Chapitre 4 : Systèmes linéaire forcés à un degré de liberté

4.1 Force d'excitation

Pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergie et des ralentissements des systèmes en mouvements, il faut appliquer une force externe qu'on appelle excitation.

4.2 Equation de Lagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement $f = -\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe (t), l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)=-\left(\dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right)+F(t) & \text{(En translation)} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\right)=-\left(\dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right)+\mathrm{M}(t) & \text{(En rotation. . est le moment de la force)} \end{cases}$$

4.3 Equation du mouvement des systèmes forcés

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha\dot{q}$ et excités par $F(t)$ est de la forme (a est une constante)

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q+2\delta\dot{q}=\frac{F(t)}{a}$$

4.4 Résolution de l'équation du mouvement

La résolution de l'&équation $\ddot{q}+\omega_0^2 q+2\delta\dot{q}=\dfrac{F(t)}{a}$ est très simple pour une excitation sinusoïdal $F(t)=F_0\cos\omega t$. Dans ce cas l'équation s'écrit : $\ddot{q}+\omega_0^2 q+2\delta\dot{q}=\dfrac{F_0}{a}\cos\omega t$. La solution générale de cette équation est : $q(t)=q_T(t)+q_p(t)$

- ✓ $q_T(t)$ est la solution (transitoire) de l'équation homogène (sans F). Elle dépend du signe de $\delta^2-\omega_0^2$. Elle est dite transitoire car elle s'éteint au cours du temps (voir chap. 3.)
- ✓ $q_p(t)$ est la solution (permanente) de l'équation non homogène (avec F). Elle est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement.

La figure 4.1 montre la superposition des deux régimes :

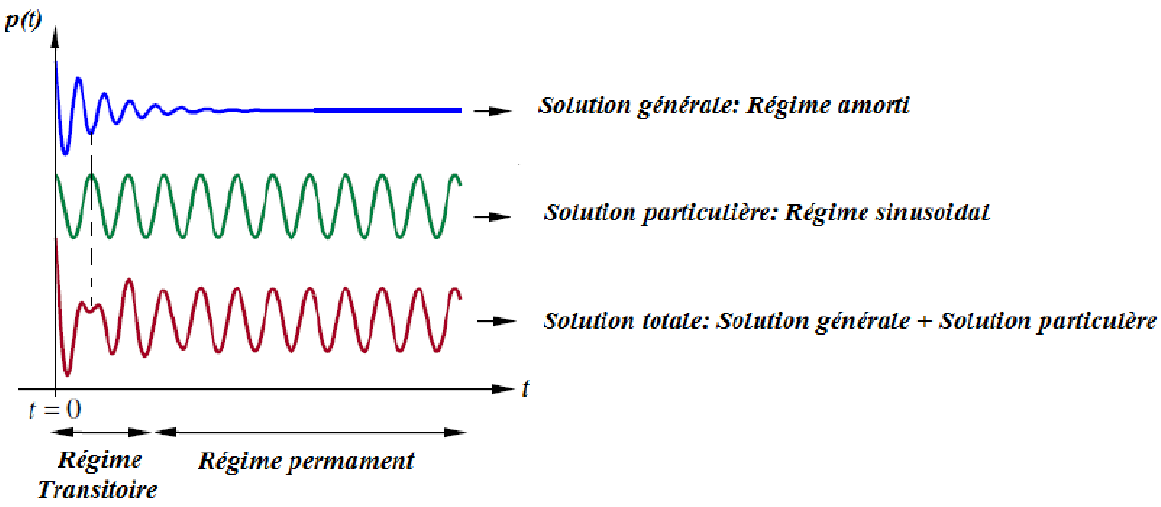


Figure 4.1 : Superposition du régime transitoire et du régime permanent

Dans le cas où l'excitation est sinusoïdale de type : $q(t) = A\cos\omega t$. On trouve A et φ à l'aide de la représentation complexe comme suit :

$$F(t) = F_0\cos\omega t \rightarrow \tilde{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \tilde{q}(t) = Ae^{(j\omega t+\varphi)} = \tilde{A}e^{(j\omega t)}$$

