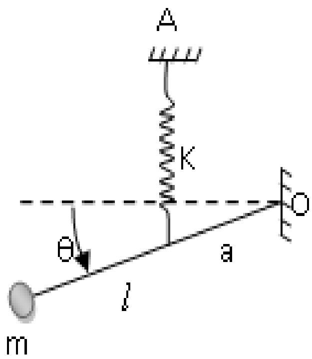
Exercice N°1 :

Une tige de longueur *l* et de masse négligeable articulée au point *O* portant à son extrémité libre une masse ponctuelle *m*. A une distance *a* de *O* de la tige on attache verticalement un ressort de raideur *k*, l'autre extrémité étant fixée à un bâti fixe au point *A*. A l'équilibre statique la tige prend une position horizontale $(\theta = 0)$.

On attache à la tige, à une distance $b = 3l/4$, un amortisseur vertical, α. Une force verticale harmonique de la forme $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$,($\Omega$ ajustable) est appliquée à la masse *m*.

1- Ecrire l'équation différentielle régissant les vibrations forcées du système en se basant sur les résultats obtenus précédemment.
2- Sachant que $m = 2kg,\ k = 250N.m^{-1},\ \alpha = 5N.m^{-1}.s^{-1}$ peut-on observer la résonance ?
3- Si oui pour quelle valeur de Ω observe-t-on la résonance dans le système ? Calculer alors l'amplitude correspondante.

Req *:* on prend $a = l/4$.



Solution :

1. $U = U_k + U_m$

L'énergie potentielle de la tige égale à zéro car la masse de la tige est négligée.

$$dU_k = -\vec{F}_k \vec{dl} = -F_k dl \cos\left(\vec{F}_k(\uparrow), \vec{dl}(\downarrow)\right)$$

$$dU_k = -F_k dl \cos(180°)$$

$$\cos(180°) = -1$$

$$dU_k = +F_k dl = kxdx \ / \ F_k = kx, dl = dx$$

$$U_k = \int dU_k = \int_0^{x_0+x} kxdx = k\int_0^{x_0+x} xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0+x} = \frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_0+x}$$

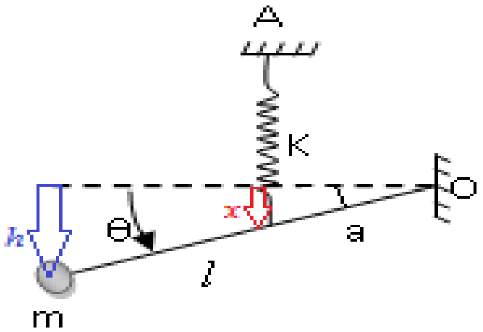
$$U_k = \frac{k}{2}\left[(x_0+x)^2 - 0\right]$$

$$U_k = \frac{k}{2}(x_0+x)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2+2xx_0+x_0^2\right) = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 + cte \,/\, \frac{k}{2}x_0^2 = cte$$

Alors

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$$



Avec

$$\sin\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\sin\theta$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte = \frac{k}{2}(a\sin\theta)^2 + k(a\sin\theta)x_0 + cte$$

$$dU_m = -\vec{F}_m d\vec{l} = -F_m dl\,\cos\left(\vec{F}_m(\downarrow), d\vec{l}(\downarrow)\right)$$

$$dU_m = -F_m dl\,\cos(0°)$$

$$\cos(0°) = +1$$

$$dU_m = -F_m dl = -mgdl \,/\, F_m = mg$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^h -mgdl = -mg\int_0^h dl = k[l]_0^h = -mg[h-0]$$

$$U_m = -mgh$$

$$\sin\theta = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\sin\theta \Rightarrow U_m = -mgl\sin\theta$$

Alors

$$U = U_k + U_m = \frac{k}{2}(a\sin\theta)^2 + k(a\sin\theta)x_0 - mgl\sin\theta + cte$$

$$U = \frac{k}{2}a^2\left(\sin\theta^2\right) + kax_0(\sin\theta) - mgl(\sin\theta) + cte$$

$$U = \frac{k}{2}a^2\left(\sin\theta^2\right) + (kax_0 - mgl)(\sin\theta) + cte$$

A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$

$$U=\frac{k}{2}a^2\left(\theta^2\right)+\left(kax_0-mgl\right)\left(\theta\right)+cte$$

Equilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{k}{2}\times a^2\times 2\theta+\left(kax_0-mgl\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}:\theta=0\Rightarrow\frac{k}{2}\times a^2\times 2\left(\theta=0\right)+\left(kax_0-mgl\right)=\left(kax_0-mgl\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0\Rightarrow\left(kax_0-mgl\right)=0\Rightarrow x_0=+\frac{mgl}{ka}$$

C'est-à-dire que le ressort est allongé de $x_0=+\frac{mgl}{ka}$

Alors

$$U=\frac{k}{2}a^2\left(\theta^2\right)+cte.$$

$$T=E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{x}=l\dot{\theta}$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Alors, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L=E_c-E_p=T-U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{k}{2}a^2\left(\theta^2\right)+cte$$

L'équation de mouvement pour des petites oscillations, est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}\right)=F\left(t\right)=F_0 l\cos\left(\Omega t\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}ml^2\times 2\dot{\theta}=ml^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{k}{2}a^2\times 2\theta=-ka^2\theta$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha\left(b\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}\alpha\left(b^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha b^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\alpha b^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha b^2\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha b^2\left(2\dot{\theta}\right)=\alpha b^2\dot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta}+ka^2\theta+\alpha b^2\dot{\theta}=F_0\,l\cos(\Omega t)$$

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{ka^2}{ml^2}\theta+\dfrac{\alpha b^2}{ml^2}\dot{\theta}=\dfrac{F_0\,l\cos(\Omega t)}{ml^2}\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+2\delta\dot{\theta}=F_\theta(\mathrm{t})\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{ka^2}{ml^2}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\delta=\frac{\alpha b^2}{ml^2}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha b^2}{2ml^2}$$

On a ; $b={}^{3l}\!/_{4}$ et $a={}^{l}\!/_{4}$

$$\ddot{\theta}+\frac{k\left(\frac{l}{4}\right)^2}{ml^2}\theta+\frac{\alpha\left(\frac{3l}{4}\right)^2}{ml^2}\dot{\theta}=\frac{F_0\,l\cos(\Omega t)}{ml^2}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{k\left(\frac{l^2}{16}\right)}{ml^2}\theta+\frac{\alpha\left(\frac{9l^2}{16}\right)}{ml^2}\dot{\theta}=\frac{F_0\cos(\Omega t)}{ml}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{16}\times\frac{k}{m}\theta+\frac{9}{16}\times\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}=\frac{F_0\cos(\Omega t)}{ml}$$

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{1}{16}\times\dfrac{k}{m}\theta+\dfrac{9}{16}\times\dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta}=\dfrac{F_0\cos(\Omega t)}{ml}\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+2\delta\dot{\theta}=F_\theta(\mathrm{t})\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{16}\times\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{1}{16}\times\frac{k}{m}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\delta=\frac{9}{16}\times\frac{\alpha}{m}\Rightarrow\delta=\frac{9}{32}\times\frac{\alpha}{m}$$

2. La résonnance du système

$$\omega_0=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\delta=\frac{9}{32}\times\frac{\alpha}{m}$$

$$\frac{\delta}{\omega_0}=\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\delta}{\omega_0}=\xi=\frac{\frac{9}{32}\times\frac{\alpha}{m}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}}=\frac{9\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\times\sqrt{\frac{\alpha}{m}}}{\frac{32}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}}=\frac{9}{8}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\times\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\times\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{9}{8}\times\frac{\alpha}{\sqrt{k\times m}}$$

Application Numérique :

On a $m = 2kg,\ k = 250 N.m^{-1},\ \alpha = 5 N.m^{-1}.s^{-1}$

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \xi = \frac{9}{8} \times \frac{\alpha}{\sqrt{k \times m}} = 0.25 < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$$

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \xi = 0.7$$

$$\Omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow \Omega_R = 10.45\, rad.s^{-\&}$$

3. L'amplitude de la résonnance :

$$\theta_{max} = \frac{F_0 / ml}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega_R^2\right) + 4\delta^2 \Omega_R^2}} = 0.023 \frac{F_0}{l}$$

θ_{max} : est proportionnelle a F_0 et inversement a *l*.

Exercice N°2 :

Un circuit RLC série est soumis à une f.é.m sinusoïdale $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$. En faisant varier la pulsation ω de la f.é.m on note qu'il se produit une résonance en tension aux bornes de la capacité inconnue C Sachant que $V_{c(\max)} = 60V,\ E_0 = 3V,\ R = 75\Omega,\ L = 0.8\, mH$.

1) Déterminer le coefficient de surtension Q
2) Évaluer la capacité C et la pulsation propre ω_0 du circuit.
3) Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ et ses limites ω_1, ω_2.
4) Trouver la puissance que la source doit fournir au circuit pour y entretenir des oscillations dont l'amplitude maximale de l'intensité du courant est $I_0 = 30\, mA$.

Solution :

1 . $Q = \frac{V_{c(\max)}}{E_0} = \frac{60}{3} = 20$.

2.

