Université Mohamed Boudiaf - M'Sila
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département d'informatique

Cours Programmation Linéaire.

Chapitre III : Méthodes du Simplexe (2) (Résolution d'un programme linéaire par la méthode des variables artificielles)

Dr. Ali Dabba

1er septembre 2023

Année universitaire 2023 – 2024

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Plan

Plan

Introduction

Introduction

Compte tenu de tout ce qui précède, tous les programmes linéaires qu'on a traité sont du type : Maximiser une fonction linéaire sous contraintes de type inférieur ou égale (et avec un second membre positif). Or dans beaucoup de problèmes réels, on peut retrouver des contraintes de type supérieur ou égale et/ou de type égale, ainsi que des problèmes où on a minimiser au lieu de maximiser.
En effet, on étudiera les modifications à apporter à la méthode du simplexe pour qu'elle puisse résoudre tous ces types de programmes.

Introduction

Introduction

Dans une contrainte du type " $\geqslant$ ", une variable d'écart positive apparaît précédée d'un signe " $-$ ". La présence de ces signes "$-$" ne nous permet plus de prendre les variables d'écart comme variables de base dans le premier tableau.
Pour résoudre le problème, on introduit de nouvelles variables appelées variables artificielles. Une variable artificielle est une variable fictive introduite spécialement pour engendrer une solution de base accessible. Elle n'a pas de signification économique.

Plan

Principe de la méthode des variables

Principe de la méthode des variables

L'introduction de variables artificielles permet de résoudre le problème posé par les contraintes " $\geqslant$ ". Quand un programme linéaire comporte une contrainte $\geqslant$, la contrainte de positivité liée à la variable d'écart n'est pas respectée pour la forme standard.

Principe de la méthode des variables

Soit la contrainte : $x + 2y + z \geqslant 16$.
Prenons une solution qui respecte la contrainte. Par exemple, (5, 5, 5) donne 5 + 10 + 5 = 20. Dans la forme standard, la variable d'écart e_1 qui permet l'égalité est telle que :
$20 + e_1 = 16$, soit $e_1 = -4$ (ce qui ne respecte pas la condition $e_1 \geqslant 0$). La forme standard de la contrainte est donc :
$x + 2y + z - e_1 = 16$.
La variable e_1 est alors mise hors base, et l'introduction dans la base d'une variable artificielle A_1, positive ou nulle, affectée du coefficient 1 permet d'obtenir une solution de départ admissible : $x + 2y + z - e_1 + A_1 = 16$. Les variables hors base sont : $x = y = z = e_1 = 0$, et en base $A_1 = 16$ (ce qui respecte $A_1 \geqslant 0$).

Plan

Les variables artificielles

Les variables artificielles

Considérons le programme linéaire suivant :

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$$
$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables artificielles

Les variables artificielles

L'introduction des variables d'écart dans le programme linéaire donne

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 - e_2 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables artificielles

Les variables artificielles

Afin de générer une solution réalisable de base initiale pour la méthode de simplexe, on a annulé les variables de décision x_1 et x_2. Ceci nous permet de commencer à partir de l'origine O. Or, on vérifie bien que l'origine n'est pas une solution réalisable. La question qui se pose est comment nous allons réécrire le programme de manière qu'on puisse construire le tableau de simplexe initial à l'origine.
Pour arriver à cette fin, on doit ressortir une astuce mathématique qui se résume à l'introduction de nouvelles variables, dite variables artificielles A_1 et A_2.

Les variables artificielles

Les variables artificielles

Ces variables n'ont aucune interprétation, comme leur nom l'indique, ils sont conçus artificiellement pour nous aider à utiliser la procédure de simplexe et à formuler le tableau initial à partir de l'origine.

Si on ajoute ces deux variables artificielles A_1 et A_2 respectivement à la 2e et 3e contrainte, le programme devient le suivant :

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + \cdots$$
$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + A_1 = 60 \\ x_2 - e_2 + A_2 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables artificielles

Les variables artificielles

Maintenant on peut obtenir une solution initiale de base du système d'équations, Si on pose $x_1 = x_2 = 0$. La solution initiale est : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $e_1 = 4$, $e_2 = 0$, $A_1 = 60$, $A_2 = 5$. On peut conclure que tant que les variables artificielles restent dans la base, la solution demeure non réalisable réellement pour notre programme.

Les variables artificielles

Les variables artificielles

Une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associée un grand coût $(-M)$ dans la fonction objectif. Ainsi, si ces variables restent dans la base ils vont causer une diminution importante de la valeur de la fonction objectif. Ce qui nous contraignent à les faire sortir le plutôt possible de la base.
La fonction objectif s'écrit donc :

$$Max\, Z = 5x_1 + 6x_2 - MA_1 - MA_2$$

avec M un très grand nombre.

Les variables artificielles

Definition

1. Introduire une variable artificielle par contrainte $\geqslant$. La variable d'écart de la contrainte, affectée du coefficient -1, est mise hors base.
2. Elles permettent simplement l'égalité dans la forme standard et ne sont pas une donnée du problème. En conséquence, elles doivent être nulles à l'optimum. Pour cela, il faut les faire sortir de la base en leur donnant un coefficient fortement pénalisant dans la fonction économique :
   - S'il s'agit d'une maximisation, le coefficient affecté à la variable est très négatif : $-M$.
   - S'il s'agit d'une minimisation, le coefficient affecté à la variable est très positif : $+M$.

   M étant suffisamment grand pour qu'on soit sûr que (A_i) est exclue de la solution optimale.

Plan

Résolution des problèmes de maximisation

Soit le programme linéaire :

$$Max\ Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 10000 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 5000 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

La forme standard de ce programme est :

$$Max\ Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 - MA_1$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + e_1 = 10000 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - e_2 + A_1 = 5000 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, A_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Résolution des problèmes de maximisation

D'après la deuxième contrainte :

$$A_1 = 5000 - x_1 - x_2 - x_3 + e_2$$

D'où

$$Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 - M(5000 - 2x_1 - x_2 - x_3 + e_2)$$
$$Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 + 2x_1M + x_2M + x_3M - e_2M - 5000M$$
$$Z = (100 + 2M)x_1 + (500 + M)x_2 + (200 + M)x_3 + (0 + 0)e_1 + (0 - M)e_2 - 5000M$$

Résolution des problèmes de maximisation

Donc le PL :

$$\begin{aligned} Max\ Z = {} & 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 \\ & +2x_1M + x_2M + x_3M - e_2M - 5000M \end{aligned}$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + e_1 = 10000 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - e_2 + A_1 = 5000 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, A_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Résolution des problèmes de maximisation

Résolution des problèmes de maximisation

En appliquant de ces modifications, le tableau de simplexe initial est e_1 et A_1 les variables de bases Les autres sont des variables hors bases.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1	
e_1	1	3	1	1	0	0	10 000
A_1	2	1	1	0	-1	1	5000
Max	100 +2M	500 +1M	200 +1M	0 0	0 -1M	0 0	0 +5 000M

Résolution des problèmes de maximisation

Encadrer le pivot

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1			R
e_1	1	3	1	1	0	0	10 000		$10000/1 = 10000$
A_1	$\boxed{2}$	1	1	0	-1	1	5000	$\leftarrow$	$5000/2 = 2500$
Max	100 +2M	500 +1M	200 +1M	0 0	0 -1M	0 0	0 +5 000M		

$\uparrow$ 2M est le plus fort coefficient positif

Résolution des problèmes de maximisation

La variable entrante est x_1 $(100 + 2M \geqslant 500 + M$ et $100 + 2M \geqslant 200 + M$ avec M assez grand) et la variable sortante est A_1. Le tableau de simplexe qui suit est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1		R
e_1	0	5/2	1	1	1/2	-1/2	7 500	← $7500/(5/2) = 3000$
x_1	1	0.5	0.5	0	-1/2	1/2	2 500	$2500/(1/2) = 5000$
Max	0	450 +0M	150 +0M	0	50 +0M	-50 -M	-250 000 +0M	

↑ 450 est le plus fort coefficient positif

Remarque

La seul variable artificielles A_1 sortir de la base. Et leurs effets nets est maintenant négatif et très élevé, elles ne pourront donc pas être sélectionnées à l'itération suivante, ni même ultérieurement comme on peut facilement le constater. Donc on peut supprimer du tableau la colonne relative à A_1.

Résolution des problèmes de maximisation

La sortie de la base d'une variable artificielle étant définitive, sa colonne peut être supprimée.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2		
x_1	0	1	2/5	2/5	1/5		3 000
x_2	1	0	3/10	-1/5	3/5		1 000
Max	0	0	-30	-180	-40		-1600 000

Résolution des problèmes de maximisation

Le tableau ci-dessus est optimal car tous les effets nets sont négatifs ou nuls. Donc la solution optimale est : $x_1 = 1000; x_2 = 3000$; $x_3 = 0$ et $Z = 1600000$. Une variable artificielle n'apparaît jamais dans la base du tableau final si on a atteint une solution optimale accessible.

Plan

Résolution des problèmes de minimisation

Il y a deux manières de résoudre un problème de minimisation en utilisant la méthode de simplexe.

La première méthode nécessite le changement de la règle de choix de la variable entrante. Dans un problème de maximisation la règle est de choisir comme variable entrante celle qui a le plus grand effet net positif non nul. Ceci parce que notre objectif est de choisir la variable qui en entrant dans la base va engendrer un profit supplémentaire et ainsi accroître la valeur de la fonction objectif. Pour un problème de minimisation, on va utiliser la règle inverse. C'est-à-dire la variable entrante est celle à laquelle on associe la plus petite valeur négative non nulle de l'effet net.

Ceci va nous amener aussi à changer notre règle d'arrêt de la procédure de simplexe et de définir le tableau optimal, comme celui où tous les effets nets sont positifs ou nuls.

Résume

- **Choix de la variable entrante :** Dans un problème de minimisation, la variable entrante est la variable hors base qui a le coefficient « le plus négatif » dans la fonction économique.
- **Tableau optimal et solution optimale :** Dans un problème de minimisation, on obtient un tableau optimal dès que tous les coefficients de la fonction économique sont positifs ou nuls.

Résolution des problèmes de minimisation

Exemple

Essayons d'appliquer la méthode de simplexe sur le problème de médecine :

$$Min\ Z = x_1 + x_2$$

$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geqslant 74 \\ x_1 + 6x_2 \geqslant 24 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Résolution des problèmes de minimisation

Exemple

Pour permettre à la méthode de simplexe de démarrer de l'origine, il faut comme on l'a déjà vu dans le cas de problème de maximisation, introduire les variables artificielles. Avec les problèmes de maximisation on attribue à ces variables un coefficient $(-M)$ dans la fonction objectif pour les contraindre à quitter la base rapidement. Dans le cas de problèmes de minimisation, on a intérêt à changer le coefficient de ces variables en M (M très grand) afin d'arriver au même résultat et de les faire sortir de la base.

Résolution des problèmes de minimisation

Exemple

Avant de construire le tableau de simplexe initial, on réécrit le programme linéaire relatif au problème de médecine avec les variables artificielles.

$$Min\ Z = x_1 + x_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 - e_1 + A_1 = 12 \\ 5x_1 + 8x_2 - e_2 + A_2 = 74 \\ x_1 + 6x_2 - e_3 + A_3 = 24 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, A_1, A_2, A_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Résolution des problèmes de minimisation

Exemple

D'après la première contrainte : $A_1 = 12 - 2x_1 - x_2 + e_1$

D'après la deuxième contrainte : $A_2 = 74 - 5x_1 - 8x_2 + e_2$

D'après la troisième contrainte : $A_3 = 24 - x_1 - 6x_2 + e_3$

D'où

$$Z = x_1 + x_2 + M(12 - 2x_1 - x_2 + e_1) + M(74 - 5x_1 - 8x_2 + e_2) + M(24 - x_1 - 6x_2 + e_3) Z = x_1 + x_2 - 8Mx_1 - 15Mx_2 + Me_1 + Me_2 + Me_3 + 110M$$

Exemple

Le tableau de simplexe initial est :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	A_1	A_2	A_3		
A_1	2	1	-1	0	0	1	0	0	12	$12/1 = 12$
A_2	5	8	0	-1	0	0	1	0	74	$74/8 = 37/4$
A_3	1	6	0	0	-1	0	0	1	24	$\leftarrow$ $24/6 = 6$
Z	1 -8M	1 -15M	M	M	M	0	0	0	-110M	

$\uparrow$ 1-15M est le plus négatif

Exemple

Après 4 itérations, on trouve le tableau de simplexe optimal suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3				
x_1	1	0	-8/11	1/11	0				8
e_3	0	0	2	-1	1				26
x_2	0	1	5/11	-2/11	0				2
Z	0	0	3/11	1/11	0				-10

Résolution des problèmes de minimisation

Exemple

On retrouve la même solution obtenue par la méthode graphique :

$$x_1 = 8,\ x_2 = 2,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0,\ e_3 = 26,\ \text{et } Z = 10$$

Conclusion

Conclusion

Après avoir vérifié que le second membre des contraintes est positif, le tableau suivant résume les transformations à faire subir à notre programme linéaire avant de le résoudre par la méthode de simplexe :

Table – Résumé de la transformation

Quand la contrainte est de type	Pour la fonction objectif d'un problème de **Maximisation**	**Minimisation**
I) « $\leqslant$ » Ajouter une variable d'écart	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart	
II) « $=$ » Ajouter une variable d'écart et une variable artificielle	Attribuer un coefficient $(-M)$ pour variable artificielle	Attribuer un coefficient (M) pour la variable artificielle.
III) « $\geqslant$ » Ajouter une variable artificielle et une variable d'écart avec un signe "$-$"	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient $(-M)$ pour variable artificielle	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient M pour variable artificielle.

Questions ?