Cours Programmation Linéaire.

Chapitre III : Méthodes du Simplexe (1) (Résolution d'un programme linéaire par la méthode des tableaux)

Dr. Ali Dabba

13 octobre 2023

Année universitaire 2023 – 2024

Plan

Plan

Introduction

On a présenté dans le chapitre précédent une procédure graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Par contre, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer. Il nous faut donc une méthode d'optimisation d'un modèle de programmation linéaire qui peut s'appliquer efficacement peu importe le nombre de variables dans le modèle. Par conséquent, une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables fera l'objet de ce chapitre. Pour ce faire, on utilise **l'Algorithme du simplexe**.

Introduction

Introduction

Un programme linéaire (PL) mis sous la forme particulière où toutes les contraintes sont des équations et toutes les variables sont non négatives est dit sous forme standard. Dans ce chapitre, l'algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947) est un algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

Dans l'algorithme du simplexe, on commence par transformer le programme linéaire à traiter en un programme linéaire équivalent sous forme standard. Il ne reste alors plus qu'à déterminer une solution optimale d'un programme linéaire sous forme standard.

Introduction

Introduction

L'algorithme du simplexe consiste à se déplacer d'un sommet du polyèdre en un autre sommet du polyèdre tout en augmentant l'objectif (économique). Ce raisonnement est valable parce que le polyèdre des solutions réalisables est convexe : il n'y a pas de risque de se trouver coincé dans un minimum local. La convexité découle du fait que les contraintes sont données par des expressions linéaires.

Plan

Mise sous forme standard

Mise sous forme standard

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires (une pour chaque contrainte) de manière à réécrire les inégalités ($\leqslant$ ou $\geqslant$) sous la forme d'égalités. Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. On les appelle variable d'écart.
La forme standard s'écrit donc :

$$\begin{array}{l} Max\ Z(x) = c^T.x \\ S.C \begin{cases} A.x + E = b \\ x \geqslant 0, E \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} Max\ z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ S.C & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + e_m = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \\ e_1 \geqslant 0, e_2 \geqslant 0, \cdots, e_m \geqslant 0 \end{cases} \end{array}.$$

Mise sous forme standard

Exemple

La forme standard du programme linéaire de l'agriculteur est :

$$
\begin{array}{l}
Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 \\
S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 \\ x_1 \leqslant 90 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{array}
\xrightarrow[Standard]{Forme}
\begin{array}{l}
Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 \\
S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 150 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 = 440 \\ x_1 + 4x_2 + e_3 = 480 \\ x_1 + e_4 = 90 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geqslant 0 \end{cases}
\end{array}
$$

L'impact de ces variables d'écart sur la fonction objectif est nulle. Ceci explique le fait que leur existence soit tout simplement liée à une mise en forme du programme linéaire initial. Ces variables d'écart peuvent prendre des valeurs non négatives. Le fait de donner la valeur des variables d'écart à l'optimum donne une idée du nombre des ressources non utilisées.

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Plan

Variables de base et variables hors base

Variables de base et variables hors base

Considérons un système d'équations à n variables et m équations où $n \geqslant m$. Une solution de base pour ce système est obtenue de la manière suivante :

1. On pose $n - m$ variables égales à 0. Ces variables sont appelées variables hors base (V.H.B.).
2. On résout le système pour les m variables restantes. Ces variables sont appelées les variables de base (V.D.B.)
3. Le vecteur de variables obtenu est appelé solution de base (il contient les variables de base et les variables hors base)

Une solution de base est admissible si toutes les variables de la solution de base sont $\geqslant 0$.

Il est vraiment important d'avoir le même nombre de variables que d'équations.

Plan

La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

Introduction

La méthode de simplexe sous forme des tableaux commence par l'identification d'une solution réalisable de base et ensuite, elle essaye de trouver d'autres solutions réalisables de base jusqu'à atteindre à la solution optimale. Ainsi, on doit, tout d'abord, retrouver cette solution réalisable de base.

Le principe de résolution nécessite un certain nombre d'étapes contenu au travers de l'algorithme du simplexe sous forme des tableaux dont la démarche est la suivante :

La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

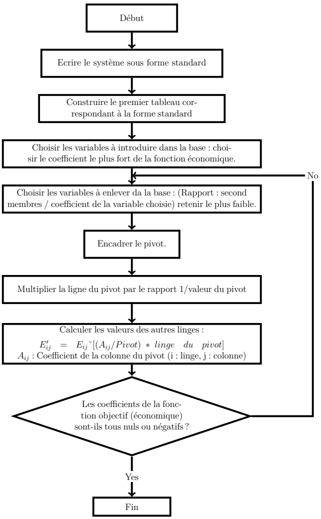

Figure – Algorithme du simplexe de la méthode des tableaux

La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

Algorithme du Simplexe

La résolution par l'algorithme du simplexe se déroule selon **8 étapes avant un nouveau passage**.

La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

1ère étape : Écrire le système sous forme standard

Il s'agit convertir le programme établi sous forme canonique (système d'inéquation) sous la forme standard (système d'équation avec variable d'écarts). Les variables d'écart introduites au cours de cette transformation représentent les contraintes techniques et commerciales disponible qu'il contient de saturer.

Forme canonique $\Leftrightarrow$ **Forme standard**

$$Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 \qquad\qquad Max\ Z = 100x_1 + 200x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 \\ x_1 \leqslant 90 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 150 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 = 440 \\ x_1 + 4x_2 + e_3 = 480 \\ x_1 + e_4 = 90 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

2e étape : Construire le premier tableau correspondant à la forme standard

Coefficient E_{ij}

Variable d'écart

Valeur en base

Valeur solution

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	1	1	1	0	0	0	150
e_2	4	2	0	1	0	0	440
e_3	1	4	0	0	1	0	480
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	100	200	0	0	0	0	0

Fonction objectif (économique)

3e étape : Choisir les variables à introduire dans la base :

Pour cela choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique
Les coefficients de la fonction économique (MAX) est 200.
Ainsi il s'agit de la variable x_2 qui rentre en base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	1	1	1	0	0	0	150
e_2	4	2	0	1	0	0	440
e_3	1	4	0	0	1	0	480
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	100	200	0	0	0	0	0

4e étape : Choisir les variables à enlever da la base :

(Rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.
Le seconde membre, nous retenons la valeur la plus faible (120) du rapport second membre (en gras) / coefficient de la variable choisie. Ainsi la variable e_3 (encadre gras) est la variable à enlever de la base.

	x_1	x_2 ↓	e_1	e_2	e_3	e_4	**2e membre**		
e_1	1	1	1	0	0	0	150	$150/1 = 150$	
e_2	4	2	0	1	0	0	440	$440/2 = 220$	
e_3	1	4	0	0	1	0	480	$480/4 = 120$	←
e_4	1	0	0	0	0	1	90	$90/0 = \infty$	
Max	100	200	0	0	0	0	0		

5e étape : Encadrer le pivot.

L'élément 4, à l'intersection de la ligne relative à la variable sortante e_3 (dite ligne pivot) et de la colonne relative à la variable entrante x_2 (dite colonne pivot) est l'élément pivot. (C'est l'élément cerclé dans le tableau).

E_{ij} A_{ij}

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	1	1	1	0	0	0	150
e_2	4	2	0	1	0	0	440
e_3	1	4	0	0	1	0	480
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	100	200	0	0	0	0	0

Ligne du pivot

Pivot

6e étape : Multiplier la ligne du pivot par le rapport 1/valeur du pivot (ou diviser la ligne du pivot par le pivot).

E'_{ij}

1/Pivot

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1							
e_2							
x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120
e_4							
Max							

7^{e} étape : Calculer les valeurs des autres linges.

$$E'_{ij} = E_{ij} - [(A_{ij}/Pivot) * linge\ du\ pivot]$$

Cette opération consiste à transformer E_{ij} des autres lignes en E'_{ij}, nous effectuons un calcul matriciel. A_{ij} : Coefficient de la colonne du pivot (i : linge, j : colonne).

Remarque

- Dans la ligne du pivot, les variables qui sont affectées des coefficients 0, on recopiera ces colonnes.
- Dans la colonne du pivot apparait un zéro, on recopie la ligne.

7e étape : Calculer les valeurs des autres linges.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	**2e membre**
e_1	3/4	0	1	0	-1/4	0	30
e_2	7/2	0	0	1	-1/2	0	200
x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	50	0	0	0	-50	0	-24000

La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

8^{e} étape : Les coefficients de la fonction économique sont-ils tous nuls ou négatifs ?

(si oui nous sommes à l'optimum, sinon (non) nous effectuons un nouveau passage).
Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatifs (50) il convient d'effectuer un nouveau passage.

La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

Nouveau passage (1)

- Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique. Le coefficient de la fonction économique (MAX) est 50. Ainsi il s'agit de la variable x_1 qui rentre en base.
- Choisir la variable à enlever de la base (rapport : second membres /coefficient da la variable choisie). Retenir le plus faible.

Nouveau passage (2)

Le second membre, nous retenons la valeur la plus faible du rapport second membre / coefficient de la variable choisie. Ainsi la variable e_1 est la variable à enlever de la base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	2e membre	
e_1	3/4	0	1	0	-1/4	0	30	$30/(3/4) = 40$
e_2	7/2	0	0	1	-1/2	0	200	$200/(7/2) = 400/7$
x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120	$120/(1/4) = 480$
e_4	1	0	0	0	0	1	90	$90/1 = 90$
Max	50	0	0	0	-50	0	-24000	

Nouveau passage (3)

- Le pivot est égal à 3/4.
- Multiplier la ligne du pivot par 4/3 (ou diviser la ligne du pivot par le pivot : 3/4)
- Calculer les autres valeurs des lignes.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	**2^{e} membre**
x_1	1	0	4/3	0	-1/3	0	40
e_2	0	0	-14/3	1	2/3	0	60
x_2	0	1	-1/3	0	1/3	0	110
e_4	0	0	-4/3	0	1/3	1	50
Max	0	0	-200/3	0	-100/3	0	-26000

Conclusion

Les coefficients de la fonction économique sont tous nuls ou négatifs, fin de l'algorithme du simplexe. La solution qui rend optimal le programme de production est le suivant :
La marge sur cout variable maximum = 26000 dinars. Les quantités surfaces $x_1 = 40$, $x_2 = 110$, et on constate que les deux variables d'écarts e_1 et e_3 correspondant à les deux contraintes de *Terrain et Main d'œuvre* n'est pas saturées. Par contre e_2 la variable d'écart traduisant la contrainte eau et e_4 la variable d'écart correspondant à la contraint *les limitations du bureau du périmètre irrigué* sont saturées.

Questions ?