*Chapitre 5 : **Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté***

5.1 Degrés de libertés

Les variables indépendantes nécessaires à la description d'un système en mouvement sont appelées *degrés de liberté*. S'il y a N variables indépendantes q_i, on écrit N équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_1}\right)=-\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_1}+F_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_2}\right)=-\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_2}+F_2(t) \\ . \\ . \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_N}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_N}\right)=-\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_N}+F_N(t) \end{cases}$$

5.1.1 Types de couplage

5.1.1.a Couplage par élasticité

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un ressort (capacité).

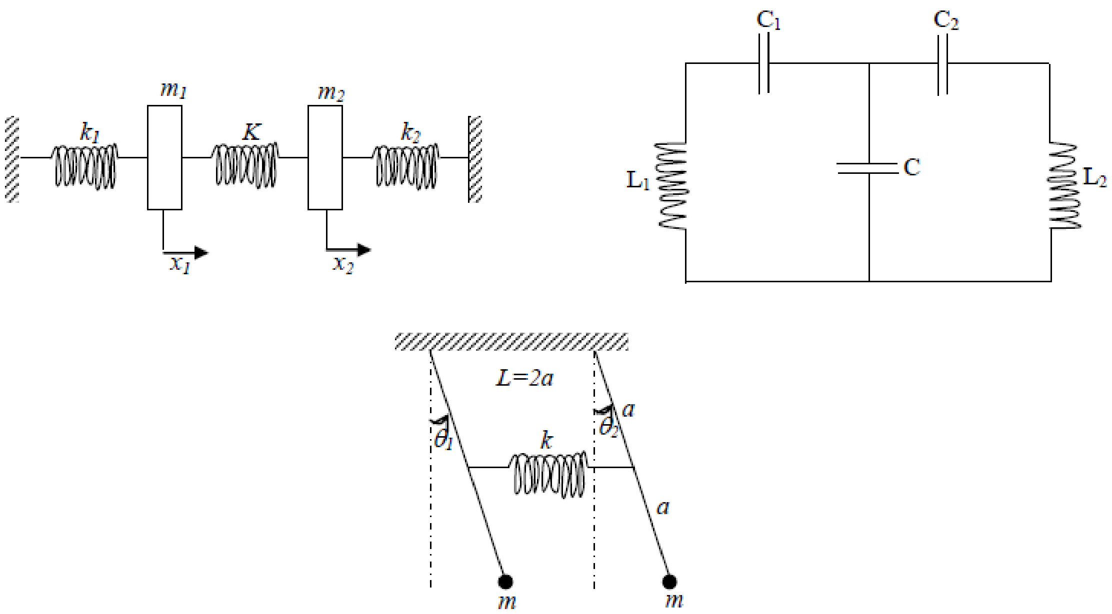


Figure 5.1 : Différents systèmes mécanique et électrique couplés par élasticité

5.1.1.b Couplage inertiel

Le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse (bobine).

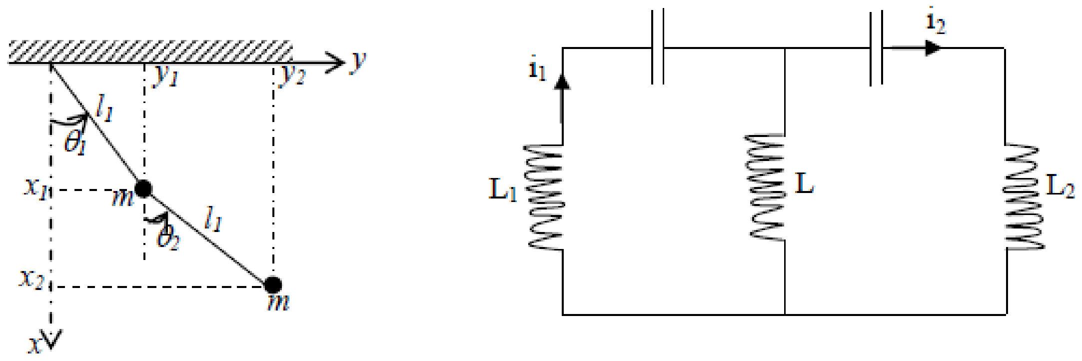


Figure 5.2 : Systèmes mécaniques et électriques couplés par inertie

5.1.1.c Couplage visqueux

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur (résistance).

