جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf - M'Sila
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département d'informatique

Cours Programmation Linéaire.

Chapitre III : Méthodes du Simplexe (3) (Résolution d'un programme linéaire par la méthode matricielle)

Dr. Ali Dabba

1er septembre 2023

Année universitaire 2023 – 2024

Plan

Plan

1. Calculs matriciels (Rappelé)
   - Représentation matricielle et notations
   - Opérations élémentaires sur les matrices
   - Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice
2. La Méthode du Simplexe sous forme matricielle

Représentation matricielle et notations

Représentation matricielle et notations

Une matrice est un tableau rectangulaire d'éléments, généralement des nombres ou des fonctions. Ces grandeurs sont généralement des réels ou des complexes. Dans la suite, nous ne considérerons que des grandeurs réelles. Une matrice A de dimension $m \times n$ est notée $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Cette matrice est une matrice de m lignes et de n colonnes :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Représentation matricielle et notations

Représentation matricielle et notations

Une matrice V qui ne comporte qu'une seule colonne, $V \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, est appelé un vecteur colonne :

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

Une matrice V qui ne comporte qu'une seule ligne, $V \in \mathbb{R}^{1\times n}$, est appelé un vecteur ligne :

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Par convention, tout vecteur est désigné comme une matrice colonne. Si $m = n$, alors la matrice est carrée.

Opérations élémentaires sur les matrices

Definition (L'addition matricielle)

L'addition matricielle n'est définie qu'entre deux matrices de même dimensions. La matrice résultante est de la même dimension que les matrices additionnées et chacun de ses éléments est la somme des éléments des deux matrices correspondant à la même ligne et à la même colonne.
Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. L'addition de ces deux matrices est donnée par :

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

On la note : $C = A + B$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Il en va de même pour la soustraction, au signe près. La **soustraction** des matrices A et B est donnée par :

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

On la note : $C = A - B$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Opérations élémentaires sur les matrices

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. $A + B = B + A$ Commutativité (commutative law).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ Associativité (associative law).
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$

Opérations élémentaires sur les matrices

Definition (Multiplication par un scalaire)

La multiplication entre une matrice et un nombre scalaire donne une matrice dont chaque élément de la matrice est multiplié par le scalaire. Étant donné $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice, et b un scalaire, alors les éléments de la matrice C résultante sont donnés par :

$$c_{ij} = b * a_{ij}$$

La matrice $C = bA$ est de même dimension que A, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Definition (La multiplication matricielle)

La multiplication entre deux matrices n'est définie que lorsque leurs dimensions son compatibles : le nombre de colonnes de la matrice à gauche de l'opérateur doit correspondre au nombre de lignes de la matrice à droite de l'opérateur.
Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et si $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, la multiplication entre les matrices A et B donne une matrice C de dimensions $m \times p$ telle que tous ses éléments :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$$

On note cette opération : $C = A * B = AB$

Opérations élémentaires sur les matrices

Propriétés

Les propriétés élémentaires de la multiplication matricielle sont :

1. $AB \neq BA$ La commutativité n'est pas toujours vraie (the commutative law is usually broken).
2. $C(A+B) = CA + CB$ Distributivité à gauche (distributive law from the left) avec $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$
3. $(A+B)C = AC + BC$ Distributivité à droite (distributive law from the right) avec $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$
4. $A(BC) = (AB)C$ Associativité (associative law) avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$

Opérations élémentaires sur les matrices

Definition (Transposée)

La transposée d'une matrice A est la matrice A^T (notée parfois aussi $A^{'}$) définie par : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \ , \ A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes ou colonnes en lignes.

