

# Module : Physique 2

## SERIE N° : 03

### **EXERCICE 01** : fig.1

Une sphère de rayon  $R$ , de centre  $O$  contient une charge distribuée en surface de densité  $\frac{3}{4}\sigma$ . Au centre est placé une charge ponctuelle  $Q_0 = \sigma\pi R^2$

- 1° - Calculer la charge totale du système en fonction de  $\sigma$  et  $R$ .
- 2° - En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrique  $\vec{E}$  en tout point de l'espace ?
- 3° - Déduire le potentiel  $V(r)$  en tout point de l'espace. Tracer l'allure de  $E(r)$  et  $V(r)$

### **EXERCICE 02** : fig.2

Un cylindre de rayon  $R$  et d'une très grande hauteur  $h$ , contient une distribution de charge volumique  $\rho = \frac{\sigma}{R}$ , entouré d'un autre cylindre de rayon  $2R$  et de même hauteur, sa charge est distribuée uniformément en surface est égale à  $\sigma$

- 1° - Calculer la charge totale du système en fonction de  $\sigma$ ,  $R$ , et  $h$ .
- 2° - En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrique  $\vec{E}$  en tout point de l'espace ?
- 3° - Déduire le potentiel  $V(r)$  en tout point de l'espace.

### **EXERCICE 03** : (Supplémentaire)

Deux plaques infinies isolantes chargées uniformément en surface de densité  $+\sigma'$  et  $-\sigma'$

- 1° - Montrer que le champ est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur. Déterminer son expression.
- 2° - Déduire le potentiel en tout point de l'espace.

Si maintenant les deux plaques ont des surfaces égales à  $S$ , sont conductrices et séparées par une couche d'air d'épaisseur  $d$ .

- 3° - Déterminer le champ électrique en un point quelconque entre les plaques.
- 4° - Quel est le potentiel en un point quelconque entre les plaques. Déduire la capacité  $C$

### **EXERCICE 04** : fig.3-a-b

Un système de deux sphères conductrices et concentriques. La sphère interne  $A$  est pleine et de rayon  $R_1 = 9 \text{ cm}$ , la sphère externe  $B$  de rayons intérieur  $R_2 = 11 \text{ cm}$  et extérieur  $R_3 = 12 \text{ cm}$ .

- 1° - La sphère interne prise seule est portée à un potentiel  $V_0 = 6600 \text{ v}$  (fig.4-a).

Quelle est sa charge électrique ?

Etant débrancher de la source, elle est placée dans une sphère  $B$  initialement neutre et aussi isolée.

- 2° - Calculer les charges portées par les parois interne et externe de  $B$
- 3° - Calculer les potentiels  $V_A$  et  $V_B$
- 4° - Calculer la capacité du condensateur formé par ces sphères séparées par de l'air ( $\epsilon \approx \epsilon_0$ )
- 5° - Que deviennent les charges et les potentiels si les deux sphères sont reliées par un fil métallique ?

### EXERCICE 05 : DM fig.4

Un disque conducteur de rayon " $R$ " chargé uniformément en surface avec une distribution " $\sigma_1 = \sigma$ ", placé à l'origine d'un repère orthonormé cartésien " $xoyz$ ".

1°- Exprimer le champ en tous point  $P(0, y, 0)$  de son axe. Déduire l'expression dans les deux cas limites ( $y \ll R$  très proche du disque ;  $y \gg R$  très loin du disque).

On enlève le premier disque et on le remplace par un autre identique mais de densité surfacique " $\sigma_2 = -\sigma$ ", placé à une distance " $d$ " de l'origine  $(0, d, 0)$ .

2°- Exprimer le champ en tous point  $P(0, y, 0)$  de son axe. Déduire l'expression dans les deux cas limites ( $R \ll y$  très proche du disque ;  $y \gg R$  très loin du disque).

Si on remet le premier disque à sa position initiale avec ce dernier de telle sorte qu'ils soient parallèles et ayant pour axe  $\vec{oy}$ .

3°- Dans le cas " $y \ll R$ ", exprimer le champ en tous point de son axe (dans les trois zones).