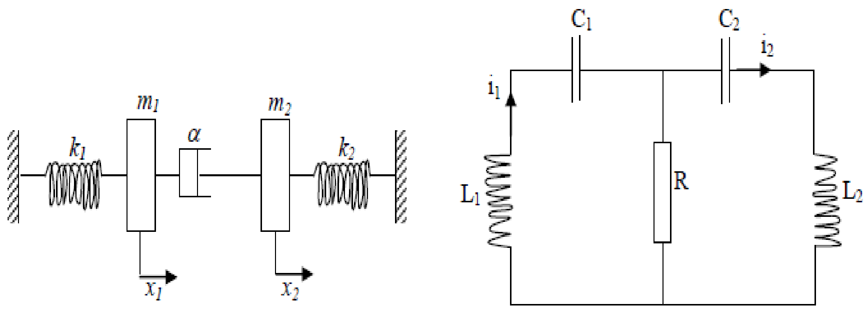


Figure 5.3 : Couplage visqueux des différents systèmes mécaniques et électriques

5.2 Systèmes libres à deux degrés de libertés

5.2.1 Equation du mouvement

Soit le système libre ci-contre. Les deux variables indépendantes sont x_1 et x_2. k est appelé *élément de couplage*.

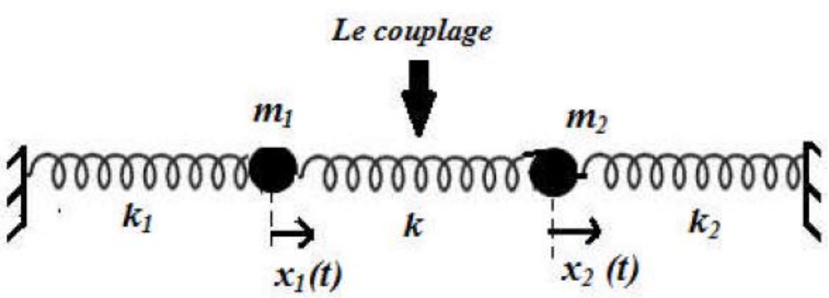


Figure 5.4 : Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degrés de liberté

Pour l'énergie cinétique on a s'écrit comme suit :

$$E_c = T = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = U = \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2\right)^2$$

D'où le Lagrangien s'écrit : $L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2\right)^2$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k \left(-2 x_1 x_2\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 + k x_1 x_2$$

Les deux équations de Lagrange s'écrivent : ($Pour\ D$=0, F=0: $systeme\ non\ amorti\ et\ non\ forc$é)

Le système différentiel couplé devient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1, \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -k_1 x_1 - k x_1 + k x_2 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2, \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -k_2 x_2 - k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \left(k_1 + k\right) x_1 - k x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \left(k + k_2\right) x_2 - k x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{\left(k_1 + k\right)}{m_1} x_1 - \dfrac{k}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{\left(k + k_2\right)}{m_2} x_2 - \dfrac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases}$$

5.2.2 Modes propres (normaux)

En mode normale (ou propre) la solution de l'équation précédente est la forme d'une superposition des deux modes propres, comme suit :

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$.

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

A_1, A_2, φ, Dépendant des conditions initiales. Pour trouver ω, utilisons la représentation complexe :

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \to \tilde{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t+\varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \to \tilde{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t+\varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \tilde{x}_2 = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = j\,\omega \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = j\,\omega \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_1 = (j\,\omega)^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \ddot{\tilde{x}}_2 = (j\,\omega)^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{(k_1+k)}{m_1}x_1 - \dfrac{k}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{(k+k_2)}{m_2}x_2 - \dfrac{k}{m_2}x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \dfrac{(k_1+k)}{m_1}\tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m_1}\tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \dfrac{(k+k_2)}{m_2}\tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m_2}\tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \dfrac{(k_1+k)}{m_1}\tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m_1}\tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \dfrac{(k+k_2)}{m_2}\tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m_2}\tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1+k)}{m_1}\right)\tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \left(\dfrac{k}{m_1}\right)\tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ \left(-\omega^2 + \dfrac{(k+k_2)}{m_2}\right)\tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \left(\dfrac{k}{m_2}\right)\tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1+k)}{m_1}\right)\tilde{A}_1 - \left(\dfrac{k}{m_1}\right)\tilde{A}_2 = 0 \\ \left(-\omega^2 + \dfrac{(k+k_2)}{m_2}\right)\tilde{A}_2 - \left(\dfrac{k}{m_2}\right)\tilde{A}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1+k)}{m_1}\right)\tilde{A}_1 - \left(\dfrac{k}{m_1}\right)\tilde{A}_2 = 0 \\ -\left(\dfrac{k}{m_2}\right)\tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + \dfrac{(k+k_2)}{m_2}\right)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + a\right)\tilde{A}_1 - b\tilde{A}_2 = 0 \\ -c\tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + d\right)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{k+k_1}{m_1}, b = \frac{k}{m_1}, c = \frac{k}{m_2}, d = \frac{k+k_2}{m_2}.$$

