

Chapitre I

1/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les formes
d'un
programme

Cours Programmation Linéaire.

Chapitre I : Introduction Générale & Formulation d'un Programme Linéaire (Modélisation)

Dr. Ali Dabba

1^{er} septembre 2023

Année universitaire 2023 – 2024

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
- 6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
- 6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Introduction

L'importance de l'optimisation et la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision que soit économique, militaire ou autres on fait de la programmation linéaire un des champs de recherche les plus actifs au milieu du siècle précédent. Les premiers travaux (1947) sont celle de George B. Dantzig et ses associés du département des forces de l'air des États Unis d'Amérique.

Les problèmes de programmations linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées, de la meilleure façon possible, afin de maximiser un profit ou de minimiser un coût. Le terme meilleur fait référence à la possibilité d'avoir un ensemble de décisions possibles qui réalisent la même satisfaction ou le même profit. Ces décisions sont en général le résultat d'un problème mathématique.

Introduction

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réels est la méthode du Simplex. En théorie, elle a une complexité non polynômiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode. De plus, de nombreux logiciels intégrant cette méthode existent. Certains sont utilisés via une interface graphique alors que d'autres permettent une communication par fichiers ce qui autorise l'utilisation du programme de manière cachée dans le développement d'un autre logiciel.

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
- 6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Historique de la PL

Étude des systèmes d'inégalités linéaires par J. Fourier en 1827

- 1 Méthode d'élimination de Fourier-Motzkin
- 2 Généralise l'élimination de Gauss-Jordan



Figure – J. Fourier (1768-1830)

Historique de la PL

Formulation d'une classe restreinte de PL + Algorithme en URSS par L.V. Kantorovich en 1939

- 1 Réorganisation de l'industrie du bois dans une économie centralisée
- 2 Optimisation de la production industrielle de contreplaqué
- 3 Théorie de l'utilité marginale
- 4 Co-prix Nobel d'économie en 1975 (travaux en allocation optimale de ressources)
- 5 Généralise l'élimination de Gauss-Jordan



Figure – L.V. Kantorovich (1912-1986)

Historique de la PL

Minimisation du coût total de transport de biens par T.C. Koopmans en 1944 pour la British Merchant Shipping Mission

- 1 Exchange ratios between cargos on various routes
- 2 Co-prix Nobel d'économie en 1975 (travaux en allocation optimale de ressources)
- 3 Fondation de la recherche



Figure – T.C. Koopmans (1910-1985)

Historique de la PL

Algorithme du simplexe par G. Dantzig en 1947 pour l'U.S. Air Force

- 1 Problèmes militaires de planification d'opérations et d'allocation de ressources
- 2 Algorithme dans le top 10 en 2000



Figure – G. Dantzig (1914-2005)

Historique de la PL

Algorithme de l'ellipsoïde par L.G. Kachiyan en 1979

- 1 Algorithme en temps polynomial
- 2 Peu efficace en pratique (degré élevé du polynôme(t))

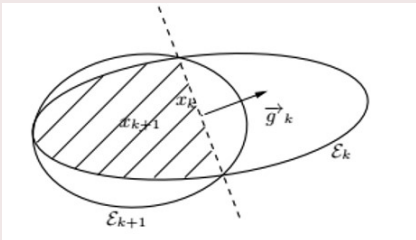


Figure – Leonid Genrikhovich Khachiyan (1952-2005)

Historique de la PL

Algorithme polynomial de point intérieur par N. Karmakar en 1984

- 1 Brevet U.S. Patent 4,744,028 "Methods and apparatus for efficient resource allocation" (mai 1988), débattu au sénat U.S.
- 2 Méthodes de point intérieur pour la programmation convexe (SDP)
- 3 Armarkar a reçu le prix Fulkerson en 1988 et le prix Paris Kanellakis en 2000 pour son algorithme.



Figure – Narendra Karmarkar (1957)

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
- 6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Définition de la programmation linéaire (PL)

Chapitre I

14/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les formes
d'un
programme

Definition (William J. BAUMAUL)

La programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction à objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires. Elle vise à sélectionner parmi différentes actions celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé.

Définition de la programmation linéaire (PL)

Chapitre I

15/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les formes
d'un
programme

Definition (Robert DORFMAN et Paul SAMUELSON)

La programmation linéaire est une méthode de détermination du meilleur plan d'action pour réaliser des objectifs donnés dans une situation où les ressources sont limitées. C'est donc une méthode de résolution du problème économique, soit dans le cadre d'une économie globale, soit dans celui du secteur public, soit dans une entreprise particulière.

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire**
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
- 6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Présentation théorique de la PL

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

- 1 Soient n variables de décision x_1, x_2, \dots, x_n , l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$
- 2 La fonction objective est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ où les coefficients c_1, \dots, c_n doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Exemple

Par exemple le coefficient c_i peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_i , ainsi la valeur de z est le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à x_1, x_2, \dots, x_n .

Exemple

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par m inégalités

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

où les coefficients a_{1n}, \dots, a_{mn} et b_1, \dots, b_m doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Le paramètre b_j représente la quantité de matière première disponible dont le bien x_i utilise une quantité égale à $a_{ij}x_i$.

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
 - Les conditions de formulation d'un programme linéaire
 - Les étapes de formulation d'un programme linéaire
 - Exemple 1 (Problème d'agriculture)¹
 - Exemple 2 (Problème de médecine)²

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Chapitre I

22/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les conditions de
formulation d'un
programme linéaire

Les étapes de

Formulation d'un PL (Modélisation)

Dans ce qui suit, on présentera les conditions et les étapes de formulation d'un programme linéaire, suivies de quelques exemples de formulation en programme linéaire liés à différents problèmes de décision :

- 1 Les conditions de formulation d'un programme linéaire.
- 2 Les étapes de formulation d'un programme linéaire.

Les conditions de formulation d'un programme linéaire

Chapitre I

23/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les conditions de formulation d'un programme linéaire

Les étapes de

Les conditions de formulation d'un PL

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

- 1 Les variables de décision du problème sont positives.
- 2 Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).

Les conditions de formulation d'un programme linéaire

Chapitre I

24/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les conditions de formulation d'un programme linéaire

Les étapes de

Les conditions de formulation d'un PL

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

- 3 Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple : limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
- 4 Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude.

Les étapes de formulation d'un PL

Généralement, il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

- 1 Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exemple : x, y).
- 2 Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
- 3 Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Exemple 1 (Problème d'agriculture)

Chapitre I

26/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les conditions de
formulation d'un
programme linéaire

Les étapes de

Exemple 1 (Problème d'agriculture)

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments.

Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m^3 d'eau.

Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars.

Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates.

Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Formulation du problème d'agriculture en un PL

Étape 1 : Identification des variables de décision.

Les deux activités que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments :

- x_1 : la surface allouée à la culture des tomates.
- x_2 : la surface allouée à la culture des piments.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Formulation du problème d'agriculture en un PL

Étape 2 : Identification des contraintes.

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

- *Terrain* : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$.
- *Eau* : la culture d'un hectare de tomates demande $4 m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2 m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440 m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leq 440$.

Formulation du problème d'agriculture en un PL

Étape 2 : Identification des contraintes.

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

- *Main d'œuvre* : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leq 480$.
- *Les limitations du bureau du périmètre irrigué* : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \leq 90$.

Formulation du problème d'agriculture en un PL

Étape 3 : Identification de la fonction objectif.

La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc $100x_1 + 200x_2$.

Formulation du problème d'agriculture en un PL

Le programme linéaire qui modélise le problème d'agriculture est :

$$\text{Max } z = 100x_1 + 200x_2$$

$$S.C \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 2 (Problème de médecine)

Chapitre I

32/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les conditions de formulation d'un programme linéaire

Les étapes de

Exemple 2 (Problème de médecine)

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine.

Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Chapitre I

33/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les conditions de
formulation d'un
programme linéaire

Les étapes de

Formulation du problème de médecine en un PL

Le problème de médecine présente certaines ressemblances avec le problème de l'agriculture, dans les deux cas c'est un problème d'allocation de ressources.

Formulation du problème de médecine en un PL

Étape 1 : Identification des variables de décision.

Les variables de décision qui représentent des valeurs inconnues par le décideur qui est dans ce cas le spécialiste en médecine sont :

- x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
- x_2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Formulation du problème de médecine en un PL

Étape 2 : Identification des contraintes.

Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de x_1 et x_2 sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante :
$$2x_1 + x_2 \geq 12.$$
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74.$
- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est : $x_1 + 6x_2 \geq 24.$

Formulation du problème de médecine en un PL

Étape 3 : Identification de la fonction objectif.

On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions qui peuvent satisfaire les contraintes spécifiées à l'étape 2. La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules $z = x_1 + x_2$.

Formulation du problème de médecine en un PL

Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + x_2 \\ \text{S.C } &\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exemple 3 (Problème de production)

Chapitre I

38/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les conditions de formulation d'un programme linéaire

Les étapes de

Exemple 3 (Problème de production)

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11mn	7mn	6mn
P2	9mn	12mn	16mn

Exemple 3 (Problème de production)

Chapitre I

39/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les conditions de
formulation d'un
programme linéaire

Les étapes de

Exemple 3 (Problème de production)

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.
La disponibilité pour chaque machine sont :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1.
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2.
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3.

