DEUXIEME PARTIE :

ONDES MECANIQUES

Chapitre 6

Généralités sur le phénomène de propagation

DR. GHELLAB TORKIA

6.1 Rappel théorique

L'onde mécanique est une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu matériel élastique, homogène et isotrope sans transport de matière, comme le montre la figure 6.1.

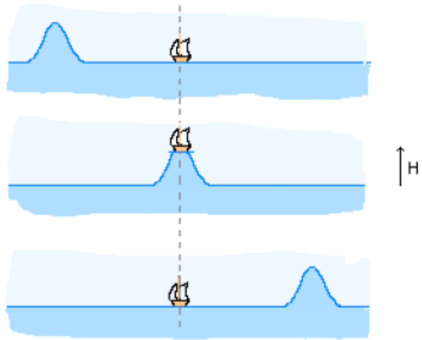

Figure 6.1

L'onde mécanique se propage avec transport d'énergie.

- Il existe deux types de milieux :
    1. Milieu dispersif : La célérité de l'onde dépend des caractéristiques du milieu et de la longueur d'onde.

Exemple : ce phénomène se perçoit par exemple dans l'air lorsque l'amplitude est importante (dans le cas du tonnerre, les ondes de haute fréquence se propagent plus rapidement que les ondes de basse fréquence, l'air est dispersif)

2. Milieu non dispersif : La célérité dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation.

- Il existe deux types d'onde :
- Onde longitudinale : L'ébranlement est parallèle à la direction de propagation, comme le montre la figure 6.2.

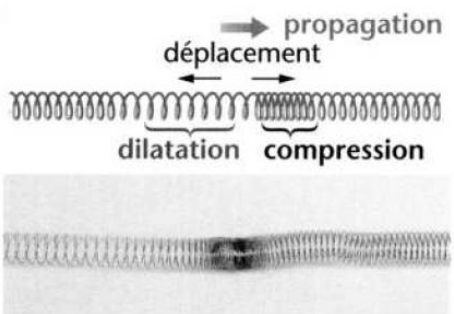

Figure 6.2

- Onde transversale : L'ébranlement est perpendiculaire à la direction de propagation comme le montre la figure 6.3.

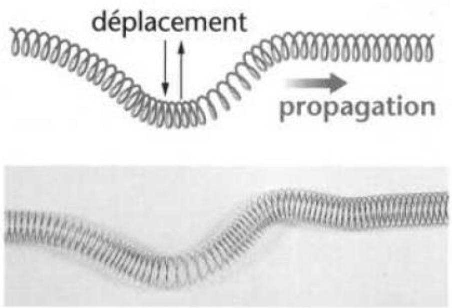

Figure 6.3

La célérité de l'onde est constante dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non dispersif. Elle dépend de l'inertie, de la rigidité et de la température du milieu.

- L'onde mécanique se propage à partir d'une source sous différentes formes :
- A une dimension : Mouvement le long d'une corde, d'un ressort.
- A deux dimensions : Mouvement circulaire à la surface d'eau.

Exemple : Lorsqu'on jette une pierre sur une surface d'eau, comme la montre la figure 6.4 ci-dessous :

Figure 6.4

Le phénomène apparent dans l'image est une onde circulaire se propageant dans un plan

- A trois dimensions : Ondes sonores.

Les ondes mécaniques présentent une double périodicité :

- Périodicité temporelle : Caractérisée par la période T (s).
- Périodicité spatiale : Caractérisée par la longueur d'onde $\lambda_m\,(m)$.

Le phénomène de diffraction est caractéristique des ondes. Il se manifeste lorsqu'une onde rencontre un obstacle ou une ouverture dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, voire la figure 6.5 :

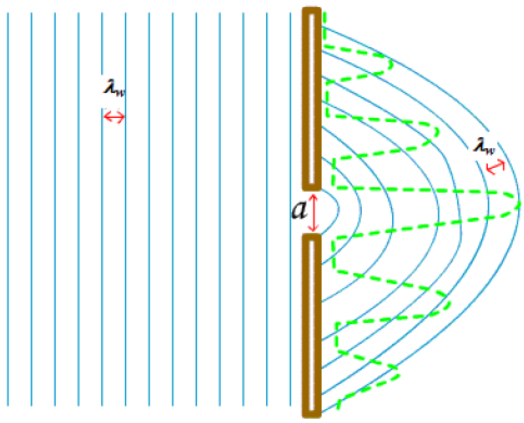

Figure 6.5

- ❖ Si deux ondes identiques se rencontrent, on va voir qu'elles ne se renforcent pas forcement, au contraire ! elles peuvent s'annuler : c'est le phénomène d'interférence, voire la figure 5.6:

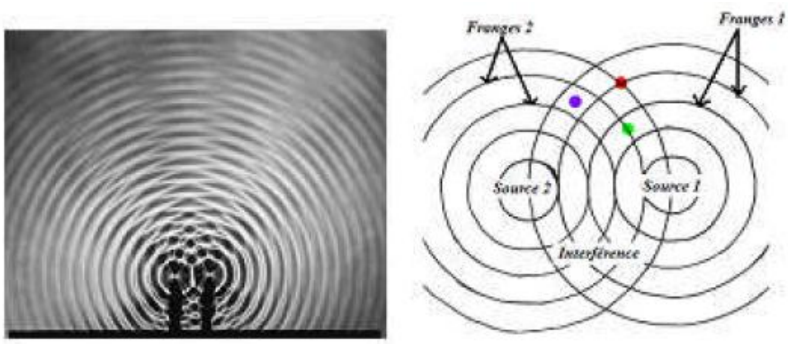

Figure 6.6

D'autres exemples pour le phénomène d'interférence sont :

