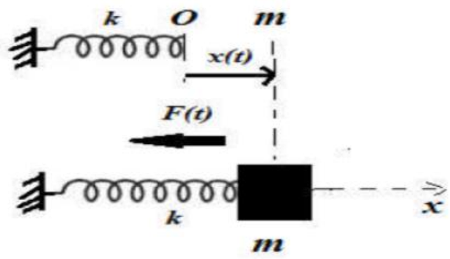
Exercice N°1 :

Comparer entre la pulsation propre d'un système mécanique *k*+*m* et un système électrique *LC*

On donne : k=100 *N/m*, *m*=250*g*, *L*=0.1 *H*, *C*=100 *pF*.

Solution :



Solution :

$$T = E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_p = U = U_k + U_m$$

$U_m = 0$ Car : $U_m=mgh$ et $h=0$

$$dU_k = -\vec{F}_k d\vec{l} = -F_k dl \cos\left(\vec{F}_k (\leftarrow), d\vec{l} (\rightarrow)\right)$$

$$dU_k = -F_k dl \cos(180°)$$

$$\cos(180°) = -1$$

$$dU_k = +F_k dl = kxdx \; / \; F_k = kx, dl = dx$$

$$U_k = \int dU_k = \int_0^{x_0+x} kxdx = k\int_0^{x_0+x} xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0+x} = \frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_0+x}$$

$$U_k = \frac{k}{2}\left[(x_0+x)^2 - 0\right]$$

$$U_k = \frac{k}{2}(x_0+x)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2+2xx_0+x_0^2\right) = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2$$

$$U = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 + cte \; / \; \frac{k}{2}x_0^2 = cte$$

Alors : $U = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$

Equilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{2} \times 2x + kx_0$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} : x = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} \times 2(x=0) + kx_0$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$U = \frac{k}{2}x^2 + cte$$

$$\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + cte}$$

L'équation de mouvement est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

$$Avec\ L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m(2\dot{x}) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\frac{d}{dt}(\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}k(2x) = -kx$$

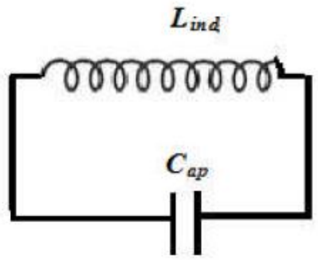
Alors $m\ddot{x} + kx = 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

k=100 *N*/*m*, *m*=250 *g*=*0.*250 k*g*.

$$\omega_0(mécanique) = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.250}} = 20\, rad.s^{-1}$$

2/Circuit électrique *LC*



$$\sum V_i = 0 \Rightarrow V_L + V_C = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C}$$

$$V_L = L\frac{di}{dt}, \mathrm{i} = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

$$V_L = L\frac{d}{dt}\dot{q} = L\ddot{q}$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 / \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

L=0.1 *H*, *C*=100 *pF=100* 10^{-12} *F.*

$$\omega_0(\acute{e}lectrique) = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0.1 \times 100 \times 10^{-12}}} = 3.16 \times 10^{16}\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_0(\acute{e}lectrique) >>>> \omega_0(m\acute{e}canique)$$

Les circuits électriques possèdent un spectre de fréquences assez large en comparaison avec celui des spectres électriques.

Exercice N°2 :

Un système vibratoire (*k+m)* (disposé horizontalement), constitué d'une masse *m*=0.01 *kg* et d'un ressort *k*=36Nm^{-1}. A l'instant t=0 on observe que la masse est à 50 mm à droite de sa position d'équilibre et se déplace toujours vers la droite avec une vitesse de 1.7ms^{-1}. Calculer la fréquence, l'amplitude, la phase initiale et l'énergie du système. Un second système identique au premier est mis en vibration avec la même amplitude mais avec une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ calculer le déplacement et la vitesse à t=0. A quel instant va-t-il passer ensuite par la position d'équilibre ?

Solution :

L'équation du mouvement d'un système vibratoire *k*+*m* (disposé horizontalement) est

$$\begin{cases} \ddot{x}+\dfrac{k}{m}x=0 \\ \ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \end{cases}$$

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{36}{0.01}}=60\ rad.s^{-1}$$

Calcul fréquence f

$$\omega_0=2\pi f\Rightarrow f=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{60}{2\pi}=9.55\ Hertz$$

Calcul A et φ

$$\begin{cases} x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \\ v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\dot{x}(t)=\dfrac{d}{dt}\left[A\cos(\omega_0 t+\varphi)\right] \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \\ \dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) \end{cases}$$

Dans les conditions initiales

$$\begin{cases} x(t=0)=A\cos(\omega_0\times 0+\varphi) \\ \dot{x}(t=0)=-A\omega_0\sin(\omega_0\times 0+\varphi) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x(t=0)=A\cos(\varphi) \\ \dot{x}(t=0)=-A\omega_0\sin(\varphi) \end{cases}$$

Application Numérique

$$\begin{cases} x(t=0)=A\cos(\varphi)=50mm=50.10^{-3}m \quad (1) \\ \dot{x}(t=0)=-A\omega_0\sin(\varphi)=1.7m/s \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t=0)=A\cos(\varphi)=50mm=50.10^{-3}m \quad (1) \\ \dot{x}(t=0)=-A\omega_0\sin(\varphi)=1.7m/s \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)}=\frac{-A\omega_0\sin(\varphi)}{A\cos(\varphi)}=\frac{1.7}{50.10^{-3}}=-\omega_0\tan(\varphi)$$

$$\omega_0\tan(\varphi)=\frac{-1.7}{50.10^{-3}}\Rightarrow\tan(\varphi)=\frac{-1.7}{50.10^{-3}}\frac{1}{\omega_0}=\frac{-1.7}{50.10^{-3}}\frac{1}{60}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}rad$$

D'après (1) : $A\cos(\varphi)=A\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=50.10^{-3}\Rightarrow A=\dfrac{50.10^{-3}}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}=0.057m$

Calcul de l'énergie maximale du système

$$E_T=T+U$$

$$E_T(Max)=U \qquad (T=0)$$

DR. GHELLAB TORKIA

Puisque l'énergie est maximale quand l'allongement du ressort est maximum et dans cette instant le ressort change de direction c'est-à-dire v=0 cela implique que l'énergie cinétique devient nulle.

$$E_T\left(Max\right)=U=\frac{1}{2}kx^2$$
$$x=0.057m,\ k=36$$
$$E_T\left(Max\right)=\frac{1}{2}36\left(0.057\right)^2=0.06\ J$$

Calcul de la position et la vitesse du deuxième système à t=0 :

Pour le deuxième système : Il a la même amplitude que le premier système c'est-à-dire A ne change pas mais avec une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire φ devient $\varphi+\frac{\pi}{2}$

Alors

$$\begin{cases} x\left(t\right)=A\cos\left(\omega_0 t+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \dot{x}\left(t\right)=-A\omega_0\sin\left(\omega_0 t+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Dans les conditions initiales

$$\begin{cases} x\left(t=0\right)=A\cos\left(\omega_0\times\left(t=0\right)+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \dot{x}\left(t=0\right)=-A\omega_0\sin\left(\omega_0\times\left(t=0\right)+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\left(t=0\right)=A\cos\left(\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \dot{x}\left(t=0\right)=-A\omega_0\sin\left(\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Application Numérique

$$\begin{cases} x\left(t=0\right)=A\cos\left(\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=A\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.057\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.0288m \\ \dot{x}\left(t=0\right)=-A\omega_0\sin\left(\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-A\omega_0\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-A\omega_0\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-0.057\times60\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2.9\ m/s \end{cases}$$

Donc le deuxième système à t=0 est à 28.8 mm de la position d'équilibre et se déplace avec une vitesse de 3 m/s.

A quel instant va-t-il passer ensuite par la position d'équilibre ?

$$x\left(t\right)=A\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\cos\left(\alpha\right)=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$$

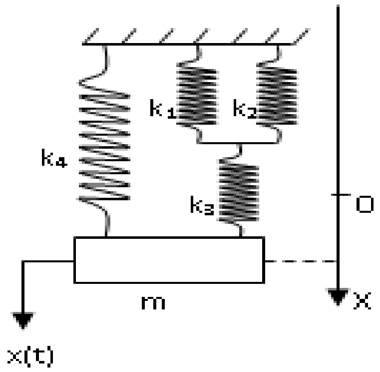
De même

$$\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Rightarrow \omega_0 t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega_0 t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{\omega_0}=\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{60}=0.01\,s$$

Exercice N°3 :

Simplifier le système de la figure 1 en remplaçant les ressorts par un ressort équivalent $k_e\ (k_1=k_2=k_3=k\ et\ k_4=2k)$. En déduire la nature du mouvement et sa pulsation propre ω_0 qu'on demande de calculer sachant que $k=150$ N/m, m=1kg.



Solution :

k_1 est en parallèle avec k_2 alors $k_{1(equivalent)}=k_1+k_2=2k$

$k_{1(equivalent)}$ est en série avec k_3

$$\frac{1}{k_{2(equivalent)}}=\frac{1}{k_{1(equivalent)}}+\frac{1}{k_3}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{k}=\frac{3}{2k}$$

$$k_{2(equivalent)}=\frac{2k}{3}$$

$k_{2(equivalent)}$ est en parallèle avec k_4

$$k_{3(equivalent)}=k_{2(equivalent)}+k_4=\frac{2k}{3}+2k=\frac{8k}{3}$$

$$k_{3(equivalent)}=k_{(equivalent)}=k_e$$

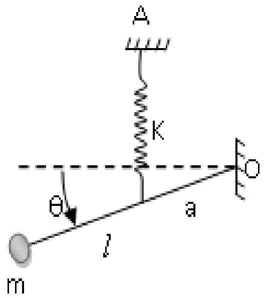
$$\begin{cases}\ddot{x}+\dfrac{k}{m}x=0\\ \ddot{x}+\omega_0^2 x=0\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{k_e}{m}}=\sqrt{\frac{8k}{3m}}=20\ rad.s^{-1}$$

Exercice N°4 :

Une tige de longueur l et de masse négligeable articulée au point O portant à son extrémité libre une masse ponctuelle m. A une distance a de O de la tige on attache verticalement un ressort de raideur k, l'autre extrémité étant fixée à un bâti fixe au point A. A l'équilibre statique la tige prend une position horizontale $(\theta = 0)$.

1- Dire si à cette position le ressort est-il allongé ou non ? en déduire la condition d'équilibre.
2- Etablir l'équation différentielle des faibles oscillations et en déduire leur période.



Solution :

$U = U_k + U_m$

L'énergie potentielle de la tige égale à zéro car la masse de la tige est négligée.

$dU_k = -\vec{F}_k d\vec{l} = -F_k dl \cos\left(\vec{F}_k (\uparrow), d\vec{l} (\downarrow)\right)$

$dU_k = -F_k dl \cos(180°)$

$\cos(180°) = -1$

$dU_k = +F_k dl = kxdx \ / F_k = kx, dl = dx$

$$U_k = \int dU_k = \int_0^{x_0+x} kxdx = k\int_0^{x_0+x} xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0+x} = \frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_0+x}$$

$$U_k = \frac{k}{2}\left[(x_0 + x)^2 - 0\right]$$

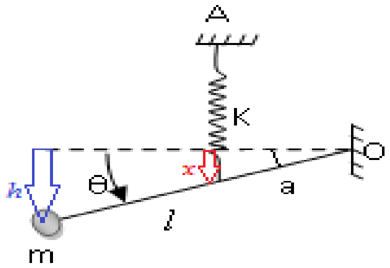
$$U_k = \frac{k}{2}(x_0 + x)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2 + 2xx_0 + x_0^2\right) = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 + cte \ / \ \frac{k}{2}x_0^2 = cte$$

Alors

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$$

DR. GHELLAB TORKIA



Avec

$$\sin\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\sin\theta$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte = \frac{k}{2}(a\sin\theta)^2 + k(a\sin\theta)x_0 + cte$$

$$dU_m = -\vec{F}_m d\vec{l} = -F_m dl\cos\left(\vec{F}_m(\downarrow), d\vec{l}(\downarrow)\right)$$

$$dU_m = -F_m dl\cos(0°)$$

$$\cos(0°) = +1$$

$$dU_m = -F_m dl = -mgdl \;/\; F_m = mg$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^h -mgdl = -mg\int_0^h dl = k[l]_0^h = -mg[h-0]$$

$$U_m = -mgh$$

$$\sin\theta = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\sin\theta \Rightarrow U_m = -mgl\sin\theta$$

Alors

$$U = U_k + U_m = \frac{k}{2}(a\sin\theta)^2 + k(a\sin\theta)x_0 - mgl\sin\theta + cte$$

$$U = \frac{k}{2}a^2\left(\sin\theta^2\right) + kax_0(\sin\theta) - mgl(\sin\theta) + cte$$

$$U = \frac{k}{2}a^2\left(\sin\theta^2\right) + (kax_0 - mgl)(\sin\theta) + cte$$

A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{k}{2}a^2\left(\theta^2\right) + (kax_0 - mgl)(\theta) + cte$$

Equilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{k}{2}\times a^2\times 2\theta+\left(kax_0-mgl\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}:\theta=0\Rightarrow\frac{k}{2}\times a^2\times 2\left(\theta=0\right)+\left(kax_0-mgl\right)=\left(kax_0-mgl\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0\Rightarrow\left(kax_0-mgl\right)=0\Rightarrow x_0=+\frac{mgl}{ka}$$

C'est-à-dire que le ressort est allongé de $x_0=+\dfrac{mgl}{ka}$

Alors

$$U=\frac{k}{2}a^2\left(\theta^2\right)+cte.$$

$$T=E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{x}=l\dot{\theta}$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Alors, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L=E_c-E_p=T-U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{k}{2}a^2\left(\theta^2\right)+cte$$

L'équation de mouvement pour des petites oscillations, est : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta}\right)=0$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}ml^2\times 2\dot{\theta}=ml^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{k}{2}a^2\times 2\theta=-ka^2\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta}+ka^2\theta=0$$

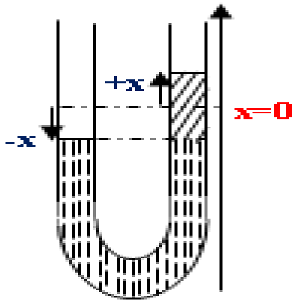
$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{ka^2}{ml^2}\theta=0\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{ka^2}{ml^2}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Exercice N°5 :

Un tube en U et de section S, contient un liquide de masse volumique ρ et de longueur l dans le tube.

1- Etablir l'équation différentielle des vibrations libres de faibles amplitudes.
2- Déduire leur pulsation propre.



Solution :

1. *L'énergie cinétique*

$$T = E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

M : La masse de liquide

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho Sl$$

$$\frac{M}{l} = S\rho \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

l : Longueur de liquide.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

2. *L'énergie potentielle*

$$dU_m = -\vec{F}_m d\vec{l} = -F_m dl\,\cos\left(\vec{F}_m(\downarrow), d\vec{l}(\uparrow)\right)$$

$$dU_m = -F_m dl\,\cos(180°)$$

$$\cos(180°) = -1$$

$$dU_m = +F_m dl = +mgdl \;/\; F_m = mg$$

m : La masse du tube 2x

$$\rho = \frac{m}{V_m} \Rightarrow m = \rho V_m = \rho S2x$$

$$F_m = mg = \rho S2xg = 2\rho gSx$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^x +mgdl = +\int_0^x 2\rho gSxdx = +\int_0^x 2\rho gSxdx = +2\rho gS\int_0^x xdx = +2\rho gS\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$U_m = 2\rho g S\left[\frac{x^2}{2} - 0\right]$$

$$U_m = 2\rho g S\left[\frac{x^2}{2}\right]$$

$$U_m = \rho g S x^2 + cte$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \rho g S x^2 + cte$$

D'après (1) : $\frac{M}{l} = S\rho$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \rho g S x^2 + cte \,/\, \frac{M}{l} = S\rho$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{Mg}{l}x^2 + cte$$

L'équation de mouvement est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}M\,2\dot{x} = M\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{Mg}{l}2x = -\frac{2Mg}{l}x$$

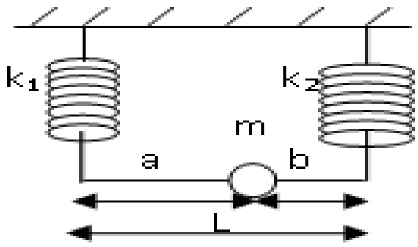
Alors

$$M\ddot{x} + \frac{2Mg}{l}x = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Exercice N°6 :

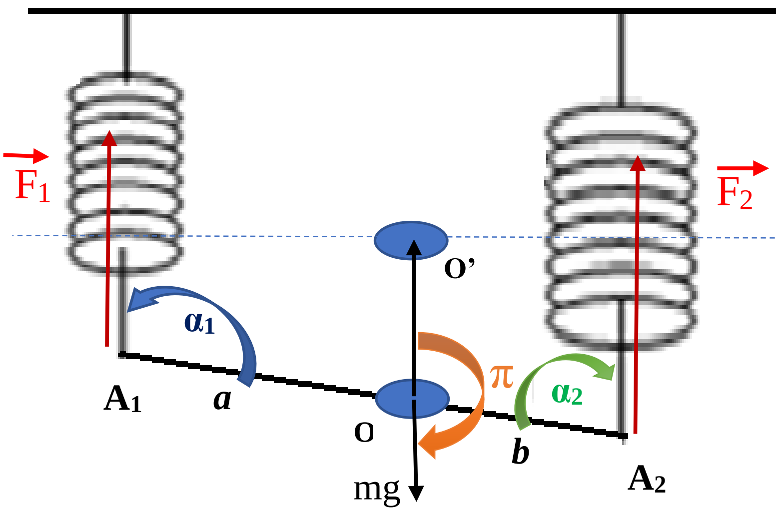
Trouver le système simple équivalent du système représenté sur la fig.2, puis calculer la pulsation propre. On admet que le déplacement de la masse est uniquement v



Equilibre

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0$$



Suivant le mouvement du système on trouve

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_1 = k_1 x_1, F_2 = k_2 x_2$$

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 = mg \ ....(1)$$

$$\sum \vec{\mu} = 0$$

$$\overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{g} = 0$$

$$\overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1 - \overrightarrow{A_2O} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{g} = 0$$

On a $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \sin\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$

Alors $\|\overrightarrow{OA_1}\| \times \|\vec{F}_1\| \times \sin\left(\overrightarrow{OA_1}, \vec{F}_1\right) - \|\overrightarrow{A_2O}\| \times \|\vec{F}_2\| \times \sin\left(\overrightarrow{A_2O}, \vec{F}_2\right) + \|\overrightarrow{OO'}\| \times \|m\vec{g}\| \times \sin\left(\overrightarrow{OO'}, m\vec{g}\right) = 0$

DR. GHELLAB TORKIA

On a

$$\left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| = a, \left\|\overrightarrow{A_2O}\right\| = b, \left\|\vec{F_1}\right\| = F_1, \left\|\vec{F_2}\right\| = F_2$$

Alors

$$aF_1 \sin\left(\overrightarrow{OA_1}, \vec{F_1}\right) - bF_2 \sin\left(\overrightarrow{A_2O}, \vec{F_2}\right) + OO' \times mg \times \sin\left(\overrightarrow{OO'}, m\vec{g}\right) = 0$$

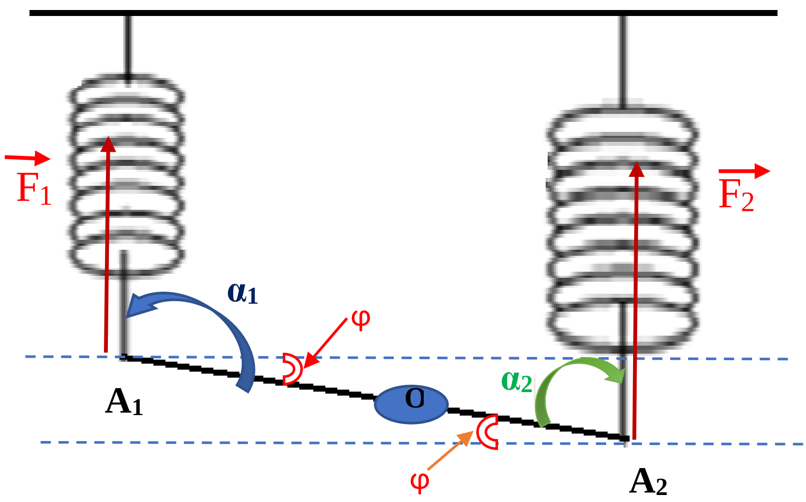
$$\sin\left(\overrightarrow{OO'}, m\vec{g}\right) = \sin 180° = 0$$

$$aF_1 \sin\left(\overrightarrow{OA_1}, \vec{F_1}\right) - bF_2 \sin\left(\overrightarrow{A_2O}, \vec{F_2}\right) = 0$$

On pose $\sin\left(\overrightarrow{OA_1}, \vec{F_1}\right) = \alpha_1, \sin\left(\overrightarrow{A_2O}, \vec{F_2}\right) = \alpha_2$

$$aF_1 \sin(\alpha_1) - bF_2 \sin(\alpha_2) = 0$$

$$\alpha_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$



On sait que

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(\alpha_1) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi \cos\frac{\pi}{2} + \cos\varphi \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin(\alpha_1) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\sin(\alpha_2)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\varphi-\cos\frac{\pi}{2}\sin\varphi$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(\alpha_2)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi$$

Alors $aF_1\sin(\alpha_1)-bF_2\sin(\alpha_2)=0$

Devient

$$aF_1\cos(\varphi)-bF_2\cos(\varphi)=0$$

$$aF_1=bF_2$$

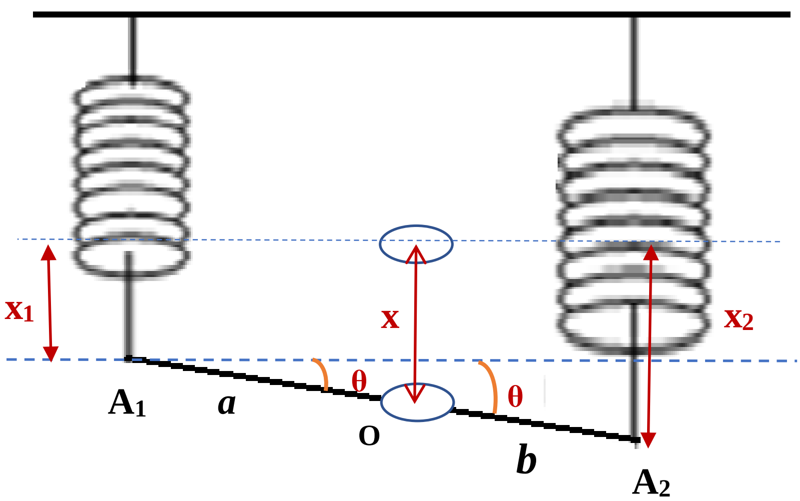
Alors $ak_1x_1=bk_2x_2$ …… ……..(2)

Equilibre $k_{(equivalent)}x=mg$

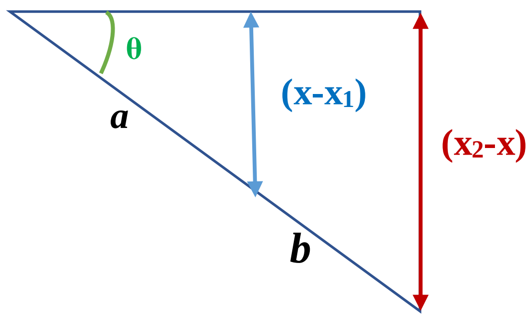
D'après (1) : $k_{(equivalent)}x=mg=k_1x_1+k_2x_2$

$k_{(equivalent)}x=k_1x_1+k_2x_2$ ………(3)

Triangle : $A_1A_2A_3$



$\sin\theta=\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{x_2-x_1}{a+b}$ ……..(4)



En replaçant (2) et (4) dans (3) on trouve

$$k_{(equivalent)}=\frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{k_1}+\frac{b^2}{k_2}}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{k_{(equivalent)}}{m} x = 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_{(equivalent)}}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{(equivalent)}}{m}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{\left(\dfrac{a^2}{k_1} + \dfrac{b^2}{k_2}\right)m}}$$