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{a}\cos\omega t \rightarrow \ddot{\tilde{q}} + 2\delta\dot{\tilde{q}} + \omega_0^2\tilde{q} = \frac{F_0}{a}e^{(j\omega t)}$$

$$\Rightarrow -\omega^2\tilde{A}e^{(j\omega t)} + 2\delta j\omega\tilde{A}e^{(j\omega t)} + \omega_0^2\tilde{A}e^{(j\omega t)} = \frac{F_0}{a}e^{(j\omega t)}$$

$$\Rightarrow -\omega^2\tilde{A} + 2\delta j\omega\tilde{A} + \omega_0^2\tilde{A} = \frac{F_0}{a}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\delta j\omega}$$

L'amplitude du mouvement est donc :

$$A = |\tilde{A}| = \frac{F_0/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

La phase φ du mouvement (déphasage entre (t) et (t)) est donner par :

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\tilde{A})}{\mathrm{Re}(\tilde{A})} = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Finalement la solution du mouvement en régime permanent est :

$$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

4.5 Résonnance

La pulsation d'excitation ω pour laquelle l'amplitude A atteint son maximum est appelée *pulsation de résonance* (d'amplitude) ω_R . A est maximale lorsque $\dfrac{\partial A}{\partial \omega} = 0$.

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \frac{\left[-4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\delta^2\omega\right]\left(F_0/a\right)}{2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Rightarrow -4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\delta^2 = 0$$

Soit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \equiv \omega_R \Leftrightarrow \omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

A cette pulsation, l'amplitude est : $A_{\max} = \dfrac{F_0/a}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^{\,2} - 4\delta^4}} \Leftrightarrow A_{\max} = \dfrac{F_0}{a\omega_0^{\,2}} \dfrac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

Pour qu'il y ait résonance il faut que : $\omega_0^{\,2} - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow 1 - \left(\dfrac{1}{2Q^2}\right) > 0 \Rightarrow Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Le facteur de qualité doit donc être supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ l'amortissement doit être faible.

D'après l'équation : $\tan\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{A})}{\mathrm{Re}(\underline{A})} | = -\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ on a $\tan\varphi = -\infty \left(\varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right)$ lorsque $\omega = \omega_0$.

Cette pulsation est appelée pulsation de résonance de phase

4.6 Bande passante et facteur de qualité

La puissance instantanée fournie par la force d'excitation est :

La solution totale s'écrit alors comme suit : $P = \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{Fdq}{dt} = F\dot{q}$ P

En utilisant l'équation $q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ on trouve

$$P = -F_0\cos\omega t \times \omega A\sin(\omega t + \varphi) = -\frac{1}{2}\omega A F_0\left[\sin(2\omega t + \varphi) + \sin\varphi\right]$$

La puissance moyenne est

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{\pi} P dt = -\frac{1}{2}\omega A F_0 \sin\varphi = -\frac{1}{2}\omega A F_0 \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan\varphi^2}}$$

D'après les équations $A = |\underline{A}| = \dfrac{F_0/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}$ et $\tan\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(\tilde{A})}{\mathrm{Re}(\tilde{A})} = -\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

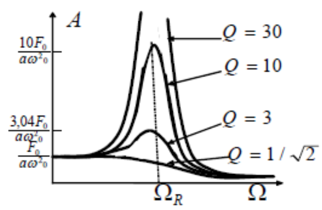
$$\langle p\rangle = \frac{\omega^2\delta\left(\frac{F_0^2}{a}\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}$$

$\langle p\rangle$ est maximale lorsque $\dfrac{\partial\langle p\rangle}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \langle p\rangle_{\max} = \dfrac{F_0^2}{4\omega a} \end{cases}$

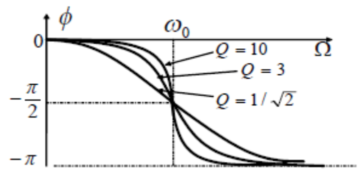
La pulsation ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles $\langle p\rangle$ est à moitié de son maximum sont appelées pulsations de coupure. La largeur $\omega_{c2}-\omega_{c1}=B$ est appelée la *Bande passante*. D'après $\langle p\rangle = \dfrac{\omega^2\delta\left(\frac{F_0^2}{a}\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}$, $\langle p\rangle = \dfrac{\langle p\rangle_{\max}}{2}$ (à faible amortissement : $\delta \ll \omega_0$) pour $\omega_{c1} \simeq \omega_0 - \delta$ *et* $\omega_{c2} \simeq \omega_0 + \delta$. Donc $B=2\delta$.

