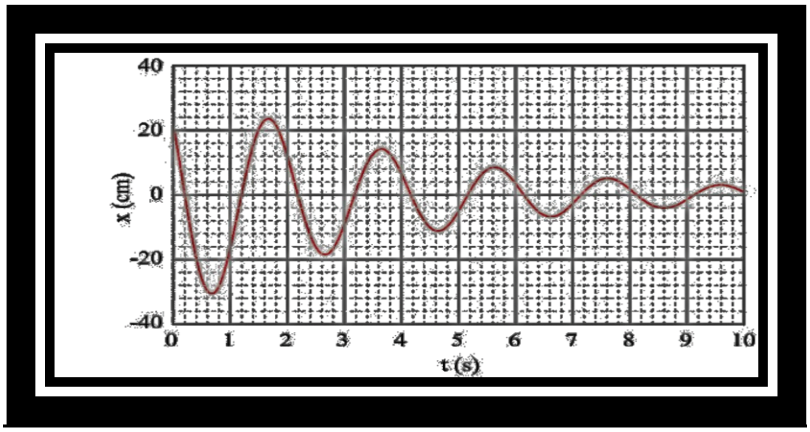
Exercice N°1 :

On considère un oscillateur mécanique $k+m+\alpha$. La position instantanée $x(t)$ de la masse m est représentée par le graphe de la figure suivante.

1. Quelle est le régime d'évolution de l'oscillateur ? Donner l'équation différentielle faisant intervenir le coefficient d'amortissement et la pulsation propre. Donner l'expression de $D(t)$.
2. Déterminer graphiquement la pseudo-période T_a.
3. Rappeler la définition du décrément logarithmique D. Déterminer –le graphiquement et en déduire le coefficient d'amortissement et la période propre T_0.



Solution :

1.a. Le régime est pseudopériodique.

1.b. Equation différentielle est :

$$\begin{cases} \ddot{x}+\dfrac{k}{m}x+\dfrac{\alpha}{m}\dot{x}=0 \\ \ddot{x}+\omega_0^2 x+2\delta\dot{x}=0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\delta=\frac{\alpha}{m}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha}{2m}$$

ω_0 : Pulsation propre du système non-amortie (c'est-à-dire quand $\alpha=0$)

δ : Coefficient d'amortissement.

2. Valeur de T_a du graphe :

$$T_a=2s\Rightarrow\omega_a=2\pi f_a=\frac{2\pi}{T_a}=\frac{2\pi}{2}=\pi\ rad.s^{-1}.$$

DR. GHELLAB TORKIA

3. L'expression de D : $D = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$

x_1, x_2 : Deux crêtes successives

$$D = \ln\left(\frac{24}{16}\right) = 0.448$$

$$D = \delta T_a \Rightarrow \delta = \frac{D}{T_a} = \frac{0.448}{2}$$

$$\delta = 0.224 s^{-1}$$

D'autre part nous avons

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \Rightarrow \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{2} = \pi \; rad.s^{-1}$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1.99\, s$$

Exercice N°2 :

Un corps de masse m=0.5 *kg* reposant sur un plan horizontal est relié à un bâti fixe par un ressort de raideur k=245 *N/m*.

Ecarté de x_0 = 3cm de sa position d'équilibre puis relâché sans vitesse initiale, il effectue des oscillations libres amorties par un frottement sec de coefficient $\mu = 0.1$.

1- Calculer la période des oscillations T_0.
2- Quel est le nombre de demi-périodes effectuées par le corps et à quelle distance s'arrête-t-il ?
3- Quelle distance totale aura-t-il parcouru ? En déduire le travail résistant de la force de frottement.
4- Comparer les énergies potentielles du ressort avant et après ces oscillations, conclusion ?

Solution :

1.1 : $\begin{cases} \ddot{x}+\dfrac{k}{m}x+\dfrac{\alpha}{m}\dot{x}=0 \\ \ddot{x}+\omega_0^2 x+2\delta\dot{x}=0 \end{cases}$

$$2\delta=\frac{\alpha}{m}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha}{2m}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T_0}\Rightarrow T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=0.28\,s$$

2. On sait que les amplitudes diminuent linéairement selon :

$x_k=x_0-n\left(\dfrac{2\mu mg}{k}\right)$ C'est-à-dire l'amplitude diminue chaque demi-période $\left(\dfrac{T_0}{2}\right)$ avec un pas fixe $\left(\dfrac{2\mu mg}{k}\right)$.

x_k : Valeur absolue des amplitudes.