Definition (Matrice inverse et pseudo-inverse)

Une matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B et une matrice-unité I telles que $AB = BA = I$. S'il en est ainsi, B est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Opérations élémentaires sur les matrices

Proposition

- Une **condition nécessaire** pour qu'une matrice A soit inversible est que A soit carrée.
- Soit A une matrice carrée inversible, son inverse A^{-1} est unique, et est une matrice carrée du même ordre, inversible et $((A^{-1})^{-1} = A$.
- Une matrice carrée inversible A est **régulière** (i.e. $AB = AC \Rightarrow B = C$ et $BA = CA \Rightarrow B = C$) ; une matrice carrée non-inversible est dite **singulière**.
- Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre, alors la matrice produit AB est inversible et $(AB)^1 = B^{-1}A^{-1}$. .

Opérations élémentaires sur les matrices

Definition (Le déterminant d'une matrice)

On appelle déterminant d'une matrice A carrée, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le nombre noté $det(A)$ ou $|A|$ et égal à :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} * det(A_i)$$

où A_i est la matrice obtenue en rayant la 1$^{\text{ère}}$ colonne et la i-ième ligne.

Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice

- On calcule le déterminant $det(A)$ de la matrice A ;
- On transpose la matrice A. Elle devient A^T ;
- Pour chaque élément de la matrice A^T, on calcule le mineur associé. Le mineur est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne auxquelles appartient l'élément.
- On associe à chacun de ces mineurs, 1 signe donné par $(-1)^{i+j}$; i étant le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne de l'élément envisagé. L'ensemble $(signe) * (mineur)$ constitue les cofacteurs de la matrice A^T.
- Il suffit maintenant de remplacer tous les éléments de la matrice A^T par les cofacteurs (on obtient alors une matrice A^C) et de diviser par $det(A)$ pour obtenir l'inverse de la matrice A.

$$A^{-1} = \frac{A^C}{det(A)}$$

Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice

Definition (Matrice inverse et pseudo-inverse)

Deux matrices A et B sont inverses si leur produit est égal à la matrice identité : $AB = I$, alors $B = A^{-1}$. Les matrices inverse, et plus généralement les pseudo-inverses, trouvent leurs applications à la résolution des systèmes d'équations linéaires quelles que soient leurs dimensions :

$$y = Ax$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur cherché, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des connaissances.
L'inverse généralisée d'un tel système est noté A^+.

Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice

Conditions

L'inverse généralisée A^+ satisfait les conditions suivantes :

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^T = AA^+$ Condition de symétrie
4. $(A^+A)^T = A^+A$

Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice

La solution d'un système linéaire

La solution d'un système linéaire à partir de la pseudo-inverse A^+ s'écrit alors : $x = A^+y$. La résolution d'un tel système met en évidence trois cas. Selon les dimensions m et n , on définira les matrices inverse, pseudo-inverse à gauche et pseudo-inverse à droite. La matrice inverse est la solution d'un problème qui possède autant d'inconnues (variables à déterminées) que de contraintes. Cela ne signifie pas pour autant qu'il existe une solution.

Rang d'une matrice

Definition (Rang)

Le rang d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (ajout à une colonne - resp. une ligne - une combinaison linéaire des autres colonnes - resp. lignes) d'une matrice ne modifient pas le rang.

Rang d'une matrice

Exemple 1 :

Soit la matrice suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Le rang de A est 2 :

- A est d'ordre 2×3 donc $s \leqslant min\{2;3\}$ soit $s = 0$; 1 ou 2 ;
- Comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul,

On ne peut pas conclure ;

- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

Rang d'une matrice

Exemple 2 :

Soit la matrice suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- A est d'ordre 3×3 donc $s \leqslant 3$,
- le déterminant de A est 0 donc $s \neq 3$,
- le déterminant de la sous-matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ est 5, donc $s = 2$.

Plan

La Méthode du Simplexe sous forme matricielle

La Méthode du Simplexe sous forme matricielle

L'objectif de la programmation linéaire (P.L.) est de trouver la valeur optimale d'une fonction linéaire sous un système d'équations d'inégalités de contraintes linéaires. La fonction à optimiser est baptisée "fonction économique" (utilisée en économie dans le cadre d'optimisations) et on la résout en utilisant une méthode dite "**méthode simplexe**".