4°- Se système forme un condensateur. Donner l'expression de sa capacité. (Disques séparés par du vide).

### EXERCICE 06 fig.5

Un câble coaxial de longueur ' $l$ ' formé par un fil conducteur de rayon  $R_1 = 1 \text{ mm}$ , porte une charge ' $+q$ ' entouré par un cylindre creux, de rayon intérieur  $R_2 = 1 \text{ cm}$  et d'épaisseur ' $e$ ' de même axe, séparés par une couche isolante (air ( $\epsilon \approx \epsilon_0$ )) de rayon  $R_1 \leq r \leq R_2$

1°- En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrique  $\vec{E}(r)$  et  $V(r)$  à une position quelconque de la couche isolante.

2°- Déduire la capacité  $C$  par unité de longueur d'un tel condensateur.

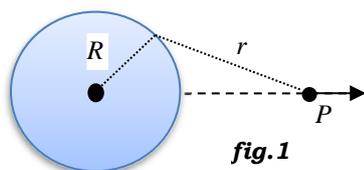


fig.1

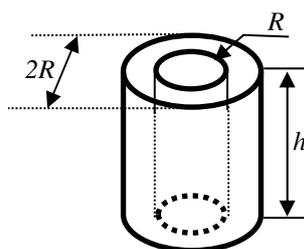


fig.2

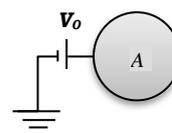


fig.3-a

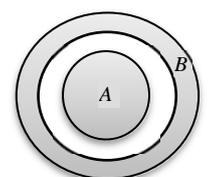


fig.3-b

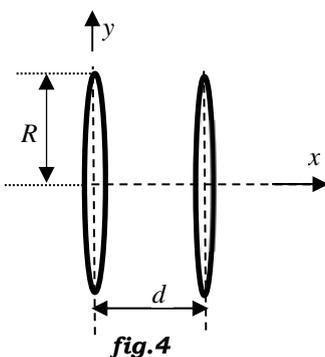


fig.4

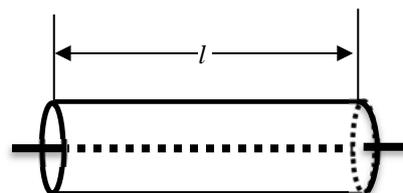


fig.5

Ex 01: Sphère chargée en surface de densité  $\frac{3\sigma}{4}$

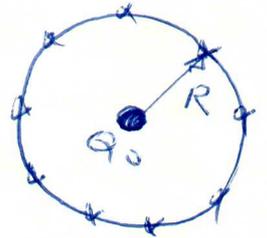
1°/ La charge totale:  $Q_0$ : charge ponctuelle au centre

$$Q_T = Q_0 + Q_1 : \begin{cases} Q_1: \text{charge de la sphère} \end{cases}$$

$$Q_1 = \iint \frac{3\sigma}{4} ds = \frac{3\sigma}{4} \iint ds = \frac{3\sigma}{4} S = \frac{3\sigma}{4} (4\pi R^2)$$

$$\text{ou bien} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{3\sigma}{4} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 3\sigma \pi R^2$$

$$\boxed{Q_T = 4\sigma \pi R^2}$$



2°/ Application du Théorème de Gauss pour retrouver le champ  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.

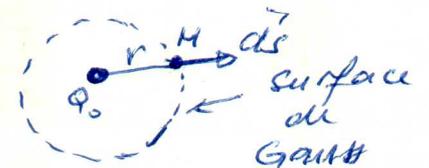
Pour appliquer avec efficacité le théorème de Gauss il faut une très haute symétrie:  $\iint_{S_G} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{(Q_{in})_{S_G}}{\epsilon_0}$

- La distribution de la charge est sphérique de plus elle est invariante  $\Rightarrow$  le théorème de Gauss peut s'appliquer et la surface adéquate est une sphère

- On sépare l'espace en deux zones:  $r < R$ : Zone intérieure  
 $r > R$ : Zone extérieure

• Zone intérieure:  $r < R$ :

le pt "M" dans cette zone est repéré par le vecteur position  $r = r_M$ , la  $S_G$  est



une sphère  $\Rightarrow$  la surface  $d\vec{S}$  est radiale:  $d\vec{S} = ds \vec{n} = ds \vec{u}_r$

charge ponctuelle  $\Rightarrow$  le champ est aussi radial:  $\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_r$   
 $\Rightarrow \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}_1 = E_1 ds_1 \Rightarrow \iint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}_1 = \iint E_1 ds_1$

le champ sur la sphère de Gauss est constant le même

$$\Rightarrow \iint E_1 ds = E_1 \iint ds$$

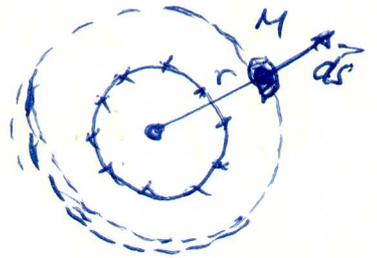
$$\text{finalement} \iint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_1 S = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

$$E_1(4\pi r^2) = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et } \boxed{\vec{E}_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

puisque  $Q_0 = \sigma R^2 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}}$

- Zone extérieure:  $r > R$

Le système possède une symétrie sphérique  
 $\Rightarrow$  la surface adéquate de Gauss adéquate  
 est une sphère  $\cdot d\vec{s}$  et radiale:  $d\vec{s} = ds \vec{u}_r$



Le champ est uniforme sur cette surface et  
 il est aussi radial:  $\vec{E} = E \vec{u}_r$

$$\oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \oiint E_1 ds_1 = E_1(4\pi r^2) = \frac{(Q_{in})_{s_1}}{\epsilon_0} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} = \frac{4\sigma R^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \text{ et } \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}}$$

3°/ Le potentiel électrostatique est déduit à partir de la  
 relation liant le champ  $\vec{E}$  au potentiel  $V$

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) \iff \Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_B - V_A$$

\* Zone interne,  $r < R$ :  $r \in [0, R]$

on utilise la primitive de  $E$ :

$$V_1(r) = - \int_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = - \int_1 E_1 dr = - \int \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{V_1(r) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1}$$

\* Zone extérieure,  $r > R$ :  $r \in ]R, \infty[$

$$V_2(r) = - \int_2 \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = - \int_2 E_2 dr = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2$$

$$\boxed{V_2(r) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2}$$

- Pour la détermination des constantes "C<sub>1</sub>" et "C<sub>2</sub>" on utilise  
 les conditions de continuité du potentiel  $V(r)$  aux limites  
 et le point de référence pour lequel le potentiel est nul

- Phy 02 - 2019/2020

- Le point de référence du potentiel;

• On choisit l'infini ou le potentiel est nul

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} V_2(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2 \right) = C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad , \quad \boxed{V_2(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r}}$$

- La condition de continuité au limites.

$$\lim_{r \rightarrow R} V_1(r) = \lim_{r \rightarrow R} V_2(r) \Rightarrow \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} + C_1 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{3}{4} \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{3}{4} \frac{\sigma R}{\epsilon_0}} \quad ; \quad \boxed{V_1(r) = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left( 3 + \frac{R}{r} \right)}$$

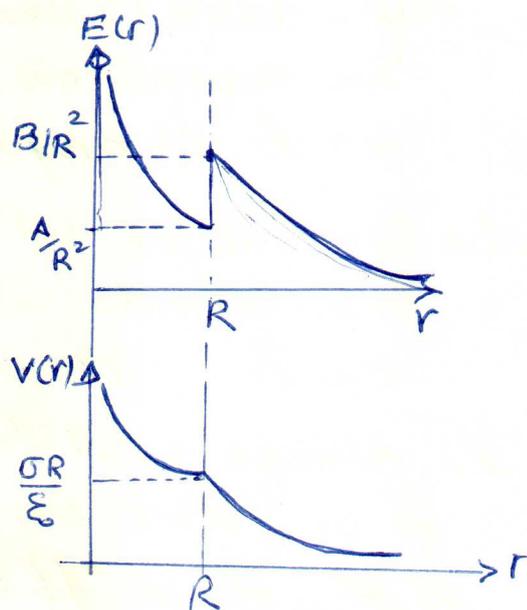
$$= \quad r < R: \quad \vec{E}_1 = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad , \quad V_1(r) = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left( 3 + \frac{R}{r} \right)$$

$$r > R: \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad , \quad V_2(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Tracer l'allure de  $E(r)$  et  $V(r)$

$$\begin{cases} r < R: E_1 = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{A}{r^2} \\ r > R: E_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{B}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < R: V_1 = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left( 3 + \frac{R}{r} \right) \\ r > R: V_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{cases}$$



Ex 02 : Système de deux cylindres

1/ La charge totale

$Q_0$  : charge distribuée en volume :  $\rho = \sigma/R$   
du cylindre intérieur

$Q_1$  : charge distribuée en surface  $\sigma$   
du cylindre extérieur.

$$Q_T = Q_0 + Q_1$$



$$Q_0 = \iiint \rho dv = \iiint \rho r d\theta dr dz = \frac{\sigma}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^R r dr$$

$$Q_1 = \sigma \pi R^2 h$$

$$Q_2 = \iint \sigma ds = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma 2R d\theta dz = 2R\sigma \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma 2\pi R h = \sigma \cdot (2R) \pi h$$

$$Q_2 = 4\sigma \pi R h$$

$$\Rightarrow Q_T = Q_1 + Q_2 = 5\sigma \pi R h$$

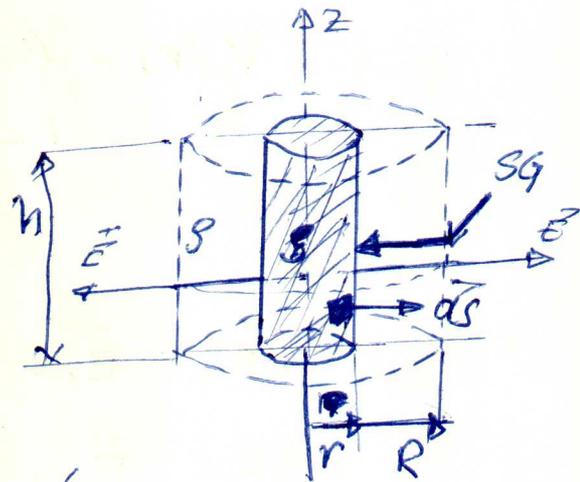
2° Le champ  $\vec{E}$  dans tout l'espace : on divise cette espace en trois zone

- Zone interne,  $r < R$

Le champ à l'intérieur du cylindre chargé en volume

• la charge est invariante par translation le long de l'axe du cylindre ( $z$ ) et aussi invariante par rotation de " $\theta$ " autour de cette axe, en coordonnées cylindriques (système adéquat) le champ

ne dépend que de la coordonnée radiale " $r$ "  
 $\Rightarrow$  le champ est radial  $= \vec{E} = E \vec{u}_r$



- La symétrie est cylindrique, la surface de Gauss adéquate est un cylindre = l'élément de surface  $d\vec{s}$  est aussi radial  
 car  $d\vec{s} = ds \vec{n} = ds \vec{u}_r$

la charge est distribuée uniformément  $\Rightarrow$  le champ  $E$  est uniforme sur cette surface, ce qui donne,

$$\oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \oiint E_1 ds_1 = E_1 \oiint ds_1 = E_1 S = (Q_{in})_{S_1} / \epsilon_0$$

$$Q_{in} = \iiint \rho dv' = \rho \iiint dv' = \rho \sigma' = \frac{\sigma}{R} (\pi r^2 h)$$