2.1. Le système s'arrête quand la force de rappel devient plus petite que la force de frottement c'est-à-dire :

$$kx_k\le\mu mg$$

$$x_k=x_0-n\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)$$

$$kx_k=kx_0-nk\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)$$

$$kx_k=kx_0-n\left(2\mu mg\right)$$

$$kx_k\le\mu mg\Rightarrow kx_0-n\left(2\mu mg\right)\le\mu mg$$

$$-kx_0+n\left(2\mu mg\right)\ge-\mu mg\Rightarrow n\left(2\mu mg\right)\ge-\mu mg+kx_0$$

$$\frac{n(2\mu mg)}{(2\mu mg)} \geq \frac{-\mu mg}{(2\mu mg)} + \frac{kx_0}{(2\mu mg)} \Rightarrow n \geq \frac{-\mu mg}{(2\mu mg)} + \frac{kx_0}{(2\mu mg)} \Rightarrow n \geq \frac{-1}{2} + \frac{kx_0}{(2\mu mg)}$$

$$n \geq \frac{kx_0}{(2\mu mg)} - \frac{1}{2}$$

Application Numérique : $n \geq 6.85 \Rightarrow n = 7$

2.2. Donc le système s'arrête après avoir effectué 7 demi-périodes

$$x_7 = x_0 - 7\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)$$

$$x_7 = 1.4 \times 10^{-3} m$$

3.1. Distance parcourue

$$D = x_0 + 2(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + x_7$$

$$x_1 = x_0 - 1\times\left(\frac{2\mu mg}{k}\right),\ x_2 = x_0 - 2\times\left(\frac{2\mu mg}{k}\right),\ x_3 = x_0 - 3\times\left(\frac{2\mu mg}{k}\right),$$

$$x_4 = x_0 - 4\times\left(\frac{2\mu mg}{k}\right),\ x_5 = x_0 - 5\times\left(\frac{2\mu mg}{k}\right),\ x_6 = x_0 - 6\times\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)$$

$$D = 14x_0 - 49\frac{2\mu mg}{k} \Rightarrow D = 0.22m$$

3.2. Le travail résistant de la force de frottement

$$\omega(f_s) = -f_s d = -\mu mgd$$

$$\omega(f_s) = -0.11J$$

4. Variation de U :

$$\Delta U = U(x_7) - U(x_0)$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\left(x_7^2 - x_0^2\right)$$

$$\Delta U = -0.11J$$

C'est-à-dire $\Delta U = \omega(f_s)$ l'énergie perdue par le système est transformée par f_f de la chaleur.

Exercice N°3 :

On considère un circuit électrique *RLC* série. On donne $C = 10\mu F, L = 100mH$. Le condensateur est initialement chargé. A l'instant *t=0*, on ferme le circuit *RLC* et on le laisse évoluer librement. On fixe la résistance successivement sur les trois valeurs différentes suivantes : $R = 100\,\Omega, 150\,\Omega, 250\,\Omega$.

1- Déterminer dans chacun des cas le régime de fonctionnement de cet oscillateur. Dans quel(s) cas observe-t-on des oscillations ? En déduire alors la pseudo-période.

2- Quelle valeur faut-il donner à R pour être en régime critique ?

Solution :

$$\sum V_i = 0 \Rightarrow V_L + V_C + V_R = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C}, V_L = L\frac{di}{dt}, \mathrm{i} = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \Rightarrow V_L = L\frac{d}{dt}\dot{q} = L\ddot{q},\; V_R = Ri = R\dot{q}$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} + R\dot{q} = 0 \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q + R\dot{q} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{q} + \dfrac{1}{LC}q + \dfrac{R}{L}\dot{q} = 0 \\ \ddot{q} + \omega_0^2 q + 2\delta\dot{q} = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$2\delta = \frac{R}{L} \Rightarrow \delta = \frac{R}{2L}$$

$$C = 10\mu F = 10\times10^{-6}F, L = 100mH = 100\times10^{-3}H$$

3 Cas :

1) $\delta < \omega_0$:Amortissement faible $\Rightarrow$ régime pseudopériodique.

2) $\delta = \omega_0$:Amortissement critique $\Rightarrow$ régime critique.