La Méthode du Simplexe sous forme matricielle

Dans cette section on va voir la forme matricielle de la méthode du simplexe.
De façon générale, Le problème linéaire est dans la forme suivante :

$$Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$S.C \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant ou \geqslant ou = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant ou \geqslant ou = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant ou \geqslant ou = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

forme canonique matricielle

Le programme linéaire s'écrit sous forme canonique matricielle :

$$Max\ Z(x) = c^T.x$$
$$S.C \begin{cases} A.x \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

Avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Forme générale d'un programme linéaire

Proposition

Chaque programme linéaire sous forme canonique peut s'écrire sous forme standard et inversement.

Forme générale d'un programme linéaire

Preuve

($\Rightarrow$) Considérons le programme linéaire dans l'équation 1 écrit sous sa forme canonique.
On a

$$Ax \leqslant b, x \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, m,\ x \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i,$$

$$ou\ e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = 1, \cdots, m,\ x \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A\ I_m)}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} = b,\ \tilde{x} \geqslant 0$$

Forme générale d'un programme linéaire

Preuve

On pose alors $Z(x) = \tilde{c}^T \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ où $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = (c_1 \cdots c_n, 0 \cdots 0)$ et le programme linéaire (écrit sous sa forme canonique) est strictement équivalent au programme linéaire suivant (écrit sous sa forme standard) :

$$\begin{cases} Max\ Z(\tilde{x}) = \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b,\ \tilde{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

Preuve

($\Leftarrow$) Soit $Ax = b$ un programme linéaire donné sous sa forme standard.

On a

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leqslant b \\ Ax \geqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leqslant b \\ (-A)x \leqslant -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

Si on pose $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ et $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, l'inégalité précédent implique qui est bien un programme linéaire sous forme canonique.

Forme générale d'un programme linéaire

Exemple 1 :

On considère le programme linéaire suivant.
On rappelle sa forme canonique et sa forme standard :

$$Max\ Z(x,y,z) = 3x+5y+6z \qquad Max\ Z(x,y,z,e_1,e_2,e_3) = 3x+5y+6z$$

$$S.C \begin{cases} x+2y+4z \leqslant 70 \\ 2x+y+z \leqslant 80 \\ 3x+2y+2z \leqslant 60 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad S.C \begin{cases} x+2y+4z+e_1 = 70 \\ 2x+y+z+e_2 = 80 \\ 3x+2y+2z+e_3 = 60 \\ x,y,z,e_1,e_2,e_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Forme générale d'un programme linéaire

Exemple 1 :

Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forme générale d'un programme linéaire

Exemple 1 :

Le programme s'écrit sous les formes canonique et standard matricielles suivantes :

$$\begin{cases} Max\ Z(x) = c^T x \\ Ax \leqslant b, x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ Z(\tilde{x}) = \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b, \tilde{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

On utilisera dorénavant la forme standard matricielle et on posera $A = \tilde{A}, x = \tilde{x}$ et $c = \tilde{c}$.

Représentation matricielle

Definition (Représentation matricielle)

- On appelle base une sous-matrice régulière de A. Il faut que la matrice $A(m, n)$ soit de rang m.
- Une solution de base est obtenue en posant $n - m$ variables égales à 0, et en résolvant par rapport aux m variables restantes, qui sont les variables de base (VDB).
- Les $n - m$ variables à 0 sont les variables hors base (VHB). Des choix différents de VHB donnent lieu à différentes solutions de base.

Représentation matricielle

Les colonnes de A permettant à une sous-matrice B de A d'être régulière et qui représentent des variables particulières peuvent commuter si on ordonne correctement x et c^T.

On peut alors écrire : $A = (BE)$, $x = \begin{pmatrix} x_b \\ x_e \end{pmatrix}$, et $c^T = (c_b^T \ c_e^T)$.

et ainsi

$$\begin{cases} Max\ ou\ Min\ Z(x) = c^T x \\ Ax \leqslant b, x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ ou\ Min\ Z(x) = c_b^T x_b + c_e^T x_e \\ Bx_b + Ex_e = b, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Une solution de base est donc telle que :

$$\begin{cases} x_e = 0 \\ Bx_b = b \Leftrightarrow x_b = B^{-1} b \end{cases} \tag{2}$$

Certains choix de variables peuvent ne pas générer de solution de base.