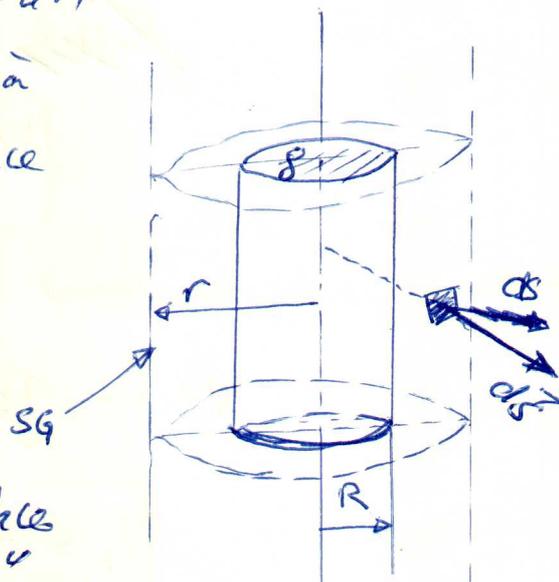
$$= E_1 (2\pi r h) = \frac{\sigma}{R} (\pi r^2 h)$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{2R\epsilon_0} r \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2R\epsilon_0} r \vec{u}_r}$$

- Zone intermédiaire:  $R < r < 2R$

la symétrie du système est toujours cylindrique alors la surface de Gauss adéquate est un cylindre de "rayon"  $r$  qui correspond à la position du point "M", l'élément de surface  $d\vec{s}$  est radial  $= d\vec{s} = ds \vec{u}_r$

et vu l'invariance de la charge dans le sens axial et par rotation autour de cet axe  $\Rightarrow \vec{E}$  est radial



$\vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_r$  et uniforme sur la surface de rayon "r"

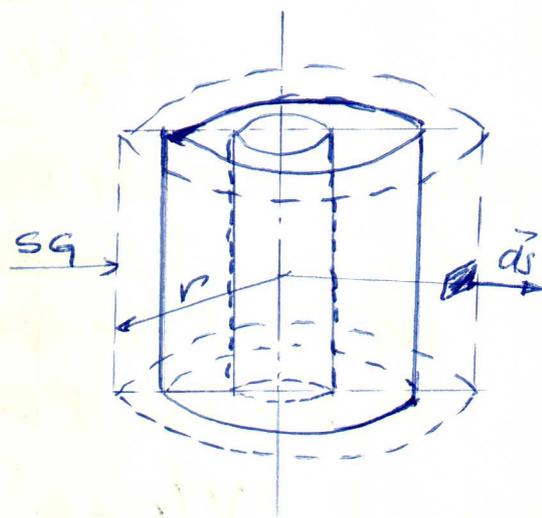
$= \iint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \iint E_2 ds = E_2 S = Q_{in} / \epsilon_0$

$Q_{in} = Q_0 = \sigma \pi R h \Rightarrow E_2 (2\pi r h) = \frac{\sigma \pi R h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$

$\vec{E}_2 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$

- Zone extérieure  $r > 2R$

vue la symétrie et l'invariance comme déjà évoqué précédemment le champ est radiale  $\vec{E} = E \vec{u}_r$  et uniforme sur la surface de Gauss qui est un cylindre. L'élément de surface est aussi radiale  $= d\vec{s} = ds \vec{u}_r$



$\iint \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3 = Q_{in} / \epsilon_0 \Rightarrow E_3 (2\pi r h) = \frac{Q_T}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi R h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{\sigma}{2} \frac{R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$

$\vec{E}_3 = \frac{\sigma}{2} \frac{R}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$

$= \begin{cases} r < R \rightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} r \vec{u}_r \\ R < r < 2R \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r} \\ r > 2R \rightarrow \vec{E}_3 = \frac{\sigma}{2} \frac{R}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r} \end{cases}$

3°) Dédution du potentiel en partant de la relation

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_B - V_A$$

\* Zone interne  $r < R$  :  $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r$

$$\Rightarrow \int_0^r \frac{dr}{r} V(r) = - \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = - \int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r dr = - \frac{\sigma}{4\epsilon_0} r^2 + C_1$$

$$\boxed{V_1(r) = - \frac{\sigma}{4\epsilon_0} r^2 + C_1}$$

\* Zone intermédiaire  $R < r < 2R$  :  $\vec{E}_2 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$

$$\Rightarrow V_2(r) = - \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = - \int \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{dr}{r} = - \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \ln r + C_2$$

$$\boxed{V_2 = - \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \ln(r) + C_2}$$