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0}{2\delta} \Rightarrow \omega_0 = 2\delta Q$$

$$2\delta = \frac{R}{L} = \frac{75}{0.8 \times 10^{-3}} = 93750\ s^{-1}$$

$$\omega_0 = 2\delta Q = 18.75\times10^{+5}\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 355.5\times10^{-12}F\ .$$

3. $\Delta\omega = 2\delta = 93750\ s^{-1}$

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 18.75\times10^{+5} - \frac{93750}{2} = 18.25\times10^{+5}\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_2 \approx \omega_0 + \Delta\omega = 19.22\times10^{+5}\ rad.s^{-1}$$

4.

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 18.75\times10^{+5} - \frac{93750}{2} = 18.25\times10^{+5}\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_2 \approx \omega_0 + \Delta\omega = 19.22\times10^{+5}\ rad.s^{-1}$$

$$P = \frac{1}{2}RI_0^2 = \frac{1}{2}75\left(30\times10^{-3}\right)^2 = 0.034\ watt$$

Exercice N°3 :

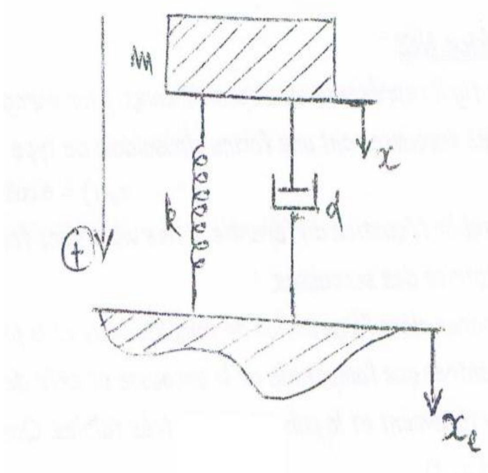
La figure suivante représente un dispositif conçu pour enregistrer les secousses séismiques. On admet que les secousses ont une forme sinusoïdale de type :

$$x_e(t) = a\cos(\omega_e t)$$

1- Etablir l'équation différentielle des vibrations forcées de la masse m dues à la force excitatrice des secousses.

2- Donner alors l'expression de l'amplitude x_0 et la phase initiale φ_0 en fonction de ω_e .

3- Montrer que l'amplitude de la secousse et celle de la masse sont identiques dans le cas où l'amortissement et la pulsation sont très faibles. Quelle est dans ce cas le déphasage entre $x_e(t)$ et $x(t)$.



Solution :

1. Le ressort subit une déformation de ses deux extrémités x du côté de la masse et x_e du côté du sol.

$$F_r = -k\left(x - x_e\right)$$

De même l'amortissement, qui en faisant déplacer ses deux extrémités avec des vitesses $(\dot{x}; \dot{x}_e)$ respectivement. : $f_r = -\alpha\left(\dot{x} - \dot{x}_e\right)$.

Donc :

$$m\ddot{x} = f_f + F_r = -k\left(x - x_e\right) - \alpha\left(\dot{x} - \dot{x}_e\right) = -kx + kx_e - \alpha\dot{x} + \alpha\dot{x}_e$$
$$m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = kx_e + \alpha\dot{x}_e$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = \frac{k}{m}x_e + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_e \ avec\ x_e\left(t\right) = a\cos\left(\omega_e t\right)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = C\cos\left(\omega_e t + \theta\right) \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} = C\cos\left(\omega_e t + \theta\right) \end{cases} \Rightarrow C = a\sqrt{\omega_0^4 + 4\delta^2\omega_e^2}\ et\ tg\,\theta = \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2}$$

La solution de cette équation est $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x_h\left(t\right) \underset{t\to 0}{\to} 0$$

$$x\left(t\right) \approx x_p\left(t\right) = A\cos\left(\omega_e t + \varphi\right)$$

$$A = \frac{a\sqrt{\omega_0^4 + 4\delta^2\omega_e^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_e^2}}$$

$$tg\varphi = -\frac{2\delta\omega_e^3}{\omega_0^2\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right) + 4\delta^2\omega_e^2}$$

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2\bar{x} + 2\delta\dot{\bar{x}} = \bar{C}e^{j\omega_e t}$$
$$\bar{x} = \bar{A}e^{j\omega_e t}$$
$$\bar{A}\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j2\delta\omega_e\right)e^{j\omega_e t} = \bar{C}e^{j\omega_e t}$$

$$\bar{A} = \frac{\bar{C}}{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j2\delta\omega_e\right)}$$

$$\left\|\bar{A}\right\| = \frac{C}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j2\delta\omega_e\right)}}$$

$$tg\varphi = \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A} = -\frac{2\delta\omega_e^3}{\omega_0^2\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right) + 4\delta^2\omega_e^2}$$

3. $\delta, \omega_e <<<$ Alors $4\delta^2\omega_e^2 << \omega_0^4\ et\ \omega_e^2 << \omega_0^2 \Rightarrow A \approx a, tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

DR. GHELLAB TORKIA