3) $\delta > \omega_0$:Amortissement fort.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0.1\times10\times10^{-6}}} = 10^{+3} rad.s^{-1}$$

Calcul $\delta = \dfrac{R}{2L}$

$R = 100\,\Omega, 150\,\Omega, 250\,\Omega$

$R = 100\,\Omega \Rightarrow \delta = 500\ s^{-1} < \omega_0 = 10^3$

$R = 150\,\Omega \Rightarrow \delta = 750\ s^{-1} < \omega_0 = 10^3$

$R = 280\,\Omega \Rightarrow \delta = 1250\ s^{-1} > \omega_0 = 10^3$

Donc :

1. $R = 100\,\Omega$ Régime pseudopériodique.

$$\omega_a = 2\pi f_a = \frac{2\pi}{T_a}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 866\ rad.s^{-1} \Rightarrow T_a = 0.007\ s$$

2. $R = 150\ \Omega$ Régime pseudopériodique.

$$\omega_a = 2\pi f_a = \frac{2\pi}{T_a}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 661.4\ rad.s^{-1} \Rightarrow T_a = 0.009\ s$$

Pour le régime critique il faut que $\delta = \omega_0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{R_{(critique)}}{2L} \Rightarrow R_{(critique)} = 2L\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{2L}{\sqrt{L}}\sqrt{\frac{1}{C}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$R_{(critique)} = 200\ \Omega$.

Exercice N°4 :

I- Régime libre non-amorti

On considère un système à un degré de liberté de la fig.1. Le disque homogène de masse M et de rayon R peut pivoter autour de son axe horizontal fixe et passant par son centre. Une tige rigide de longueur l et sans masse est solidaire au disque et porte à son extrémité libre une masse ponctuelle *m*. Un ressort de constante de raideur k placé horizontalement est relié au disque comme indiqué sur la fig.1, l'autre extrémité étant maintenue fixe. Le système est à l'équilibre statique lorsque la tige est dans sa position horizontale. En mouvement la tige est repérée par rapport à cette position par l'ongle $\theta(t)$. On se place dans le cas des vibrations de faibles amplitudes et on admet que $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$.

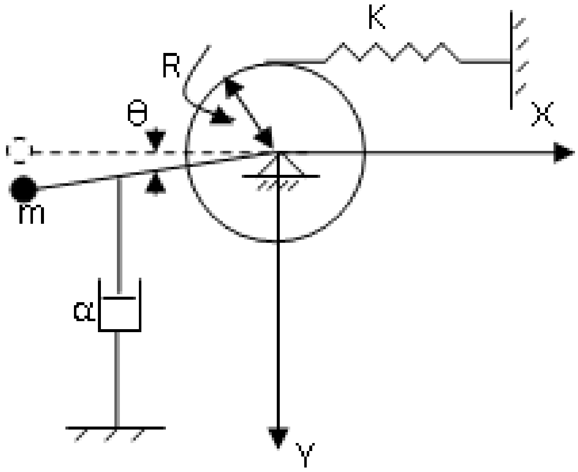
1- Calculer l'énergie potentielle totale $U(\theta)$ du système. Déterminer la déformation Δx du ressort à l'équilibre statique. Simplifier alors l'expression de $U(\theta)$.

2- Calculer l'énergie cinétique $T(\theta)$ du système. On donne $J_{disque} = \frac{1}{2}MR^2$

3- Ecrire le Lagrangien du système L$(\dot{\theta},\theta)$ du système et en déduire l'équation différentielle régissant le mouvement du système et sa pulsation propre.

II- Régime libre amorti :

Le système subit maintenant un frottement visqueux représenté par un amortisseur de coefficient linéaire α placé comme indiqué sur la fig.1 Sachant que $m=\frac{M}{8}, k=\frac{2mgl}{R^2}, R=\frac{l}{2}$, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit: $\ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$ on précise l'expression de δ et ω_0.



Solution :

I- Régime libre non-amorti

$$U=U_k+U_m$$

$$dU_k=-\vec{F}_k d\vec{l}=-F_k dl\cos\left(\vec{F}_k(\uparrow),d\vec{l}(\downarrow)\right)$$

$$dU_k=-F_k dl\cos(180°)$$

$$\cos(180°)=-1$$

$$dU_k=+F_k dl=kxdx\ /\ F_k=kx, dl=dx$$

$$U_k=\int dU_k=\int_0^{x_0+x}kxdx=k\int_0^{x_0+x}xdx=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0+x}=\frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_0+x}$$

$$U_k = \frac{k}{2}\left[\left(x_0 + x\right)^2 - 0\right]$$

$$U_k = \frac{k}{2}\left(x_0 + x\right)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2 + 2xx_0 + x_0^2\right) = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 + cte \,/\, \frac{k}{2}x_0^2 = cte$$