\* Zone externe :  $r > 2R$  :  $\vec{E} = \frac{5\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$

$$V_3(r) = - \int \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = - \int \frac{5\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{dr}{r} = - \frac{5\sigma R}{2\epsilon_0} \ln(r) + C_3$$

$$\boxed{V_3(r) = - \frac{5\sigma R}{2\epsilon_0} \ln(r) + C_3}$$

pour déterminer les constantes  $C_1, C_2, C_3$  on utilise les conditions aux limites et la continuité du potentiel, en prenant comme point de référence du potentiel l'axe du cylindre  $r=0$  :  $V(r=0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} V_1(r) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

(on ne peut pas prendre  $V(\infty) \rightarrow 0$ , car la charge à l'infini existe)

$$\lim_{r \rightarrow R} V_1(r) = \lim_{r \rightarrow R} V_2(r) \Rightarrow C_2$$

$$\lim_{r \rightarrow 2R} V_2(r) = \lim_{r \rightarrow 2R} V_3(r) \Rightarrow C_3$$

Ex 04

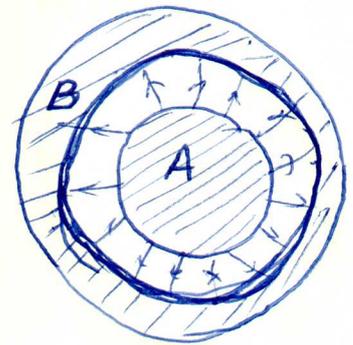
1°/ La sphère "A" de rayon  $R_1 = 9 \text{ cm}$  portée au potentiel  $V_0$

Sachant que:  $V_0 = k \frac{Q_0}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_1} \Rightarrow Q_0 = \frac{V_0 R_1}{k}$   $k = 9 \cdot 10^9$

AN:  $Q_0 = \frac{6600 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = 66 \cdot 10^{-9}$   $Q_0 = 66 \text{ nC}$

2°/ La sphère "A" déconnectée est mise à l'intérieur de la sphère creuse "B" initialement neutre et isolée.

- Puisque les deux sphères sont en influence totale, toutes les lignes de champ issues de la sphère "A" arrivent sur la surface interne de "B".



$\Rightarrow$  Les éléments correspondants sont la surface externe de "A" et la surface interne de "B" qui vont avoir des charges égales et opposées (Théorème des éléments correspondants).

alors:  $Q_A = -Q_B^{\text{int}} \Rightarrow \boxed{Q_B^{\text{int}} = -Q_0 = -66 \text{ nC}}$

• Puisque la sphère "B" est neutre et isolée alors la charge totale ~~qu'elle~~ qu'elle porte est nulle:  $Q_T = Q_B^{\text{tot}} = 0$

$Q_T = Q_B^{\text{int}} + Q_B^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow Q_B^{\text{ext}} = -Q_B^{\text{int}} = Q_0 \Rightarrow \boxed{Q_B^{\text{ext}} = 66 \text{ nC}}$

3°/ En présence des charges sur les parois interne et externe de la sphère "B", le potentiel de la sphère "A" change sa valeur par rapport à celle initiale  $V_0$ .

$$V_A' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_A}{R_1} + \frac{Q_B^{int}}{R_2} + \frac{Q_B^{ext}}{R_3} \right) \quad Q_A = -Q_B^{int} = Q_B^{ext} = Q_0$$

$$= V_A' = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right)$$

$$V_A' = V_0 \left( 1 - \frac{R_1(R_2 - R_1)}{R_2 R_3} \right) \quad \text{A.N. } \boxed{V_A' = 6150 \text{ V}}$$

d'une autre manière (en prenant le potentiel à l'infini nul  $V(\infty) \rightarrow 0$ ).

$$V_A - V(\infty) = \int_{\infty}^{R_1} dV = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{R_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} - \int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

$\int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$  est nulle car il n'y a pas de variation du potentiel. Le champ est nul à l'intérieur du conducteur.

$$\vec{E}_3 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r > R_3 ; \quad \vec{E}_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad R_1 < r < R_2$$

$$\Rightarrow V(R_1) = V_A' = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Pour la sphère B : la présence de la sphère "A", elle va influencer la sphère "B" en modifiant son potentiel et non pas sa charge.

$$\Rightarrow V_B(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^{R_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{R_3} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad Q_B(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$Q_B(r=R_3) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} \cdot \frac{R_1}{R_3} = V_0 \cdot \frac{R_1}{R_3} \quad \text{A.N. } \boxed{Q_B = 4950 \text{ V}}$$

4°) Le potentiel dans la zone  $R_1 < r < R_2$  (dans l'air)

$$\Delta V = \int_{R_2}^r dV = - \int_{R_2}^r \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = - \int_{R_2}^r \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{R_2}^r$$

$V(\infty) \rightarrow 0$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Sachant que la capacité "C" entre les deux conducteurs est définie comme étant le rapport de la charge et la différence de potentielle entre les deux conducteurs

$\Delta V = V_1 - V_2$  c.a.d  $r \rightarrow R_1$

$\Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{Q_0}{\Delta V} = C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$

$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

AN  $C = 55 \text{ nF}$

5/ Si les deux sphères sont reliées par un fil conducteur, la charge "+Q<sub>0</sub>" de "A" et "-Q<sub>0</sub>" de la surface interne de "B" vont se neutraliser, il ne reste que la charge de la couche externe "Q<sub>B</sub><sup>ext</sup> = Q<sub>0</sub>" de la sphère B.

$Q_B^{\text{ext}} = Q_0 = 66 \text{ nC}$

Dans ce cas le potentiel ~~de la~~ <sup>de la sphère A</sup> Comme vu précédemment

devient :  $V_A'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{0}{R_1} + \frac{0}{R_2} + \frac{Q_0}{R_3} \right) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_3}$

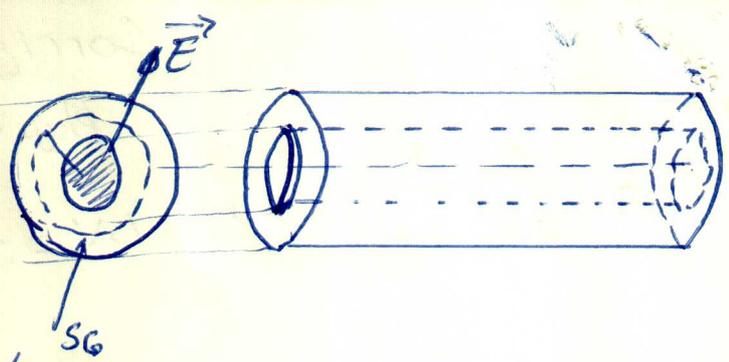
$V_A'' = 4950 \text{ V}$

Puisque les deux sphères liées par un fil conducteur constituent un seul conducteur dont la surface est une surface équipotentielle

$V_B'' = V_A'' = 4950 \text{ V}$

# Exercice 06 :

1°) Vue la symétrie cylindrique la surface adéquate est un cylindre. Puisque la charge est distribuée uniformément, le champ est radial et uniforme sur la surface de Gauss.



$$\Rightarrow \oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{SG} E dS = E S = Q_{in} / \epsilon_0$$

$$Q_{in} = +q \Rightarrow E(2\pi r l) = q / \epsilon_0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \frac{\vec{u}_r}{r}}$$

Le potentiel :  $\vec{E} = -\text{grad}(V) \Leftrightarrow \Delta V = -\int_{R_2}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\Delta V = -\int_{R_2}^r \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

- Si on ramène  $r \rightarrow R_1 \Rightarrow V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \frac{dr}{r}$

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

~~$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$~~

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} : \text{C'est la Capacité par unité de longueur [C/m]}$$