Représentation matricielle

Definition (SBR)

Une solution de base est dite réalisable (SBR) si
$x_b = B^{-1}b \geqslant 0$.
Si le vecteur x_b contient des termes nuls, on dira que cette solution est une solution de base dégénérée.

Remarque

Lorsque les coefficients b_i sont positifs ou nuls, on obtient systématiquement une solution de base réalisable en mettant les variables du problème initial hors base (donc nulles) et les variables d'écart dans la base et égales aux b_i.

Représentation matricielle

Exemple 2.

Illustrons ces définitions à l'aide du programme linéaire (déjà exprimé sous forme standard) de l'exemple précédent :

$$Max\ Z(x, y, z, e_1, e_2, e_3) = 3x + 5y + 6z$$

$$S.C \begin{cases} x + 2y + 4z + e_1 = 70 \\ 2x + y + z + e_2 = 80 \\ 3x + 2y + 2z + e_3 = 60 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

On peut dresser le tableau 1 avec $n = 6, m = 3$:

Représentation matricielle

Table – Bases et réalisabilité de la SBR associée

N	VDB	VHB	Rang(A)	Solution de base	Réalisabilité
1	x, y, z	e_1, e_2, e_3	3	(100 ,-255 ,105)	$\ngtr 0$
2	x, y, e_1	z, e_2, e_3	3	(100 ,-120 ,210)	$\ngtr 0$
3	x, y, e_2	z, e_1, e_3	3	(-5 , 37.5 , 52.5)	$\ngtr 0$
4	x, y, e_3	z, e_1, e_2	3	(30 ,20 ,-70)	$\ngtr 0$
5	x, z, e_1	y, e_2, e_3	3	(100 ,-120 ,450)	$\ngtr 0$
6	x, z, e_2	y, e_1, e_3	3	(10 ,15 ,45)	réalisable
7	x, z, e_3	y, e_1, e_2	3	(35.71 ; 8.57 ,-64.28)	$\ngtr 0$
8	y, z, e_1	x, e_2, e_3	3	Pas de solution	
9	y, z, e_2	x, e_1, e_3	3	(25 ,5 ,50)	réalisable
10	y, z, e_3	x, e_1, e_2	3	(125 ,-45 ,-100)$\ngtr 0$	
11	e_1, e_2, e_3	x, y, z	3	(70 ,80 ,60)	réalisable
12	x, e_1, e_2	y, z, e_3	3	(20 ,80 ,60)	réalisable
13	x, e_1, e_3	y, z, e_2	3	(40 ,30 ,-60)	$\ngtr 0$
14	x, e_2, e_3	y, z, e_1	3	(70 ,-60 ,-150)	$\ngtr 0$
15	y, e_1, e_2	x, z, e_3	3	(30 ,10 ,50)	réalisable
16	y, e_1, e_3	x, z, e_2	3	(80 ,-90 ,-100)	$\ngtr 0$
17	y, e_2, e_3	x, z, e_1	3	(35 ,45 ,-10)	$\ngtr 0$
18	z, e_1, e_2	x, y, e_3	3	(30 ,-50 ,50)	$\ngtr 0$
19	z, e_2, e_3	x, y, e_2	3	(17.5, 62.5 ,25)	réalisable
20	z, e_1, e_3	x, y, e_1	3	(80 ,-250 ,-100)	$\ngtr 0$

Représentation matricielle

Exemple 2

Intéressons-nous au nombre de solutions possibles en général :

- le nombre de bases candidates est

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

(on a bien testé $C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20$ bases dans l'exemple précédent).