$\dfrac{\omega_0}{B} = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = Q$ est le facteur de qualité (voir chap. 3).

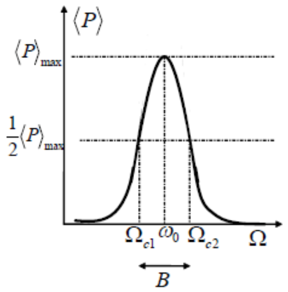
Les graphes de A, φ *et* $\langle p\rangle$ en fonction de la pulsation d'excitation ω sont :



$$A = \frac{F_0/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\lambda^2\Omega^2}}.$$



$$\phi = \tan^{-1}\left[-\frac{2\lambda\Omega}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)}\right].$$



$$\langle P\rangle = \frac{\Omega^2\lambda\left(F_0^2/a\right)}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\lambda^2\Omega^2}$$

Analogie entre les systèmes mécaniques et électriques

Le formalisme développé en cours est valable pour toute coordonnée généralisé q. Dans le cas des systèmes mécaniques q peut être $x, y, z, \theta, ...$, alors que dans le cas des systèmes électriques q est la charge q qui circule dans le circuit. Nous avons alors les tableaux suivants des analogies mécanique-électrique.

Analogie entre grandeurs

Système Mécanique			Système Electrique		
Grandeur	**réelle**	**complexe**	**Grandeur**	**réelle**	**complexe**
Coordonnée	x	$\underline{x}$	Charge	q	$\underline{q}$
Vitesse	$v = \dot{x}$	$\underline{v} = \dot{\underline{x}}$	Courant	$i = \dot{q}$	$\underline{i} = \dot{\underline{q}}$
Force	F	$\underline{F}$	Tension	E	$\underline{E}$

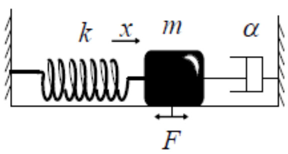
Analogie entre formules

Système Mécanique		Système Electrique	
Formule	**complexe**	**Formule**	**complexe**
Impédance mécanique	$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}}$	Impédance électrique	$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}}$
Force d'inertie	$m\frac{d\underline{v}}{dt} = jm\omega\underline{v}$	f.c.e.m d'inductance	$L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}$
Force de frottement	$\alpha\underline{v}$	Tension d'une résistance	$R\underline{i}$
Force d'un ressort	$k\underline{x} = k\int \underline{v}dt = \frac{k}{j\omega}\underline{v}$	Tension d'une capacité	$\frac{\underline{q}}{C} = \frac{1}{C}\int \underline{i}dt = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$

Analogie entre éléments et caractéristiques

Système Mécanique		Système Electrique	
Ressort	k	Capacité inverse	$\frac{1}{C}$
Inertie	m	Inductance	L
Frottement	α	Résistance	R
Pulsation de résonance	$\sqrt{k/m}$	Pulsation de résonance	$1/\sqrt{LC}$
Bande passante	$2\lambda = \alpha/m$	Bande passante	$2\lambda = R/L$
Energie d'un ressort	$\frac{1}{2}kx^2$	Energie d'un condensateur	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
Energie cinétique d'un corps	$\frac{1}{2}mv^2$	Energie d'une bobine	$\frac{1}{2}Li^2$
Puissance dissipée par frottement	αv^2	Puissance dissipée par effet Joule	Ri^2

Exemple

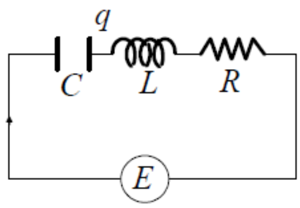


$$-k\underline{x} - \alpha\underline{v} + \underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\underline{F} = \frac{k}{j\omega}\underline{v} + jm\omega\underline{v} + \alpha\underline{v}$$

Impédance mécanique

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \frac{k}{j\omega} + jm\omega + \alpha$$



$$\frac{1}{C}\int \underline{i}dt + L\frac{d\underline{i}}{dt} + R\underline{i} - \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i} + jL\omega\underline{i} + R\underline{i}$$

Impédance électrique

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R$$

DR. GHELLAB TORKIA

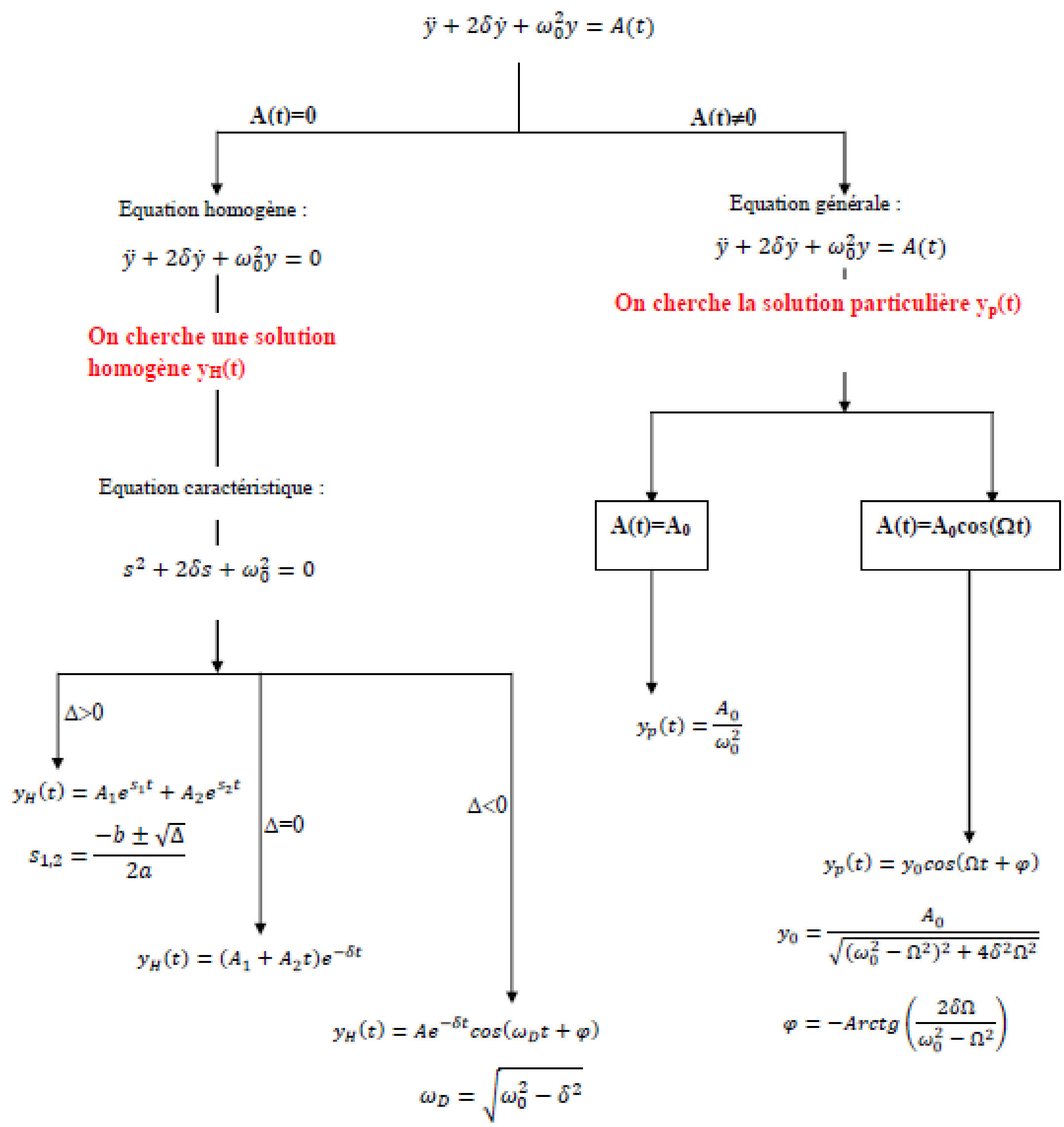


Figure 4 : Organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre