$ est dite séries à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout n$\in N$.

Théorème(Régle de comparaison avec une intégrale)

Soit $f: 1, +\infty \to R^+$une application continue,décroissante et positive.On pose $u_n = f\ n\ \ pour\ n \in N^*. Alors$:

$$(\sum u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int f(x)\, dx\ existe$$

Exemples

1)Conidérons l'application $f: 1, +\infty \to R^+$,définie par $f\ x = \frac{1}{x}$.

$\int_1^t \frac{1}{x}$ dx=logt et $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}$ dx=+∞.Donc $(\sum \frac{1}{n})$ diverge.

2)Soit la foction $f: 1, +\infty \to R^+$,définie par $f\ x = \frac{1}{x(x+1)}$. f est continue,décroissante et positive.

$\int_1^t f(x)$dx=log$(\frac{t}{t+1})$-log$(\frac{1}{2})$ et $comme$ $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)$ dx=log2<+∞ ;Donc $la\ série(\sum \frac{1}{n(n+1)})$ est alors convergent

Séries de Riemann

Définition :Soit $\alpha \in R$.On appelle série de Riemann toute séries dont le terme générale est de la forme $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, n≥ $1\ et\ \alpha \in R$.

Les séries de Riemann sont des séries dont le terme positifs.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est converge pour α> $1\ et$ diverge pour α ≤ 1

Exemples : **1**. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\boldsymbol{u_n} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{1/2}}$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$diverge

2. $\boldsymbol{u_n} = \frac{\mathbf{1}}{n^2}$, , $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$converge

Proposition(Régle de Riemann)

Soit ($\sum u_n$) une séries à termes positifs.

1.S'il existe α >1 tel que la suite $n^{\alpha}u_n \ _n$ soit majorée par un constante

M >0 ;alors ($\sum u_n$) est convergente.

2. S'il existe α ≤ 1 tel que la suite $n^{\alpha}u_n \ _n$ soit minorée par une constante

m >0 ;alors ($\sum u_n$) est divvergente.

Théorème(comparaison)

Soit ($\sum u_n$) ($\sum v_n$) deux séries à termes positifs.On suppose qu$e$ 0 ≤ v_n ≤ v_n pour tout n □ $N.A$lors :

1.($\sum v_n$)converge□ ($\sum v_n$) converge

2. .($\sum v_n$)diverge □ ($\sum v_n$) diverge

Exemples

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$,u_n=$\frac{1}{n^2+1}$

Ona n^2+1≥ n^2 □$n \geq 0$ □ $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}$ est converge d'apres Riemann $\alpha = 2 > 1$ .Donc $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$ converge.

2. $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}$,ona n-1 ≤ n □ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ est converge d'apres Riemann

$\alpha = 1$.Donc $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}$ diverge.

Théorème(Critère déquivalence)

Soit ($\sum u_n$) et ($\sum v_n$) deux séries à termes strictement positifs.

On suppose que $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l, l \neq$. Alors les deux séries sont de même nature.

Exepmle : Soient les séries ($\sum u_n$) et ($\sum v_n$) tels que $u_n = \frac{1}{n}$ et v_n=log(1+$\frac{1}{n}$).

Ona $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$, *donc il en est de* même de la nature .

Critère de D'alembert

Soit($\sum u_n$) une séries à termes strictement positifs . On pose $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

l <1 la série $\sum u_n$ est converge .

l >1 la série $\sum u_n$ est diverge .

l =1 ,on .ne peut rien conclure.

Exemple : . $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$.Donc la série est converge.

Critère de Cauchy

Soit($\sum u_n$) une séries à termes strictement positifs . On pose $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$

l <1 la série $\sum u_n$ est converge .

l >1 la série $\sum u_n$ est diverge.

l =1 ,on .ne peut rien conclure.

Exemple : $\sum(1+\frac{2}{n})^{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{2}{n})^{n^2}} = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n\frac{2}{n}} = e^2 > 1$

Donc la série est converge.

Séries alternées

Définition : On appelle série alternée toute série $\sum u_n$ vérifiant la relation

$u_n . u_{n+1} \leq 0$.Le terme général u_n d'une telle série peut-etre noté
u_n= $-1\ ^{n} v_n$ ou u_n= $-1\ ^{n+1} v_n$ avec $v_n \geq 0$.

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée $\sum(-1)^n\,|u_n|$.

Séries absolument convergentes

Définition : Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum|u_n|$ est convergente.

Il est claire que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Théorème

Toute séries absolument convergente est convergente.La réciproque est fausse.En d'autres termes :

$\sum|u_n|$ converge□ $\sum u_n$ converge

Exercice : Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2 lin\, n},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{n^{lin\, n}}{(lin\, n)^{n}},\quad \sum_{n\geq 1}\sin\frac{-1\ ^{n}}{n}\ ,\quad \sum_{n\geq 1}\ lin\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}\ ^{\alpha}$$