Toutes les bases candidates ne sont pas inversibles, donc on peut seulement dire que le nombre précédent est une borne supérieure (dans notre exemple, on trouve 19 bases inversibles).

Représentation matricielle

Exemple 2

- Une méthode basée sur l'exploration des points extrêmes est cependant non-polynomiale (on comprend bien qu'on ne peut appliquer pour m grand la technique qui nous a permis, pour l'exemple précédent, de récupérer le tableau 1, à savoir la résolution de 21 systèmes de taille 3×3)
- L'expérience montre que pour un problème de n variables à m contraintes, la solution optimale est trouvée en moyenne en moins de $3m$ opérations (ce qui signifie pour notre exemple, qu'on doit pouvoir trouver la solution du PL en moins de 9 itérations).

Représentation matricielle

Definition (SBR Adjacentes)

Pour tout problème de PL, deux SBR sont adjacentes si leurs ensembles de variables de base ont $m-1$ variables de base en commun.
L'interprétation géométrique est que les deux SBR sont situées le long d'une même arête sur le polygone réalisable.

Description générale de l'algorithme

Description générale de l'algorithme.

L'algorithme du simplexe (pour une maximisation) suit les étapes suivantes :

1. Trouver une SBR pour le PL, appelée la SBR initiale.
2. Déterminer si la SBR courante est optimale. Sinon, trouver une SBR adjacente qui possède une valeur Z plus élevée.
3. Retourner au point 2. avec la nouvelle SBR comme SBR courante.

Les deux questions suivantes sont donc :
$\mapsto$ comment détecter l'optimalité ? et
$\mapsto$ comment se déplacer ?

Description générale de l'algorithme

Pour répondre à ces questions, on écrit :

$$Z = c_b^T x_b + c_e^T x_e \text{ et } Bx_b + Ex_e = b$$

Donc, puisque $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est de range m, B est inversible et $x_b = B^{-1}(b - Ex_e)$.

Par substitution, on obtient

$$Z = c_b^T B^{-1} b + (c_e^T - c_b^T B^{-1} E)x_e = c_b^T B^{-1} b + \bar{c}_e^T x_e$$

en posant

$$\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E.$$

Description générale de l'algorithme

Description générale de l'algorithme

Le terme $\bar{c}_e^T$ correspond à l'augmentation du coût pour une augmentation des variables dans x_e.
Pour une SBR, on a $x_e = 0$ et donc, ce terme n'a pas d'incidence.

- Si tous les coûts ce sont négatifs (pour une maximisation), toute augmentation des variables de x_e diminuera la valeur de Z, et donc la solution obtenue est optimale.
- Réciproquement, pour une minimisation, si tous les coûts sont positifs, toute augmentation des variables de x_e augmentera la valeur de Z.

On a donc répondu à la première question, relative au test d'optimalité.

Description générale de l'algorithme

Description générale de l'algorithme

Pour une maximisation, si notre base est telle que $\bar{c}_e^T$ ne soit pas strictement négative ou nulle, alors il existe une variable $(x_e)_k = x_k$ de x_e telle que $(\bar{c}_e^T)_k = c_k > 0$.
Une augmentation de x_k est donc susceptible d'améliorer Z.
C'est bien-sûr le critère de Dantzig qui va désigner cette variable.
La solution va alors s'écrire :

$$x_b = B^{-1}(b - x_k A_k - E' x'_e).$$

Où A_k désigne la k^{e} colonne de A en fixant $x'_e = 0$, et en faisant varier x_k seulement, on obtient :

$$x_b = B^{-1}(b - x_k A_k) = B^{-1}b - B^{-1}x_k A_k = \bar{b} - P x_k.$$

Description générale de l'algorithme

Comme originellement x_k est nulle, on ne peut que l'augmenter.