- ❖ L'expérience de Young : la lumière passe à travers deux trous séparés par une distance *d*. Il apparait sur l'écran alors des interférences circulaires comme le montre la figure 6.7 ci-dessus :

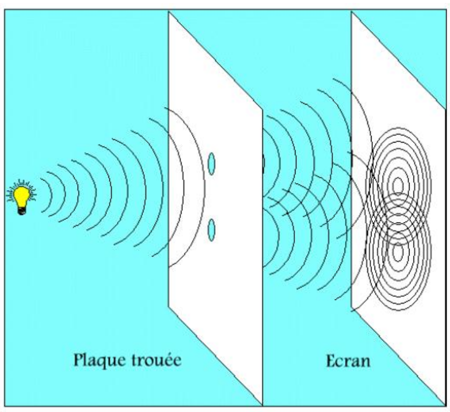

Figure 6.7

Les ondes émises par deux hauts parleurs comme le montre la figure 6.8 :

Figure 6.8

6.2 Applications :

Probléme1 :

Une source émet une onde mécanique ψ de fréquence ν se propageant dans la direction ox avec une vitesse V constante.

▪ Ecrire l'équation de propagation

Posant les variables suivantes : $p = t + \frac{x}{V}, q = t - \frac{x}{V}$

- ✓ Montrer que la solution de l'équation est la somme de deux types de signaux.
- ✓ En déduire la forme de la solution dans le cas d'un milieu homogène linéaire et infini en régime sinusoïdal

Solution :

▪ L'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

C'est une équation aux dérivées partielles unidimensionnelles.

▪ Les solutions générales en utilisant la méthode du changement de variables sont :

$$\begin{cases} p = t + \dfrac{x}{V} \\ q = t - \dfrac{x}{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial p \partial q} = 0 \Rightarrow \psi_1(q) \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial q \partial p} = 0 \Rightarrow \psi_2(p) \end{cases} \Rightarrow \psi_T = \psi_1(q) + \psi_2(p)$$

▪ En régime sinusoïdal, la solution est de forme : $\psi(t,x) = A \cos\omega\left(t - \left(\frac{\omega}{V}\right)x\right)$

Probléme2 :

Une onde mécanique S de fréquence ν se propageant dans un milieu a symétrie radiale avec une vitesse V constante.

▪ Ecrire l'équation de propagation de S.

▪ Résoudre l'équation aux dérivées partielles.

▪ Exprimer la solution générale dans le cas d'un milieu infini en régime sinusoïdal. Interpréter les résultats.

Solution :

▪ L'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2 \Delta S$$

▪ La solution générale dans le cas d'un régime sinusoïdal :

$$S(r,t) = \left(\frac{1}{r}\right)\left[f\left(t-\left(\frac{r}{V}\right)\right)+g\left(t+\left(\frac{r}{V}\right)\right)\right] \quad avec\ r^2 = x^2+y^2+z^2$$

▪ La solution générale dans le cas d'un régime sinusoïdal :

$$S(r,t) = \left(\frac{1}{r}\right)\left[\cos\left(t-\left(\frac{r}{V}\right)\right)\right] \quad avec\ r^2 = x^2+y^2+z^2$$

▪ On obtient une onde sphérique incidente sinusoïdale comme le montre la figure

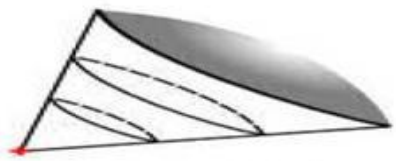

Figure 6.8 : Propagation d'une onde sphérique

Le facteur $\left(\frac{1}{r}\right)$ représente l'amortissement de l'amplitude de l'onde sphérique qui est due à la répartition énergétique de l'onde dans toutes les directions de la même manière.

Probléme3 :

Soit une onde mécanique ψ de fréquence ν se propageant dans le plan (Oxy) avec une vitesse V constante.

▪ Ecrire l'équation de propagation.

▪ Déterminer les solutions en utilisant la méthode de séparation des variables.

▪ On pose les conditions suivantes :

$$\psi(x=0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(y=0) = 0$$

▪ Déterminer les solutions générales.

Solution :

▪ L'équation de propagation a deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

▪ Les solutions de l'équation différentielle par la méthode de séparation des variables :

$$S_T(t,x,y) = A(x)B(y)T(t) \Rightarrow \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} + \frac{\ddot{B}(y)}{B(y)} = \frac{1}{V^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = Cste$$

$$\begin{cases} \ddot{A}(x) + k_x^2 A(x) = 0 \\ \ddot{B}(y) + k_y^2 B(y) = 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

$Avec$

$$\begin{cases} k_x^2 + k_y^2 = k_0^2 \\ k_0 = \dfrac{\omega}{V} \end{cases}$$

$Alors$

$$\begin{cases} A(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ B(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \\ T(t) = T_1 \cos \omega t + T_2 \cos \omega t \end{cases}$$

▪ L'espace de propagation est limité (fini), on obtient des ondes stationnaires dans les trois directions.

❖ En appliquant les conditions aux limites on obtient :

$$\begin{cases} \psi(x=0) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(y=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases} \; et \;\; k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = A_2 \sin k_x^{(n)} x \\ B(y) = B_1 \cos k_y y \end{cases}$$

❖ Les solutions générales sont :

$$S_T(t,x,y) = \sum_n \Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos k_y^{(m)} y T(t)$$

$$Avec \; \Lambda = A_2 B_2$$