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le
produit P2 un profit unitaire de 1000 dinars.

**Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer
mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit
total maximum ?**

Formulation du problème de production en un PL

Étape 1 : Identification des variables de décision.

Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer.
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer.

Formulation du problème de production en un PL

Étape 2 : Identification des contraintes.

Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$: pour la machine M1.
- $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$: pour la machine M2.
- $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$: pour la machine M3.

Formulation du problème de production en un PL

Étape 3 : Identification de la fonction objectif.

Le profit à maximiser est : $z = 900x_1 + 1000x_2$.

Le programme linéaire résultant est :

$$\text{Max } z = 900x_1 + 1000x_2$$

$$S.C \left\{ \begin{array}{l} 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Chapitre I

43/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

- 1 Introduction
- 2 Historique de la programmation linéaire
- 3 Définition de la programmation linéaire (PL) :
- 4 Présentation théorique de la programmation linéaire
- 5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)
- 6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

44/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Il existe trois formulations du programme linéaire avec la condition de non-négativité (ou de positivité ou de réalisabilité) de l'ensemble des variables $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

Forme standard	Forme canonique	Forme mixte
$\begin{aligned} \text{Max } z &= C.X \\ \text{S.C } \quad &\begin{cases} A.X = 0 \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } z &= C.X \\ \text{S.C } \quad &\begin{cases} A.X \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } z &= C.X \\ \text{S.C } \quad &\begin{cases} \alpha_i.X \leq b_i \quad i \in M_1 \\ \alpha_i.X = b_i \quad i \in M - M_1 \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

45/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Propriété

On peut ramener les formes générales et mixtes à la forme standard ou à la forme canonique et on peut passer de la forme standard à la forme canonique et vice-versa par des opérations élémentaires.

- 1^{ère} opération :

$$\text{Min} f(x) = -\text{Max}(-f(x)).$$

- 2^e opération : on peut remplacer chaque variable par une différence de variables positives

$$x_j = x'_j - x''_j \geq 0 \text{ où } x'_j \geq 0 \text{ et } x''_j \geq 0.$$

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

46/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Exemple 1

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
 \text{S.C } \left\{ \begin{array}{l}
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x'_j et x''_j telles que $x_j = x'_j - x''_j$.

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

47/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Exemple 1

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } z = \\
 \\
 \text{S.C } \left\{ \begin{array}{l}
 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

⇓

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } z = \\
 \\
 \text{S.C } \left\{ \begin{array}{l}
 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Exemple 2

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
 \text{S.C } \left\{ \begin{array}{l}
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Si une variable x_j est négative, on la remplace par une variable positive $x_j = -x_j$.

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

49/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Exemple 2

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } z = \\
 S.C \quad \left\{ \begin{array}{l}
 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

⇓

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } z = \\
 S.C \quad \left\{ \begin{array}{l}
 3x_1 - 2x_2 - 8x'_3 \\
 5x_1 - 2x_2 - 4x'_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 - 8x'_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 + 3x'_3 \leq 17 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x'_3 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Propriété

- 3^e opération :

chaque équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = d_i$ peut être remplacée par les inéquations :

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq d_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq d_i \end{cases}$$

ou par les inéquations équivalentes :

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq d_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -d_i \end{cases}$$

Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ.

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

51/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Exemple

$$\text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

$$S.C \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

$$S.C \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

$$S.C \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

$$S.C \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Propriété

- 4^e opération : Toute inéquation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq d_i$ (ou $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq d_i$) peut être remplacée par les équations :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = d_i \text{ avec } x_{n+i} \geq 0$$

$$\text{(ou } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = d_i \text{ avec } x_{n+i} \geq 0)$$

x_{n+i} est appelée une variable d'écart qu'on peut introduire dans le problème et qui est affecté d'un coefficient nul dans la fonction à optimiser. Les x_i sont appelés des "variables structurelles".

Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Chapitre I

53/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de la programmation linéaire

Définition de la programmation linéaire (PL) :

Présentation théorique de la programmation linéaire

Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Les formes d'un programme

Résumé

- De la forme générale, on peut passer à la forme mixte en procédant par les **opérations 1 et 2**.
- De la forme mixte et standard à la forme canonique, on procède par **l'opération 3**.
- De la forme mixte et canonique à la forme standard, on procède par **l'opération 4**.

Questions ?

Chapitre I

54/54

Dr. A. Dabba

Introduction

Historique de
la programmation
linéaire

Définition de
la programmation
linéaire
(PL) :

Présentation
théorique de la
programmation
linéaire

Formulation
d'un
programme
linéaire (PL)
(Modélisation)

Les formes
d'un
programme

