Chapitre 5

Exercices d'application

5.1 Série N=01 : Formulation d'un programme linéaire (PL)

Exercice 01 :

Lesquelles des contraintes suivantes (ou leurs équivalentes) peuvent êtres utilisées dans un programme linéaire :

$x_1 + x_2 \leqslant 20$; $3x_1 + 7x_2 < 5$; $x_1^2 + x_1x_2 = 15$; $\sqrt{2x_1} + x_2 = 40$; $\sqrt{3x_1 + 2x_2} \leqslant 12$; $\frac{5x_1}{x_1+x_2} \leqslant 4$

Exercice 02 :

Un pépiniériste propose à un grand magasin des sapins sous deux conditionnements différents :

- les uns avec motte de terre, pesant 3 kg, au prix de 9 € l'un
- les autres sans motte, pesant 9 kg, au prix de 6 € l'un. Le pépiniériste n'accepte que les commandes d'au moins 400 sapins de chaque type.

Le transporteur dispose d'un camion dont la charge ne peut pas dépasser 21 600 kg, il n'assure la livraison que si elle est d'au moins 2 000 arbres. Le magasin dispose de 22 800 € au maximum pour approvisionner son rayon sapins. On appelle x le nombre de sapins avec motte et y le nombre de sapins sans motte que le grand magasin commande.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Nombre de sapins	Poids	Prix à l'achat
Avec motte :	x	3x	?
Sans motte :	y	?	?
Total :	?	?	?

2) Expliquer chaque ligne du système de contraintes ci-dessous : x et y entiers tels que

$$\begin{aligned}
&x \geqslant 400\\
&y \geqslant 400\\
&x + y \geqslant 2000\\
&x + 3y \leqslant 7200\\
&3x + 2y \leqslant 7600
\end{aligned}$$

Exercice 03 : (Un problème de restauration)

Un restaurateur peut offrir deux types de plats indifféremment. Des assiettes à 80 DA, contenant 05 sardines, 2 merlans et 01 rouget.

Des assiettes à 120 DA, contenant 03 sardines, 03 merlans et 03 rougets. Il dispose de 30 sardines, 24 merlans et 18 rougets.

Comment doit-il disposer pour réaliser la recette maximale ?

Exercice 04 : (Préparation de Gâteaux)

Un boulanger a la possibilité de faire trois types de gâteaux G1, G2 et G3. Il utilise à cet effet de la farine (E1), du beurre (E2), des œufs (E3), du sucre (E4) et de la levure (E5). Les quantités a_{ij} de l'élément E_i intervenant dans l'élaboration du gâteau G_j sont données dans le tableau ci-dessous :

	G1	G2	G3
E1	1	1	2
E2	1	2	1
E3	2	1	1
E4	1	2	0
E5	1	2	2

Le boulanger dispose de 20 unités de E1, 10 de E2, 20 de E3, 20 de E4 et 10 de E5.

Les bénéfices unitaires valent respectivement 2 pour G1, 5 pour G2 et 7 pour G3.

Écrire le programme linéaire qui détermine le nombre de gâteaux à confectionner de façon à maximiser le bénéfice total.

Exercice 05 : (Problème de découpe)

Une usine a reçu des plaques de métal d'une largeur de 200 cm et d'une longueur de 500 cm. Il faut en fabriquer au moins 30 plaques de largeur de 110 cm, 40 plaques de largeur de 75 cm et 15 plaques de largeur de 60 cm.

Donner le modèle mathématique pour que les déchets soient les plus petits possibles.

Exercice 06 :

Une usine fabrique trois sortes de pièces (P1, P2, P3) à l'aide de deux machines (M1, M2). Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent et pendant les temps suivants (en minutes)

Machines	**Temps d'usinage (minutes par pièce)**		
	P1	P2	P3
M1	2	4	3
M2	6	12	3

La machine M1 est disponible 8 heures, la machine M2 est disponible 10 heures. Le profit réalisé sur une pièce P1 est de 50 DA, sur une pièce P2 est de 80 DA, celui réalisé sur une pièce P3 est de 60 DA.

Combien doit-on fabriquer de pièces P1, P2 et P3 pour avoir un profit total maximum ? Donner un modèle mathématique du problème.

Exercice 07 : (Problème de nutrition)

On se propose de fournir quotidiennement et à chaque individu d'une population un minimum de 70 g de protéines, 3000 unités de calories, 800 mg de calcium et 12 mg de fer. Les produits disponibles sont le pain, le beurre, le fromage, les pois et les épinards. Les prix par 100 g de ces produits sont respectivement de 5, 34, 40, 10 et 5 DA. Le problème est de constituer, aux moindres frais, des rations quotidiennes respectant les exigences du régime imposé.

Les quantités de protéines (en g), de calories (en unités), de calcium (en mg) et de fer (en mg) par 100 g de ces aliments sont donnés dans le tableau suivant :

	Protéines	Calories	Calcium	Fer
Pain	10	300	50	4
Beurre	30	1800	400	-
Formage	35	800	450	-
Pois	20	1500	750	4
Epinards	25	300	120	15

Exercice 08 :

Une usine possède trois tours, qui au cours d'un mois, peuvent être utilisés pendant les temps indiqués dans le tableau ci-dessous. Quatre pièces peuvent être usinées sur ces machines. Les quantités de chaque pièce à fabriquer au cours du mois sont fixées de façon impérative et sont indiquées dans le tableau. Le temps d'usinage en heures par pièce figurent également.

Tours	Temps d'usinage (heures par pièces)				Heures de disponibilité des machines
	I	II	III	IV	
A	3	3	2	5	80
B	4	1	1	2	30
C	2	2	3	1	130
Production exigées (nombre au moins de pièces)	10	40	50	20	

1) Écrire un programme linéaire pour réduire au minimum l'utilisation des machines.
2) Quel sera le programme d'affectation de diverses fabrications aux diverses machines.

5.2 Série N=02 : Interprétation géométrique de la programmation linéaire

Exercice 01 :

On considère le programme linéaire suivant :

$$Max\ Z = 2x_1 + 6x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Tracer les contraintes et déterminer la région réalisable.
2) La région réalisable comporte combien de points extrêmes ?
3) Déterminer la solution optimale avec la méthode graphique.
4) Quelles sont les contraintes qui sont satisfaites

Exercice 02 :

On considère le programme linéaire suivant :

$$Min\ Z = 4x_1 + 2x_2$$
$$S.C \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 7 \\ x_1 + 6x_2 \geqslant 9 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la solution optimale avec la méthode graphique.
2) Est-ce que la solution optimale est unique ?

Exercice 03 :

On considère le programme linéaire suivant :

$$Max\ Z = 4x_1 + 6x_2$$
$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 12 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Tracer les contraintes et déterminer la région réalisable.
2) Combien existe-t-il de points extrêmes ?
3) Peut-on déterminer une solution optimale finie au programme linéaire ?

Exercice 04 :

Le conseil municipal d'une commune décide d'améliorer son jeu d'effets lumineux en vue des fêtes de fin d'année. Il lui faudra au moins 800 m de guirlandes lumineuses pour la rue principale, au moins " 12 étoiles des neiges " pour les carrefours stratégiques et au moins 8 " sapins de Noël " pour les artères commerçantes.

L'entreprise Fiesta propose le lot A constitué de 100 mètres de guirlandes, 2 " étoiles des neiges ", 2 " sapins de Noël " au prix de 700 €.

L'entreprise Réveillon propose le lot B constitué de 200 mètres de guirlandes, 2 " étoiles des neiges ", 1 " sapin de Noël " au prix de 980 €.

On se propose de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale.

$$Max\ Z = 2x_1 + 6x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) (a) déterminer un système d'inéquations qui traduise les contraintes du problème.
   (b) démontrer que ce système équivaut au système suivant :

$$\begin{aligned} &x \geqslant 0 \\ &x + 2y \geqslant 0 \\ &x + y \geqslant 8 \\ &x + y \geqslant 6 \\ &2x + y \geqslant 8 \end{aligned}$$

   (c) À tout couple (x , y) on associe le point M de coordonnées (x , y) dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 2cm). déterminer graphiquement la région du plan contenant les points M dont les coordonnées vérifient le système.
2) A l'aide du graphique déterminer si les commandes suivantes satisfont les contraintes :
   (a) Commande C1 : 7 lots A et 1 lot B ;
   (b) Commande C2 : 3 lots A et 2 lots B ;
   (c) Commande C3 : 6 lots A et 1 lot B ;
   On justifiera par une brève phrase les trois réponses.
3) (a) Exprimer en fonction de x et y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.
   (b) Montrer que la commande C1 occasionne une dépense de 5880 €.
   Tracer sur le graphique précédent la droite Δ correspondant à une dépense de 5880 €. A l'aide du graphique, indiquer si une dépense de 5880 €, est suffisante pour couvrir les besoins de la commune est-elle minimale.
   (c) Expliquer comment le graphique permet de déterminer la commande à passer aux deux entreprises pour que la dépense soit minimale. On notera I le point du graphique dont les coordonnées représentent le nombre de lots de chaque catégorie à commander pour que la dépense soit minimale.
   Donner les coordonnées de I et le montant de la dépense minimale.

Exercice 05 :

Une entreprise fabrique deux types de liquides A et B. Le réseau commercial ne peut pas écouler plus de 100 par mois. La fabrication du liquide A nécessité 3.5 h de travail et celle du liquide B en nécessite 5 heures. L'entreprise dispose au maximum de 452 h par mois. Le prix de vente est de 900 € pour un litre de A et de 1000 € pour un litre de B. On désigne par x la production mensuelle de liquide A et par y la production mensuelle de liquide B, x et y exprimes en litres.

On se propose de déterminer la production mensuelle de A et de B qui donnera un chiffre d'affaire maximal.

1) Déterminer le système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes de ce problème.
2) Dans le plan (P), montrer le domaine des contraintes.

3) Exprimer en fonction de x et de y, le chiffre d'affaire mensuel réalise par la vente de x litres de A et y litres de B. Expliquer pourquoi, nous pouvons avoir la solution en résolvant :

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ 3.5x + 5y &= 452 \end{aligned}$$

Résoudre ce système et calculer alors le chiffre d'affaire maximal.

5.3 Série N=03 : Méthodes du Simplexe (tableaux & matricielle)

Exercice 01 :

On considère le programme linéaire ci-dessous écrit sous sa forme canonique :

$$Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$$
$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 3.2x_2 + 3.5x_3 \leqslant 200 \\ 500x_1 + 1000x_2 + 2500x_3 \leqslant 120000 \\ x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \leqslant 210 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Lesquelles des solutions suivantes du programme PL sont réalisables ?
   (i) $x_1 = 40; x_2 = 10; x_3 = 10$
   (ii) $x_1 = 50; x_2 = -20; x_3 = 20$
   (iii) $x_1 = 40; x_2 = 20; x_3 = 10$
2) La solution $(x_1 = 20; x_2 = 20; x_3 = 20)$ est-elle optimale ?

Exercice 02 :

On considère le programme linéaire ci-dessous écrit sous sa forme canonique :

$$Max\ Z = 35x_1 + 45x_2 + 42x_3$$
$$(P) \quad S.C \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leqslant 120 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 120 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Résoudre (P) par la méthode du simplexe (la méthode des tableaux).
2) Résoudre (P) par la méthode du simplexe sous forme matricielle.

Exercice 03 :

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leqslant 14 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Construire une solution initiale admissible
2) Trouver la solution optimale par la méthode du simplexe

Exercice 04 :

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 10x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_3 \leqslant 6 \\ x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que le point $A = (0, 0, 3)$ est un sommet de la région réalisable.
2) Résoudre (P) par la méthode du simplexe en partant du sommet A.

3) Ayant ainsi trouvé un sommet optimal B, montrer qu'il existe un autre sommet optimal C et le déterminer.

Exercice 05 :

Résoudre le programme suivant en utilisant la méthode du simplexe

$$Max\ Z = 10x_1 + 14x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 8 \\ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\bar{x} = (12, 0)$ est un sommet de la région réalisable. Mettre le programme sous forme standard, puis donner la solution de base réalisable $\bar{y}$ associée à $\bar{x}$.
2) Résoudre ce programme par la méthode du simplexe en prenant comme point de départ $\bar{y}$.

Exercice 06 : (avec solution optimale multiple)

Une ébénisterie produit des bureaux, des tables et des chaises. Chaque type de produit réclame du bois et deux types de travaux : mise en forme et finition, suivant le tableau :

Ressource	Bureau	Table	Chaise
Planche	8m	6m	1m
Mise en forme	4h	2h	3/2h
finition	2h	3/2h	1/2h

On dispose de 48m de planches, 20 h de mise en forme et 8 h de finition.

On vend un bureau pour 60 €, une table pour 35 € et une chaise pour 20 €. La demande pour les chaises et les bureaux est illimitée, mais on ne pense vendre que 5 tables au plus. On veut maximiser le profit.

1) Formalisons le problème : soient x_1, x_2 et x_3 les variables décrivant respectivement les nombres de bureaux, de tables et de chaises.
2) Résoudre (P) par la méthode du simplexe sous forme matricielle.

5.4 Série N=04 : La Méthode du Simplexe (la méthode des variables artificielles)

Exercice 01 :

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant par l'algorithme du simplexe :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 7/3 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 02 :

Essayer de résoudre ce programme par la méthode de simplexe (choisir en cas de deux quotients égaux, celui qui se trouve dans la ligne supérieure).

$$Max\ Z = 10x_1 + 9x_2$$
$$S.C \begin{cases} 7/10x_1 + x_2 \leqslant 630 \\ 1/2x_1 + 5/6x_2 \leqslant 480 \\ x_1 + 2/3x_2 \leqslant 708 \\ 1/10x_1 + 1/4x_2 \leqslant 135 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 03 :

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant par l'algorithme du simplexe et montre que l'algorithme peut passer par un cycle. On choisit comme base initiale (x_5, x_6).

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4$$
$$S.C \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 + x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 04 :

La solution de l'exercice N=05 (Problème de découpe) (Série N°01) donné le programme linéaire suivant est

$$Min\ Z = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$
$$S.C \begin{cases} x_2 + x_3 \geqslant 30 \\ x_1 + x_2 + x_5 \geqslant 40 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 \geqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Résoudre (P) par deux méthodes différentes.

Exercice 05 :

Résoudre les problèmes linéaires suivants par la méthode des variables artificielles

$$Max\ Z = -2x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 \leqslant 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Max\ Z = x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leqslant 30 \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$Max\ Z = 2x_1 + 6x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_2 - 4x_2 \geqslant -16 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$Min\ Z = 2x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ 5x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ 3x_2 + 4x_2 \geqslant 31 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (5)$$

Exercice 06 :

Résoudre par deux méthodes du simplexe (la méthode des tableaux & sous forme matricielle) les problèmes suivants :

$$Max\ Z = -2x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 \leqslant 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Max\ Z = x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leqslant 30 \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$Max\ Z = x_1 + x_2 \quad S.C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 40 \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$Max\ Z = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \quad S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$Max\ Z = 2x_1 + x_2 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 5x_2 \geqslant 1 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ 4x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$Max\ Z = x_1 + 3x_2 - x_3 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \quad (8)$$

5.5 Série N=05 : Méthodes duales en programmation linéaire

Exercice 01 :

Formuler le problème dual de chacun des programmes linéaires suivants :

$$(P1)\quad \begin{array}{l} Max\ Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ S.C \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 80 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad (P2)\quad \begin{array}{l} Max\ Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leqslant 8 \\ x_1 \in \mathbb{R}0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

$$(P3)\quad \begin{array}{l} Min\ Z = 10x_1 + 14x_2 \\ S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 8 \\ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad (P4)\quad \begin{array}{l} Max\ Z = 400x_1 + 350x_2 + 450x_3 \\ S.C \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant 120 \\ 4x_1 + 3x_2 = 160 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geqslant 100 \\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 02 :

Appliquer le théorème des écarts complémentaires vus en cours pour vérifier l'optimalité de la solution proposée.

$$(P1)\quad \begin{array}{l} Max\ Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leqslant 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leqslant 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leqslant 1 \\ x_1, x_2, x_30, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad (P2)\quad \begin{array}{l} Max\ Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 \\ S.C \begin{cases} x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 \leqslant 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \leqslant 4 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 \leqslant 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leqslant 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leqslant 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Solution proposée (P1) : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$
Solution proposée (P2) : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Exercice 03 :

Considérons le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{l} Max\ Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ S.C \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leqslant 40 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

La solution optimale est donnée par le dictionnaire final max Z

$$\begin{array}{l} Z + 23x_2 + 7x_3 = 150 \\ S.C \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ -10x_2 - 8x_3 + e_2 = 10 \\ x_1, e \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

1) Écrivez le problème dual associé.

2) Déterminez la matrice de base optimale B. Déduisez-en la solution optimale du dual.
3) Dans quel intervalle peut varier c_1 (idem c_2, c_3) sans affecter l'optimalité de la solution ?
4) Dans quel intervalle peut varier b_1 (idem b_2) sans affecter l'optimalité de la base B ?
5) Déterminez les prix duaux.

5.6 Solution Série N=01 : Formulation d'un programme linéaire (PL)

Exercice 01 :

$x_1 + x_2 \leqslant 20\,;\, 3x_1 + 7x_2 < 5\,;\, \sqrt{3x_1 + 2x_2} \leqslant 12\,;\, \frac{5x_1}{x_1+x_2} \leqslant 4$

Exercice 02 :

1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Nombre de sapins	Poids	Prix à l'achat
Avec motte :	x	3x	**9x**
Sans motte :	y	**9y**	**6y**
Total :	**x+y**	**3x+9y**	**9x+6y**

Les sapins avec motte pèsent chacun 3kg donc au total **3x pour x sapins**.
Les sapins sans motte pèsent chacun 9kg donc au total **9y pour y sapins**.
Les sapins avec motte coûtent 9€ chacun donc au total **9x pour x sapins** etc.

2) Expliquer chaque ligne du système de contraintes ci-dessous :

$x \geqslant 400$	**Nous devons commander plus de 400 sapins avec motte.**
$y \geqslant 400$	**Nous devons commander plus de 400 sapins sans motte.**
$x + y \geqslant 2000$	**La livraison n'est assurée que si nous commandons plus de 2000 arbres.**
$x + 3y \leqslant 7200$	**Cette inéquation concerne le poids, nous devons avoir** $3x + 9y \leqslant 21600$ **soit en simplifiant par 3,** $x + 3y \leqslant 7200$.
$3x + 2y \leqslant 7600$	**Cette inéquation concerne le prix, nous avons comme contrainte,** $9x + 6y \leqslant 22800$ **soit en simplifiant par** $3x + 2y \leqslant 7600$.

Exercice 03 : (Un problème de restauration)

Soit x et y respectivement le nombre d'assiettes de type 1 et du type 2 à offrir. Le problème est de maximiser la fonction 80 x + 120 y sous les contraintes :

$$\begin{cases} 5x + 3y \leqslant 30 \\ 2x + 3y \leqslant 24 \\ x + 3y \leqslant 18 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 04 : (Préparation de Gâteaux)

Si on note x_j le nombre de gâteaux de type G_j, $j = 1, 2, 3$. Le problème s'écrit :

$$Max\ Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 20 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 05 : (Problème de découpe)

Une plaque de 200 cm de largeur peut être découpée de cinq façons :

1) une plaque de 75 cm et deux plaques de 60 cm. Les déchets seront de 05 cm.

2) une plaque de 110 cm et une plaque de 75 cm. Les déchets seront de 15 cm.
3) une plaque de 110 cm et une plaque de 60 cm. Les déchets seront de 30 cm.
4) trois plaques de 60 cm. Les déchets seront de 20 cm.
5) deux plaques de 75 cm. Les déchets seront de 50 cm.
Soit x_i : le nombre de plaques à découper par la façon i, le problème s'écrit :

$$Min\ Z = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$
$$S.C \begin{cases} x_2 + x_3 \geqslant 30 \\ x_1 + x_2 + x_5 \geqslant 40 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 \geqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 06 :
Si x_1, x_2, x_3 représentent les nombres de pièces de type p_1, p_2, p_3 à fabriquer, le profit total est :

$$Max\ Z = 50x_1 + 80x_2 + 60x_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 480 \\ 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \leqslant 600 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 07 : (Problème de nutrition)
Soit x_1 : le nombre de pain introduit dans la ration de 100g.
x_2 : le nombre de beurre introduit dans la ration de 100g
x_3 : le nombre de fromage introduit dans la ration de 100g
x_4 : le nombre de pois introduit dans la ration de 100g
x_5 : le nombre d'épinards introduit dans la ration de 100g

$$Min\ Z = 5x_1 + 34x_2 + 40x_3 + 10x_4 + 5x_5$$
$$S.C \begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 20x_4 + 25x_5 \geqslant 70 \\ 300x_1 + 1800x_2 + 800x_3 + 1500x_4 + 300x_5 \geqslant 3000 \\ 50x_1 + 400x_2 + 450x_3 + 750x_4 + 120x_5 \geqslant 800 \\ 4x_1 + 4x_4 + 15x_5 \geqslant 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 08 :
Soit x_{ij} : le nombre de pièces i à fabriquer sur la machine j. On aura 12 variables. Le problème s'écrit :

$$Min\ Z = 3x_{11} + 3x_{21} + 2x_{31} + 5x_{12} + 4x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{13} + 2x_{23} + 3x_{33} + 4x_{43}$$
$$S.C \begin{cases} 3x_{11} + 3x_{21} + 2x_{31} + 5x_{41} \leqslant 80 \\ 4x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} \leqslant 30 \\ 2x_{13} + 2x_{23} + 3x_{33} + 4x_{43} \leqslant 130 \\ 3x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 20 \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1, \cdot\cdot, 4,\ et\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$