Pour que l'équation soit vraie sans que $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ soient tous les deux nuls, il faut que son *déterminant caractéristique* soit nul :

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (-\omega^2+a) & -b \\ -c & (-\omega^2+d) \end{vmatrix} = (-\omega^2+a)(-\omega^2+d) - (-c)(-b) = 0$$

$$\Delta(\omega) = \omega^4 - \omega^2 d - \omega^2 a + ad - bc = \omega^4 - (d+a)\omega^2 + (ad-bc) = 0$$

Ceci nous donne *l'équation caractéristique* :

$$\omega^4 - (d+a)\omega^2 + (ad-bc) = 0$$

Les deux solutions réelles et positives ω_1 et ω_2 de cette équation sont appelées *pulsations propres* ou *normales*. La plus petite est appelée la *fondamentale*, l'autre est appelée *l'harmonique*.

Premier mode propre : Pour $\omega=\omega_1$, le système implique que :

$$\begin{cases} \left(-\omega^2+a\right)\tilde{A}_1 - b\tilde{A}_2 = 0 \\ -c\tilde{A}_1 + \left(-\omega^2+d\right)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2+a\right)\tilde{A}_1 = b\tilde{A}_2 \\ \left(-\omega^2+d\right)\tilde{A}_2 = c\tilde{A}_1 \end{cases}$$

$\frac{\tilde{A}_1(1)}{\tilde{A}_2(1)} = \frac{-\omega_1^2+d}{c} > 0$.

La vibration est dite en *phase* car la solution s'écrit dans ce cas $\begin{cases} x_{1(1)} = A_{1(1)}\cos\left(\omega_1 t+\varphi\right) \\ x_{2(1)} = A_{2(1)}\cos\left(\omega_1 t+\varphi\right) \end{cases}$

Deuxième mode propre : Pour $\omega=\omega_2$, le système implique que :

$\frac{\tilde{A}_1(2)}{\tilde{A}_2(2)} = \frac{-\omega_2^2+d}{c} < 0$. La vibration est dite en *opposition de phase* car la solution s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} x_{1(2)} = A_{1(2)}\cos\left(\omega_2 t+\varphi\right) \\ x_{2(2)} = -A_{2(2)}\cos\left(\omega_2 t+\varphi\right) \end{cases}$$

Dans le cas général, le système vibre dans une *superposition* de ces deux modes propres.

5.3 Système forces a deux degrés de libertés

5.3.1 Equations de mouvement

Soit le système ci- contre.

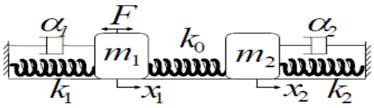


Figure 5.5 : Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degrés de liberté

Pour l'énergie cinétique on a s'écrit comme suit :

$$E_c = T = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = U = \frac{1}{2}k\left(x_1-x_2\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}k_i x_i^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_0\left(x_1-x_2\right)^2$$

D'où le Lagrangien s'écrit : $L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k_0\left(x_1-x_2\right)^2$

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2-\frac{1}{2}k_2x_2^2-\frac{1}{2}k_0\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)$$

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2-\frac{1}{2}k_2x_2^2-\frac{1}{2}k_0x_1^2-\frac{1}{2}k_0x_2^2-\frac{1}{2}k_0\left(-2x_1x_2\right)$$

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2-\frac{1}{2}k_2x_2^2-\frac{1}{2}k_0x_1^2-\frac{1}{2}k_0x_2^2+k_0x_1x_2$$