Alors

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$$

Avec

$$\sin\theta = \frac{-x}{R} \Rightarrow x = -R\sin\theta$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte = \frac{k}{2}\left(-\mathrm{R}\sin\theta\right)^2 + k\left(-\mathrm{R}\sin\theta\right)x_0 + cte$$

$$dU_m = -\vec{F}_m d\vec{l} = -F_m dl\,\cos\left(\vec{F}_m\left(\downarrow\right), d\vec{l}\left(\downarrow\right)\right)$$

$$dU_m = -F_m dl\,\cos\left(0°\right)$$

$$\cos\left(0°\right) = +1$$

$$dU_m = -F_m dl = -mgdl \,/\, F_m = mg$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^h -mgdl = -mg\int_0^h dl = k\left[l\right]_0^h = -mg\left[h - 0\right]$$

$$U_m = -mgh$$

$$\sin\theta = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\sin\theta \Rightarrow U_m = -mgl\sin\theta$$

Alors

$$U = U_k + U_m = \frac{k}{2}\left(-\mathrm{R}\sin\theta\right)^2 + k\left(-\mathrm{R}\sin\theta\right)x_0 - mgl\,\sin\theta + cte$$

$$U = \frac{k}{2}R^2\left(\sin\theta^2\right) - kRx_0\left(\sin\theta\right) - mgl\,\left(\sin\theta\right) + cte$$

$$U = \frac{k}{2}R^2\left(\sin\theta^2\right) - \left(kRx_0 + mgl\right)\left(\sin\theta\right) + cte$$

A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$

$$U = \frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right) - \left(kax_0 + mgl\right)\left(\theta\right) + cte$$

Equilibre

DR. GHELLAB TORKIA

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{k}{2}\times R^2\times 2\theta-\left(kRx_0+mgl\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}:\theta=0\Rightarrow\frac{k}{2}\times R^2\times 2\left(\theta=0\right)-\left(kRx_0+mgl\right)=-\left(kRx_0+mgl\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0\Rightarrow-\left(kRx_0+mgl\right)=0\Rightarrow x_0=-\frac{mgl}{kR}$$

Alors

$$U=\frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right)+cte\,.$$

$$T=E_c=T\left[masse\right]+T\left[Disque\right]=\frac{1}{2}mv^2\left[masse\right]+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\left[Disque\right]=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left[masse\right]+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\left[Disque\right]$$

$$T\left[masse\right]=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left[masse\right]$$

$$\dot{x}=l\dot{\theta}$$

$$T\left[masse\right]=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$T\left[Disque\right]=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\left[Disque\right]$$

$$J=\frac{1}{2}MR^2$$

$$T\left[Disque\right]=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\left[Disque\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2\left[Disque\right]$$

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2$$

Alors, le Lagrangien du système s’écrit :

$$L=E_c-E_p=T-U=\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2-\frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right)+cte$$

L’équation de mouvement pour des petites oscillations, est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0$

$$L=\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2-\frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right)+cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2\right]=\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\times 2\dot{\theta}=\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right)\right)=-\frac{k}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta^2\right)=-\frac{k}{2}R^2\times 2\theta=-kR^2\theta$$

$$\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\ddot{\theta}+kR^2\theta=0$$

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\theta=0\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}}$$

II- Régime libre amorti :

L'équation de mouvement pour des petites oscillations, est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}\right)=0$

$$L=\frac{1}{2}\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2-\frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right)+cte$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-kR^2\theta$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$\dot{x}=b\dot{\theta}$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha\left(b\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}\alpha\left(b^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha b^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\alpha b^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha b^2\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha b^2\left(2\dot{\theta}\right)=\alpha b^2\dot{\theta}$$

$$\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\ddot{\theta}+kR^2\theta+\alpha b^2\dot{\theta}=0$$

$$\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\ddot{\theta}+kR^2\theta++\alpha b^2\dot{\theta}=0$$

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\theta+\dfrac{\alpha b^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\dot{\theta}=0\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+2\delta\dot{\theta}=0\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}}$$

$$2\delta=\frac{\alpha b^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha b^2}{2\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}$$

Application Numérique

$$m=\frac{M}{8},k=\frac{2mgl}{R^2},R=\frac{l}{2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{kR^2}{\left(ml^2+\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}}=\sqrt{\frac{g}{2R}}$$

$$\delta=\frac{9\alpha}{8M}$$