Cours Programmation Linéaire.

Chapitre IV : Méthodes Duales en Programmation Linéaire

Dr. Ali Dabba

8 septembre 2023

Année universitaire 2023 – 2024

Plan

Plan

Introduction

Introduction

A tout programme linéaire, appelé par convention PL **Primal**, on peut associer un autre PL appelé son **Dual**.
Dans ce chapitre, on va étudier des notions relatives aux programmes linéaires tels que le programme primal, le programme dual, et l'utilisation pratique **des conditions d'optimalité primal-dual (COPD)**.

Plan

Dualité

Dualité

Avant de donner la définition formelle d'un problème dual, nous allons expliquer comment il s'explique en termes de problème de production.

Dualité

Problème de la production : Deux produits P1 et P2 fabriques en quantité x_1 et x_2, nécessitant trois ressources disponibles en quantités données. L'entreprise cherche à maximiser le bénéfice total provenant de la vente des 2 produits :

$$Max\ Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 55 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Dualité

Dualité

Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources de l'entreprise. Il propose à l'entreprise les prix unitaires y_1, y_2, y_3 pour chacune des ressources.

- L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient pour chaque produit un prix de vente au moins égal au profit qu'elle ferait en vendant ses produits.
- De son côté, l'acheteur cherche à minimiser ses dépenses.

Dualité

Dualité

Quels prix unitaires y_1, y_2, y_3 l'acheteur doit-il proposer à l'entreprise en question pour qu'elle accepte de vendre toutes ses ressources ?

Donc le programme linéaire correspondant est le suivant :

$$Min\, G(y_1, y_2, y_3) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3$$
$$S.C \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geqslant 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 4 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Définition (Problème primal et dual)

Définition (Problème primal et dual)

La forme d'un programme linéaire de type maximisation est :

$$Max\ Z(x) = c^T.x$$
$$S.C \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

Avec x, b, et c des vecteurs de dimensions respectives n, m, n, et A une matrice de dimension (m, n)

Définition (Problème primal et dual)

Définition (Problème primal et dual)

On appelle programme dual de (PL), le programme linéaire suivant :

$$Min\, G(x) = b^T.y$$
$$S.C \begin{cases} A^T.y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

Avec y un vecteur de dimension m et A^T la transposée de la matrice A. Le programme de l'équation 1 est appelé programme Primal (PL).

Définition (Problème primal et dual)

Définition (Problème primal et dual)

Pour passer du primal au dual, on remarque que :

1. Les termes du second membre deviennent les coefficients de la fonction objectif et réciproquement.
2. Le problème de maximisation devient un problème de minimisation.
3. Les inégalités "$\leqslant$" deviennent des inégalités "$\geqslant$".

Définition (Problème primal et dual)

Résume

La matrice A se transforme en sa transposée.
Dans ce contexte, (PL) est appelé problème primal de le problème dual (PLD). Remarquons que, si (PL) comporte n variables et m contraintes, alors (PLD) comporte m variables et n contraintes (une variable par contrainte de (PL), et une contrainte par variable de (PLD)).

Définition (Problème primal et dual)

Proposition

Le dual du dual est le primal.

Preuve

Dual d'un (PL) sous forme canonique pure :

$$(PLD)\quad \begin{array}{l} Min\, G(y) = b^T y \\ S.C \begin{cases} A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Max\, -G(y) = (-b)^T y \\ S.C \begin{cases} -A^T y \leqslant -c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

On prend le dual du dual :

$$\begin{array}{l} Min\, [(-c)^T x] \\ S.C \begin{cases} (-A^T)^T x \geqslant -b \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Max\, [c^T x] \\ S.C \begin{cases} Ax \leqslant b \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \quad (PL)$$

Définition (Problème primal et dual)

Question ?

Existe-t-il une relation entre les valeurs optimales de (PL) et de (PLD) ? Le théorème suivant apporte une première réponse à cette question.

Définition (Problème primal et dual)

Theorem (Théorème faible de dualité)

Soit x une solution réalisable d'un (PL) sous forme canonique mixte et y une solution réalisable du problème dual (PLD). Alors :

1. $Z(x) \leqslant G(y)$.
2. *Si $Z(x) = G(y)$ alors x et y sont des solutions optimales de (PL) et (PLD) respectivement.*

Définition (Problème primal et dual)

Preuve

On suppose (PL) mis sous forme standard.
S'il existe une solution réalisable optimale, alors il existe une **solution de base** réalisable optimale

$$x_{B^*} = A_{B^*}^{-1} b.$$

On choisit alors

$$y^* = (A_{B^*}^{-1})^T C_{B^*}$$

Définition (Problème primal et dual)

Preuve

On montre que y^* est une solution réalisable optimale pour le dual (PLD).

- Avec $y^* = (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*}$, on a
  $A_{H^*}^T y^* = A_{H^*}^T (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*} = (A_{B^*}^{-1} A_{H^*}^T)^T c_{B^*} = c_{H^*} - L_{H^*}$
  Or, à l'optimum $L_{H^*} \leqslant 0$ donc $A_{H^*}^T y^* \geqslant c_{H^*}$. Puisque
  $$A_{B^*}^T y^* = c_{B^*},$$
  On a
  $$A^T y^* \geqslant c$$
  $y*$ de signe quelconque. i.e. est une solution réalisable du dual (PLD) (pas de contrainte de positivité sur les variable y du dual).
- $Z(x^*) = c^T x^* = c_{B^*}^T A_{B^*}^{-1} b = ((A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*})^T b = G(y^*)$
  Théorème faible de dualité $\Rightarrow$ y^* est optimal pour (PLD).

Lien primal/dual

Rappel

Trois (3) cas possibles (et seulement 3) pour le problème primal (PL) :

1. Il existe (au moins) une solution optimale.
2. l'ensemble D_R des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.
3. pas de solution réalisable ($D_R = \emptyset$).

Lien primal/dual

Theorem

Étant donnés un problème primal (PL) et son dual (PLD), une et une seule des trois situations suivantes a lieu

1. *les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).*
2. *un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.*
3. *aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.*

Lien primal/dual

Lien primal/dual

Il y a donc 3 situations (au lieu de 9) qui peuvent se résumer dans le tableau suivant :

Table – Situations Primal - Dual

		Dual		
		(1) Solution optimale	*(2) Optimum infini*	*(3) pas de solution*
Primal	*(1) Solution optimale*	(a)	impossible	impossible
	(2) Optimum infini	impossible	impossible	(b)
	(3) pas de solution	impossible	(b)	(c)

Lien primal/dual

Correspondance Primal - Dual

Min	**Max**
* Matrice des contraintes (m, n) * Second membre des contraintes * Coefficient de la fonction objectif	* Transposée de la matrice des contraintes (n, m) * Coefficient de la fonction objectif * Second membre des contraintes
Nombre de contraintes i$^{\text{ème}}$ contrainte de type « $\leqslant$ » i$^{\text{ème}}$ contrainte de type « $\geqslant$ » i$^{\text{ème}}$ contrainte de type « $=$ »	**Nombre de variables principales** i$^{\text{ème}}$ variable de type « $\geqslant$ » i$^{\text{ème}}$ variable de type « $\leqslant$ » i ème variable qcq «$\in \mathbb{R}$ »
Nombre de variables j$^{\text{ème}}$ variable « $\geqslant$ » j$^{\text{ème}}$ variable « $\leqslant$ » j$^{\text{ème}}$ variable qcq « $\in \mathbb{R}$ »	**Nombre de contraintes** j$^{\text{ème}}$ contrainte de type « $\geqslant$ » j$^{\text{ème}}$ contrainte de type « $\leqslant$ » j$^{\text{ème}}$ contrainte de type « $=$ »

Lien primal/dual

Exemple 1

Primal	**Dual**
$Max\ Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$ $S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$Min\ Z = 3y_1 + y_2 + 2y_3$ $S.C \begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 \geqslant \frac{1}{2} \\ y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$

Lien primal/dual

Exemple 2

Primal	**Dual**
$Min\ Z = -x_1 + x_2$ $S.C \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 2y_1 - 2y_2 + 5y_3$ $S.C \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leqslant -1 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$

Lien primal/dual

Exemple 3

Primal	**Dual**
$Max\ Z = 2x_1 - x_2$	$Min\ Z = 3y_1 + 4y_2$
$S.C \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$S.C \begin{cases} y_1 + y_2 \geqslant 2 \\ -y_1 \geqslant -1 \\ y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$

Lien primal/dual

Exemple 4

Primal	**Dual**
$\begin{array}{l} Max\ Z = 2x_1 - x_2 \\ S.C \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}$	$\begin{array}{l} Min\ Z = 2y_1 + 6y_2 - 5y_3 \\ S.C \begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ -2y_1 + y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

Cas (a) où les problèmes primal et dual possèdent chacun des solutions optimales (optimum fini).

Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

Theorem

Soient x et y des solutions réalisables respectivement du problème primal (PL) et du problème dual (PLD). Alors x et y sont des solutions réalisables optimales si et seulement si les conditions d'optimalité primal-dual (COPD) suivantes sont vérifiées :

1. *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'***inégalité stricte** *dans (PL) (resp. (PLD)) alors la variable correspondante de (PLD) (resp. (PL)) est nulle.*
2. *Si la valeur d'une variable dans (PL) ou (PLD) est* **strictement positive** *alors la contrainte correspondante de l'autre programme est* **une égalité**.

Problème primal sous forme canonique mixte

Problème primal sous forme canonique mixte

x et y sont deux solutions optimales pour le problème primal et le problème dual respectivement si et seulement si on a les

COPD : $\begin{cases} \forall i \in I_1, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \; ou \; y_i = 0 \\ \forall j \in J_1, \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \; ou \; x_j = 0 \end{cases}$

Preuve de la condition nécessaire du Théorème des COPD.

On suppose le problème primal (PL) mis sous forme canonique pure.

Soient x et y des solutions réalisables optimales de (PL) et (PLD) respectivement : $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$ et $A^T y \geqslant b, y \geqslant 0$

Variables d'écart e et ϵ respectivement pour (PL) et (PLD) :

$$\begin{cases} Ax + e = b \\ x \geqslant 0, e \geqslant 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} A^T y - \epsilon = c \\ x \geqslant 0, \epsilon \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z(x) = c^T x = (A^T y - \epsilon)^T x = y^T A x - \epsilon^T x$$

$$\Rightarrow G(x) = b^T y = (A^T x - e)^T y = y^T A y - e^T y$$

Preuve de la condition nécessaire du Théorème des COPD.

Théorème de la dualité fort $\Rightarrow Z(x) = G(y) \Rightarrow \epsilon^T x + e^T y = 0$

Puisque $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, la relation $\epsilon^T x + e^T y = 0$ donne

$$\begin{cases} \epsilon_i x_i = 0 \ \forall i \\ e_j y_j = 0 \ \forall j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Si\ \epsilon_i \neq 0\ alors\ x_i = 0 \\ Si\ x_i \neq 0\ alors\ \epsilon_i = 0 \end{cases}$$

$$et \quad \begin{cases} Si\ e_j \neq 0\ alors\ y_j = 0 \\ Si\ y_j \neq 0\ alors\ e_j = 0 \end{cases}$$

Réciproque (condition suffisante) à partir du Théorème faible de dualité.

Utilisation pratique des COPD

Utilisation pratique des COPD

Elles permettent de vérifier si une solution réalisable d'un (PL) est optimale ou non, à partir de la connaissance d'une solution optimale du problème dual. x^* et y^* solutions réalisables optimales de (PL) et (PLD) respectivement.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_i^* < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i \\ x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j \end{cases}$$

Utilisation pratique des COPD

Exemple

Problème de production

$$(PL) \quad \begin{array}{l} Max\ Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \\ S.C \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 55 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

$$(PLD) \quad \begin{array}{l} Min\ G(y_1, y_2, y_3) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3 \\ S.C \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geqslant 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 4 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Utilisation pratique des COPD

Solution optimale de (PL) :

$$e_1^* = 27/2 > 0 \overset{COPD}{\Rightarrow} y_1^* = 0$$
$$x_1^* = 15/2 > 0 \overset{COPD}{\Rightarrow} 3y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* = 6 \ (\epsilon_1^* = 0)$$
$$x_2^* = 5 > 0 \overset{COPD}{\Rightarrow} 9y_1^* + 5y_2^* + y_3^* = 4 \ (\epsilon_2^* = 0)$$
$$e_2^* = e_3^* = 0$$

$\Rightarrow$ Solution optimale du problème dual

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 1/3, \quad y_3^* = 7/3$$

Questions ?