Les deux équations de Lagrange s'écrivent : ($Pour\ D=\frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\alpha_2\dot{x}_2^2\ et\ F_0\cos\omega t$)

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}=+F\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2}=0\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1,\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=-k_1x_1-k_0x_1+k_0x_2,\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}=\alpha\dot{x}_1\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_2,\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=-k_2x_2-k_0x_2+k_0x_1,\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2}=\alpha\dot{x}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1+\left(k_1+k_0\right)x_1+\alpha_1\dot{x}_1-k_0x_2=F_0\cos\omega t\\ m_2\ddot{x}_2+\left(k_0+k_2\right)x_2+\alpha_2\dot{x}_2-k_0x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}_1+\frac{\left(k_1+k_0\right)}{m_1}x_1-\frac{k_0}{m_1}x_2+\frac{\alpha_1}{m_1}\dot{x}_1=\frac{F_0}{m_1}\cos\omega t\\ \ddot{x}_2+\frac{\left(k_0+k_2\right)}{m_2}x_2-\frac{k_0}{m_2}x_1+\frac{\alpha_2}{m_2}\dot{x}_2=0\end{cases}$$

5.3.2 Résonance et antirésonance

($Avec\ D$=0 $et\ F$≠0: $systéme\ forcé\ mais\ non\ amorti$.) La solution permanente est :

$$\begin{cases}x_1=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)\\ x_2=A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)\end{cases}$$

A_1, A_2, φ_2 dépendent de la pulsation d'excitation ω et de F_0. Pour trouver A_1, A_2, utilisons la représentation complexe

Lorsque D= 0 :

$$\begin{cases}x_1=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)\rightarrow\tilde{x}_1=A_1e^{j\left(\omega t+\varphi_1\right)}=\tilde{A}_1e^{j\omega t}\\ x_2=A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)\rightarrow\tilde{x}_2=A_2e^{j\left(\omega t+\varphi_2\right)}=\tilde{A}_2e^{j\omega t}\end{cases}$$

$$F\left(t\right)=F_0\cos\omega t\rightarrow\tilde{F}\left(t\right)=F_0e^{j\omega t}$$

$$\begin{cases}\tilde{x}_1=\tilde{A}_1e^{j\omega t}\\ \tilde{x}_2=\tilde{A}_2e^{j\omega t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1=j\omega\tilde{A}_1e^{j\omega t}\\ \dot{\tilde{x}}_2=j\omega\tilde{A}_2e^{j\omega t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{\tilde{x}}_1=\left(j\omega\right)^2\tilde{A}_1e^{j\omega t}=-\omega^2\tilde{A}_1e^{j\omega t}\\ \ddot{\tilde{x}}_2=\left(j\omega\right)^2\tilde{A}_2e^{j\omega t}=-\omega^2\tilde{A}_2e^{j\omega t}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{(k_1+k_0)}{m_1}x_1 - \dfrac{k_0}{m_1}x_2 = \dfrac{F_0}{m_1}e^{j\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{(k_0+k_2)}{m_2}x_2 - \dfrac{k_0}{m_2}x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\omega^2\tilde{A}_1e^{j\omega t} + \dfrac{(k_1+k_0)}{m_1}\tilde{A}_1e^{j\omega t} - \dfrac{k_0}{m_1}\tilde{A}_2e^{j\omega t} = \dfrac{F_0}{m_1}e^{j\omega t} \\ -\omega^2\tilde{A}_2e^{j\omega t} + \dfrac{(k_0+k_2)}{m_2}\tilde{A}_2e^{j\omega t} - \dfrac{k_0}{m_2}\tilde{A}_1e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2\tilde{A}_1e^{j\omega t} + \dfrac{(k_1+k_0)}{m_1}\tilde{A}_1e^{j\omega t} - \dfrac{k_0}{m_1}\tilde{A}_2e^{j\omega t} = \dfrac{F_0}{m_1}e^{j\omega t} \\ -\omega^2\tilde{A}_2e^{j\omega t} + \dfrac{(k_0+k_2)}{m_2}\tilde{A}_2e^{j\omega t} - \dfrac{k_0}{m_2}\tilde{A}_1e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1+k_0)}{m_1}\right)\tilde{A}_1e^{j\omega t} - \left(\dfrac{k_0}{m_1}\right)\tilde{A}_2e^{j\omega t} = \dfrac{F_0}{m_1}e^{j\omega t} \\ \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_0+k_2)}{m_2}\right)\tilde{A}_2e^{j\omega t} - \left(\dfrac{k_0}{m_2}\right)\tilde{A}_1e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1+k_0)}{m_1}\right)\tilde{A}_1 - \left(\dfrac{k_0}{m_1}\right)\tilde{A}_2 = \dfrac{F_0}{m_1} \\ \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_0+k_2)}{m_2}\right)\tilde{A}_2 - \left(\dfrac{k_0}{m_2}\right)\tilde{A}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_1+k_0)}{m_1}\right)\tilde{A}_1 - \left(\dfrac{k_0}{m_1}\right)\tilde{A}_2 = \dfrac{F_0}{m_1} \\ -\left(\dfrac{k_0}{m_2}\right)\tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + \dfrac{(k_0+k_2)}{m_2}\right)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Cas où : $m_1=m_2=m$ *et* $k_0=k_1=k_2=k$.

En posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, l'équation devient

$$\begin{cases}\left(-\omega^2+2\frac{k}{m}\right)\tilde{A}_1-\frac{k}{m}\tilde{A}_2=\frac{F_0}{m}\\ -\frac{k}{m}\tilde{A}_1+\left(-\omega^2+2\frac{k}{m}\right)\tilde{A}_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)\tilde{A}_1-\omega_0^2\tilde{A}_2=\frac{F_0}{m}........(1)\\ -\omega_0^2\tilde{A}_1+\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)\tilde{A}_2=0........(2)\end{cases}$$

$$(2)\Rightarrow+\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)\tilde{A}_2=+\omega_0^2\tilde{A}_1$$

$$\tilde{A}_2=\frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1........(3)$$

On remplace (3) *par* (1)

$$\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)\tilde{A}_1-\omega_0^2\frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}$$

$$\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)\tilde{A}_1-\frac{\omega_0^4}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}$$

$$\left(\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)-\frac{\omega_0^4}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\right)\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}$$

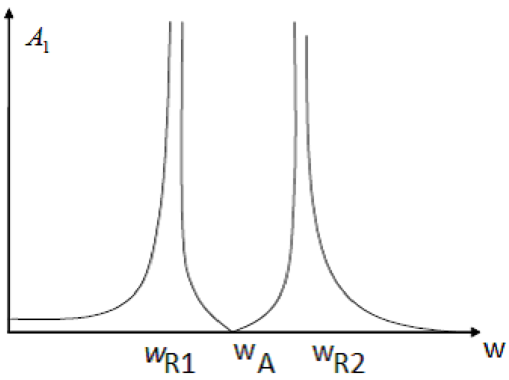
$$\left(\frac{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)-\omega_0^4}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\right)\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}$$

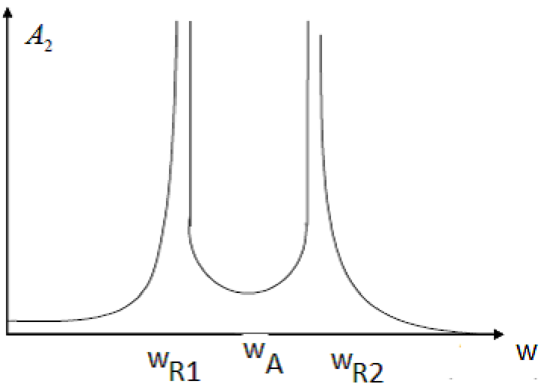
$$\left(\frac{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\right)\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}$$

$$\begin{cases}\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}\frac{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}{\left(\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right)}\\ \tilde{A}_2=\frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1=\frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}\frac{\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)}{\left(\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right)}=\frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2}{\left(\left(-\omega^2+2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right)}\end{cases}$$

$A_1=A_2=\infty$ lorsque

- ✓ $\omega\cong\omega_0\cong\omega_{R1}$ (*appelée* ***première*** *pulsation de résonance*.)
- ✓ $\omega\cong\sqrt{3}\omega_0\cong\omega_{R2}$ $\omega=\sqrt{3}\omega_0\equiv\omega_{R2}$ (*appelée* ***deuxiéme*** *pulsation de résonance*.)
- ✓ $A_1=0$ lorsque $\omega\cong\sqrt{2}\omega_0\cong\omega_A$ (*appelée pulsation d'****antirésonance***.)





5.3.3 Impédance d'entrée et de transfert

(*Avec D*≠0 *et F*≠0 : *Systéme amorti et forcé*)

En électricité, l'impédance est définie par $\tilde{z} = \frac{F}{\tilde{i}_1}$. Par analogie, on définit l'impédance mécanique par $\tilde{z} = \frac{F}{\tilde{v}'}$. $\tilde{z}_E = \frac{F}{\tilde{v}_1}$ est appelée impédance *d'entrée.* $\tilde{z}_T = \frac{F}{\tilde{v}_2}$ est appelée impédance de transfert. Pour les trouver on utilise encore la représentation complexe :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \rightarrow \tilde{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = j\omega \tilde{x}_1 \Rightarrow \tilde{x}_1 = \dfrac{\tilde{v}_1}{j\omega} \\ \tilde{v}_2 = j\omega \tilde{x}_2 \Rightarrow \tilde{x}_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{j\omega} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \tilde{\ddot{x}}_1 = j\omega \tilde{v}_1 \\ \tilde{\ddot{x}}_2 = j\omega \tilde{v}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \tilde{\ddot{x}}_1 + (k_1 + k_0)\tilde{x}_1 + \alpha_1 \tilde{\dot{x}}_1 - k_0 \tilde{x}_2 = \tilde{F} \\ m_2 \tilde{\ddot{x}}_2 + (k_0 + k_2)\tilde{x}_2 + \alpha_2 \tilde{\dot{x}}_2 - k_0 \tilde{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(j\omega m_1 + \dfrac{k_1}{j\omega} + \dfrac{k_0}{j\omega} + \alpha_1 \right)\tilde{v}_1 - \dfrac{k_0}{j\omega}\tilde{v}_2 = \tilde{F} \\ \left(j\omega m_2 + \dfrac{k_2}{j\omega} + \dfrac{k_0}{j\omega} + \alpha_2 \right)\tilde{v}_2 - \dfrac{k_0}{j\omega}\tilde{v}_1 = 0 \end{cases}$$

En posant $j\omega m_1 + \frac{k_1}{j\omega} + \alpha_1 = \tilde{z}_1$, $j\omega m_2 + \frac{k_1}{j\omega} + \alpha_2 = \tilde{z}_2$, $\frac{k_0}{j\omega} = \tilde{z}_0$ on obtient

$$\begin{cases} (\tilde{z}_1 + \tilde{z}_0)\tilde{v}_1 - \tilde{z}_0 \tilde{v}_2 = \tilde{F} \\ (\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0)\tilde{v}_2 - \tilde{z}_0 \tilde{v}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow F = \left(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_0 - \frac{\tilde{z}_0^{\,2}}{(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0)} \right)\tilde{v}_1 = \left(\tilde{z}_1 + \frac{\tilde{z}_2 \tilde{z}_0}{(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0)} \right)\tilde{v}_1$$

- L'impédance d'entrée est $z_E = \dfrac{F}{\tilde{v}_1} = \left(\tilde{z}_1 + \dfrac{\tilde{z}_0\tilde{z}_2}{\left(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0\right)}\right) \equiv \left(\dfrac{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_0}{\tilde{z}_2}\right)$

- L'impédance de *transfert* est $z_T = \dfrac{F}{\tilde{v}_2} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \dfrac{\tilde{z}_1\tilde{z}_2}{\tilde{z}_0}$

A l'aide de l'analogie de Maxwell,

$$\boxed{\begin{array}{c} m_1 \longleftrightarrow L_1,\ m_2 \longleftrightarrow L_2, \\ \alpha_1 \longleftrightarrow R_1,\ \alpha_2 \longleftrightarrow R_2, \\ k_0 \longleftrightarrow 1/C_0,\ k_1 \longleftrightarrow 1/C_1,\ k_2 \longleftrightarrow 1/C_2, \end{array}}$$

on conclut que:
$\underset{\sim}{Z}_1 \Longleftrightarrow$ impédance(L_1) + condensateur(C_1) + résistance(R_1).
$\underset{\sim}{Z}_2 \Longleftrightarrow$ impédance(L_2) + condensateur(C_2) + résistance(R_2).
$\underset{\sim}{Z}_0 \Longleftrightarrow$ condensateur(C_0).

D'où le circuit électrique équivalent suivant: