Chapitre 7

Propagation d’ondes mécaniques dans différents milieux

7.1 Rappel théorique :

Nous allons voir comment une onde peut progresser dans une corde.

Soit un fil de longueur *l* et de masse *m*, la masse linéique du fil (supposée constante le long de celui-ci) est alors :

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

Par un léger choc, créons une petite perturbation transversale (afin de ne pas déformer le câble et maintenir constant sa masse linéique). Isolons, dans la zone perturbée, un élément de fil, de longueur *dl* :

Approximations :

Chaque élément de la corde peut être découpé de façon infinitésimale de façon à être presque parallèle à l'axe x. Les angles $\theta(x,t), \theta(x+dx,t)$ sont donc considérés comme petits

- ❖ La corde est considérée comme déformable mais non allongeable donc la norme des forces dans la corde est constante en tout point quel que soit la déformation.

Pour la suite du raisonnement, nous nous servons de la figure 7.1 ci-dessous :

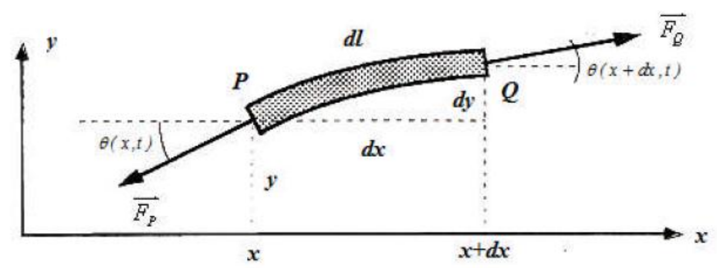


Figure 7.1

Le bilan des forces donne :

$$\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\cos\theta_{x+dx} - \cos\theta_x\right) \cong 0 \\ F\left(\sin\theta_{x+dx} - \sin\theta_x\right) \cong dm\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases} \quad Avec\ dm = \mu dl$$

Ce qui signifie qu'il n'y pas de déplacements selon *x*, et $\vec{a}$ représente l'accélération selon *y*. Si les angles sont vraiment petits, nous avons le premier terme du développement qui donne :

$dx \cong dl$

$\sin x \cong \tan x \cong \dfrac{\partial y}{\partial x}$

La loi de Newton appliquée à la masse $dm = \mu dx$ donne (nous considérons que chaque point de masse se déplace seulement selon *y* car il n'y a pas allongement) :

Les tangentes sont données par les dérivées partielles de la fonction *y*(*x*) :

$$F\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right]\cong \mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Il en résulte l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Elle se nomme "l'équation des cordes vibrantes".

Nous vérifions les unités de $\frac{F}{\mu}$ sont celles du carré d'une vitesse $(m/s)^2$, comme l'exige l'analyse dimensionnelle. Pour simplifier l'écriture, nous posons :

$$V=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

7.2 Applications :

Probléme1 :

Soit une corde vibrant transversalement dans le plan Oxy. L'équation de mouvement est de forme $y = (x,\, t)$. Soient Tet μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre.

- Ecrire l'équation de propagation de l'onde.
- En déduire la célérité V des oscillations.

On considère que l'ébranlement original est sinusoïdal.

- Déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.

Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance a, lâchée sans vitesse initiale.

- Déterminer la forme de la solution générale.
- Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont multiples entier d'une fréquence fondamentale f_1.

Application numérique : Pour la troisième corde de la guitare de longueur a=63cm en nylon, de masse volumique ρ=1200 kg/m^3 et de section S=0,42mm^2.

- Calculer la tension de cette corde pour qu'elle puisse émettre le son fondamental f_1=147Hz.

Solution :

- L'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

▪ Les solutions de l'équation de propagation de l'onde libre :

$$y = A(x)T(t) \Rightarrow \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} = V^2 \frac{\ddot{B}(y)}{B(y)} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = A_1 \cos\frac{\omega}{V}x + A_2 \sin\frac{\omega}{V}x \\ B(t) = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t \end{cases}$$

▪ La corde est maintenant fixée, les conditions aux limites nous donnent :

$$\begin{cases} y(x=0) = y(x=a) = 0 \\ \dot{y}(t=0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases} et\ k_x^{(n)} = \left(\frac{\omega}{V}\right)_x \frac{\pi n}{a} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = A_2 \sin k_x^{(n)} x \\ B(t) = B_1 \cos\omega_n t \end{cases}$$

Ainsi la solution finale :

$$y_T(x,t) = \sum_n \Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos\omega^{(n)} t$$

$$Avec\ \Lambda = A_2 B_1$$

▪ Les fréquences de vibration de la corde :

$$k_x^{(n)} = \frac{\omega_n}{V} = \frac{2\pi f_n}{V} = \frac{\pi n}{a} \Rightarrow f_n = n f_1$$

$$Avec\ f_1 = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

▪ Application numérique :

$$f_1 = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = 4a^2 \rho S f_1^2 \Rightarrow T = 17.3N$$

Probléme2 :

Une corde vibrante homogène et sans raideur, de masse linéique μ, tendue par une force de tension d'intensité F constante. La corde au repos et horizontale et matérialisation par l'axe Ox. Au cours de la propagation d'une onde, le point M de la corde, d'abscisse x au repos subit le déplacement transversale $y\,(x,t)$ à l'instant$t$. On néglige l'influence de la pesanteur sur la corde, mais on tient compte de la force d'amortissement dirigée suivant l'axe Ox, $Ox \perp Oy$ et de valeur algébrique : $-bV\ (x,\ t)$ par unité de longueur ($avec\ b$>0), où $V(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}$ est la vitesse transversale de l'élément de la corde d'abscisse x à l'instant t.

▪ Etablir l'équation aux dérivées partielles du déplacement $y\,(x,\,t)$.

On définit k le vecteur d'onde de cette onde. On supposera l'amortissement faible (b<<$\mu\omega$).

▪ Etablir la relation de dispersion sous la forme : $k(\omega) = \omega\frac{(1 - jg(\omega))}{c}$

▪ Exprimer les coefficients g et c en fonction des données $F,\ \mu\ et\ b$.

▪ En déduire l'équation de l'onde $y\,(x,\,t)$. Que peut-on dire sur $y\,(x,\,t)$?

DR. GHELLAB TORKIA

On définit l'impédance mécanique complexe

$$\tilde{z}=\frac{T_y}{V\left(x,t\right)}$$

Où T_y désigne la projection sur Oy de la tension de la corde en $M\,(x)$.

▪ Exprimer l'impédance mécanique complexe $\tilde{Z}$ de la corde en fonction de F, μ, b *et* ω.

Solution :

▪ L'équation aux dérivées partielles du déplacement $y\,(x,\,t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{b}{F}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$Avec\,V=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

▪ La relation de dispersion :

$$y\left(t,x\right)=Ae^{j\left(\omega t-kx\right)}\Rightarrow k\left(\omega\right)\cong\frac{\omega}{c}\left(1-j\,\frac{b}{2j\,\omega\mu}\right)$$

$$Avec\;c=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\;et\;\;g\left(\omega\right)=\frac{b}{2\omega\mu}$$

▪ L'équation de l'onde $y\,(x,\,t)$:

$$y\left(t,x\right)=Ae^{-\left(\frac{bx}{2\mu c}\right)}e^{j\left(\omega t-\frac{x}{c}\right)}$$

C'est une onde progressive amortie.

▪ L'impédance mécanique complexe :

$$\tilde{z}=\frac{T_y}{V\left(x,t\right)}=F\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}\Rightarrow\tilde{z}=-\sqrt{\mu F}\left(1-j\,\frac{b}{2\mu\omega}\right)$$

Probléme3 :

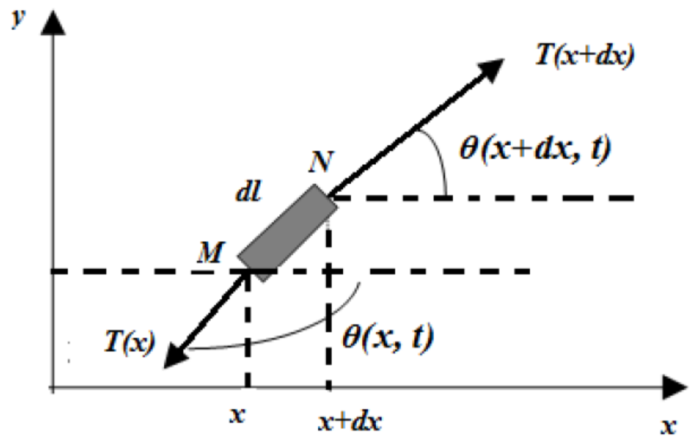
Partie A : *Equation de la corde vibrante :*

Une corde Homogène et inextensible, de masse linéique μ, est tendue horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension F constante, voir la figure.

La corde, déplace de sa position d'équilibre, acquiert un mouvement décrit à l'instant t par le déplacement quasi vertical $y\,(x,\,t)$, compté à partir de sa position d'équilibre, d'un point M d'abscisse x au repos.

A l'instant t, la tension $T\,(x,\,t)$ exercée par la partie de la corde à droite de M sur la partie de la corde à gauche de M, fait un petit angle $\theta\,(x,\,t)$ avec l'horizontale.

On admettra θ petit, faible courbure de la corde, et on négligera les forces de pesanteur.



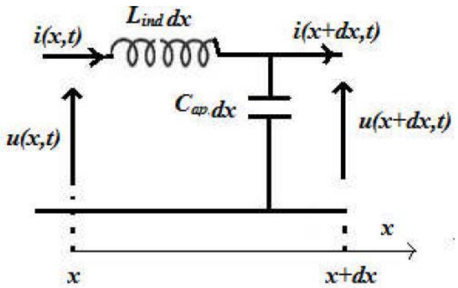
Equation des cordes vibrantes : On considère le tronçon de la corde compris entre l'abscisse x, $x+dx$.

▪ Etablir l'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante.

▪ En déduire la célérité V de l'onde en fonction de μ et F.

Partie B : *Analogie électrique :*

Soit une tranche d'une cellule électrique sans perte représentée dans la figure comme suit :



▪ Montrer que la cellule électrique représentée ci-dessus un circuit analogique d'un élément de corde vibrante de longueur dx

▪ Exprimer les correspondants mécaniques de l'inductance linéique L_{ind}, de la capacité linéique C_{ap}, de l'intensité du courant $i\,(x,\,t)$ et de la tension électrique $u\,(x,\,t)$.

Solution :

Partie A :

▪ L'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante :

$$\sum \vec{F} = dm\,\vec{a} \Rightarrow T\,(x,t) = T\,(x+dx,t) = F \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$Avec\,V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Partie B :

▪ L'équation de propagation de l'onde dans la cellule électrique :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C_{ap}^{*}\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind}^{*}C_{ap}^{*}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L_{ind}^{*}\frac{\partial i}{\partial t}$$

▪ L'équivalence mécanique-électricité :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind}^{*}C_{ap}^{*}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Avec

$$L_{ind}^{*} \Leftrightarrow \mu$$

$$C_{ap}^{*} \Leftrightarrow \frac{1}{F}$$

$$i\left(x,t\right) \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial t}$$