Il y a deux cas :

- Cas 1 : $\forall i, P_i \leqslant 0$ en ce cas la solution est non bornée. (x_k tend vers $+\infty$ et Z vers $-\infty$.)
- Cas 2 : il y a 2 possibilités : pour chaque i
  1. Soit $P_i \leqslant 0$ et donc $(x_b)_i \geqslant 0$ pour tout $x_k \geqslant 0$: on ne peut pas utiliser cette variable.
  2. Soit $P_i > 0$ et dons ce cas, $(x_b)_i \geqslant 0$ pour tout $x_k \leqslant \frac{\bar{b}_i}{P_i}$. Ainsi, pour tout $P_i > 0$ il existe une valeur maximale de $x_k \leqslant \frac{\bar{b}_i}{P_i}$, permettant $x_b \geqslant 0$. on choisit donc la variable k telle que $k = \underset{i/P_i>0}{arg\ min}(\frac{\bar{b}_i}{P_i})$.

Exemple avec solution optimale unique

Exemple avec solution optimale unique

Reprenons l'exercice de l'exemple 1 précédent :

$$Max\ Z(x,y,z,e_1,e_2,e_3) = 3x + 5y + 6z$$
$$S.C \begin{cases} x + 2y + 4z + e_1 = 70 \\ 2x + y + z + e_2 = 80 \\ 3x + 2y + 2z + e_3 = 60 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Forme générale d'un programme linéaire

Exemple 1 :

Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \tilde{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$c_e^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, et $c_b^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple avec solution optimale unique

1^{er} itération :

On choisit comme base initiale $VDB = (e_1, e_2, e_3)$. On a dans ce cas

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = B^{-1}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Les coûts réduits définis par $\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$

$$\bar{c}_e^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sont égaux à

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline c_e^T = & (3 & 5 & 6) \end{array}$$

Le critère de Dantzig implique que la variable z entre en base.

1er itération :

- On a $P = B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on calcule en suit les rations $\frac{\bar{b}_i}{P_i}$:

	e_1	e_2	e_3
$\frac{\bar{b}_i}{P_i}$	$\frac{70}{4} = 17.5$	$\frac{80}{1} = 80$	$\frac{60}{2} = 30$

On en déduit que la variable sortante est e_1.

Exemple avec solution optimale unique

2e itération :

On a maintenant la base $VDB = (z, e_2, e_3)$. On a alors

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 62.5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\bar{b}$ est défini dans la ligne 19 du tableau 1.

Exemple avec solution optimale unique

2^e^ itération :

La base $VDB = (z, e_2, e_3)$. On a alors

$$c_e^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } c_b^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les coûts réduits sont égaux à $\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$

$$\bar{c}_e^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sont égaux à

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & e_1 \\ \hline \bar{c}_e^T = & (\frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2}) \end{array}$$

Le critère de Dantzig implique que la variable y entre en base.

Exemple avec solution optimale unique

2^e itération :

- On a $P = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

  on calcule en suit les rations $\frac{\bar{b}_i}{P_i}$:

	z	e_2	e_3
$\frac{\bar{b}_i}{P_i}$	35	125	25

On en déduit que la variable sortante est e_3.

3e itération :

On a maintenant la base $VDB = (z, e_2, y)$. On a alors

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 25 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3e itération :

La base $VDB = (z, e_2, y)$. On a alors

$c_e^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $c_b^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

On remarque que $\bar{b}$ est défini dans la ligne 9 du tableau 1.

- Les coûts réduits sont égaux à $\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$

$$\bar{c}_e^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont égaux à

$$\begin{array}{cccc} & x & e_3 & e_1 \\ \hline c_e^T = & (-\frac{7}{2} & -2 & -\frac{1}{2}) \end{array}$$

L'algorithme s'arrête car tous les poids sont négatifs. On a donc trouvé l'optimum.

Exemple avec solution optimale unique

Résume la solution :

- La solution est constituée des variables de base y, z, e_2.
- Les valeurs de ces variables sont données respectivement par $(y, z, e_2) = (25, 5, 50)$.
- Toutes les autres valeurs sont égales à 0.
- La fonction de coût vaut donc : $Z = 3 * 0 + 5 * 25 + 6 * 5 = 155$.

Questions ?