NOTATIONS

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$: élément de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$: norme de $x \in \mathbb{R}^n$.
Ω : ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
$\Gamma = \partial\Omega$: frontière de Ω.
$\overline{\Omega}$: adhérence (clôture) de Ω.
$\|u\|_E$: norme d'un vecteur u de l'espace vectoriel normé E.
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$: multi - indice.
$|\alpha| = \alpha_1, \alpha_2, + \cdots + \alpha_n$: longueur de $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$
$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$: $\alpha \leq \beta$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a : $\alpha_i \leq \beta_i$.
$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $\alpha \leq \beta$ on pose : $C_\alpha^\beta = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha! - \beta!)}$.
$x, y \in \mathbb{R}^n$: $(x+y)^\alpha = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta x^{\alpha-\beta}.y^\beta$.
$\alpha \in \mathbb{N}^n, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $|\alpha|-$ différentiable : $D^\alpha f = \partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$
$\alpha \in \mathbb{N}^n, f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $|\alpha|-$ différentiables : $D^\alpha(f.g) = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} f.D^\beta g$.
$p.p.$: presque partout.
ssi : si et seulement si.
E' : dual d'un espace vectoriel E.
$\langle , \rangle$: crochet de dualité.
$\rightharpoonup$: convergence faible.
$\hookrightarrow$: injection continue.
$\operatorname{supp} f$: support d'une fonction f.
$\check{f}$: la symétrie de la fonction f.
τ_a : opérateur de translation de vecteur a.
$*$: produit de convolution.
$\otimes$: produit tensoriel.
$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$: transformée de Fourier de la fonction f.
$\overline{\mathcal{F}}(f)$: transformée de Fourier conjuguée de la fonction f.

INTRODUCTION

La théorie de distribution, ainsi que les espaces de Sobolev sont des outils mathématiques puissants pour étudier des fonctions et résoudre des équations aux dérivées partielles dans des cas où les méthodes classiques de la différenciation et de l'intégration ne s'appliquent pas où il y a une difficulté d'appliquer. Ils jouent un rôle essentiel dans de nombreux domaines de la physique mathématique, de la théorie des ondes jusqu'à la mécanique quantique, en passant par l'analyse numérique.

La théorie de distribution généralise la notion de fonction en permettant de considérer des objets mathématiques plus généraux que les fonctions continues ou dérivables. Les distributions peuvent inclure des impulsions, des fonctions «en escalier», discontinues, et d'autres objets mathématiques. Les distributions sont définies en utilisant des opérateurs linéaires continus, qui associent une fonction test à une distribution.

Les espaces de Sobolev sont des espaces de fonctions qui permettent de quantifier la régularité des fonctions, en particulier celles qui ne sont pas nécessairement continues ou dérivables dans le sens classique. Ils sont définis en introduisant des normes qui tiennent compte des dérivées de la fonction. Plus précisément, les espaces de Sobolev $W^{k,p}$ incluent les fonctions dont les k premières dérivées au sens des distributions sont dans l'espace L^p.

En 1893 et 1894, O. Heaviside a proposé ses règles de calcul symboliques pour des opérateurs utilisés pour résoudre des problèmes en physique mathématique. Ces calculs symboliques fonctionnent bien pour les ingénieurs qui ont utilisé au sens large, mais pas toujours rigoureuse au sens mathématique.

Dans ce contexte, P. Dirac publie en 1926 un article intitulé «**L'interprétation physique de la dynamique quantique**», où il a introduit sa fameuse quantité symbolisez avec δ. Dirac a dit que δ est une fonction définit comme suivant :

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \end{cases} \tag{1}$$

De plus, pour toute fonction régulière φ et tout nombre réel a on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(a-x)dx = \varphi(a). \tag{2}$$

P. Dirac a admis que ce qu'il a appelé «une fonction» n'est pas au sens propre d'une fonction. En effet, l'orsque δ est une fonction elle égal à 0 p.p. on obtient alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 0$, ce qui contredit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$. Pour résoudre ce dilemme, Dirac a dit que la quantité δ pourrait être interprétée comme une limite d ?une suite des fonctions. Cela semble plus raisonnable, par exemple la suite des fonctions $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$, définie par :

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & : \ |x| > j, \\ \dfrac{j}{2} & : \ |x| \leq j. \end{cases} \tag{3}$$

vérifie la condition $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)dx = 1$. On choisit suivant L. Schwartz (1945) une une fonction φ continue et nulle en dehors d'un intervalle fini $]-a,a[$ $(a>0)$ contient $\left[-\dfrac{1}{j}, \dfrac{1}{j}\right]$ pour j assez grand, on obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)dx = \frac{j}{2}\int_{-\frac{1}{j}}^{\frac{1}{j}} \varphi(x)dx.$

Soit ψ une primitive de φ sur $]-a,a[$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)dx = \frac{j}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{j}\right) - \psi\left(-\frac{1}{j}\right)\right] = \frac{\psi\left(\frac{1}{j}\right) - \psi\left(-\frac{1}{j}\right)}{\frac{2}{j}}.$$

Posons $h = \dfrac{1}{j}$, on obtient :

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)dx = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)-\psi(-h)}{2h} = \psi'(0) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi d\delta,$$

où δ est la mesure de Dirac, définie dans (2.1).
On dit que la mesure de densité de $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge vers la mesure de Dirac, et par translation on peut trouver (2).

Dirac a aussi définit les dérivées successives de δ, notées : $\delta', \delta'', \ldots$ L. Schwartz a justifié la façon de trouver ces dérivées successives, mais dans un cadre plus général que mesure, ce qu'on appelé les distributions. Il l'a publié ça en 1946 dans intitulé : «**Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques**», il a donné les deux définitions suivantes :

Définition 1 : Φ sera l'ensemble des fonctions $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ de n variables réelles, indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'ensemble bornés. A chaque fonction φ correspond un «noyau», ensemble compact, dont le complémentaire est le plus grand ensemble ouvert sur lequel $\varphi \equiv 0$.
Définition 2 : On appellera «distribution» de l'espace à n dimensions toute fonctionnelle ou forme linéaire $T(\varphi)$ définie pour toute les φ de Φ, et vérifiant de plus la condition de continuité suivante : Si une suite des fonctions φ_i, ont leurs noyaux contenus dans un compact fixe et si elles convergent uniformément vers 0, ainsi que chacune de leurs dérivées, alors les $T(\varphi_i)$ convergent vers 0.

Plus tard, L. Schwartz a publié son célèbre livre «**Théorie des distributions**», au milieu ds années soixante du dernier siècle.

Dans un autre contexte, parmi les anciens résultats du calcul classique des variations on trouve le principe de Dirichlet : l'intégral variationnel $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ admet un minimum pour certains fonctions de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^n$. Ce principe est utilisé par Riemann sans justifications mathématiquement satisfaisantes, mais Weierstrass a remarqué en 1870 que notons que l'existence de fonctions minimisantes pour les intégrales variationnelles n'est pas toujours garantie. Une première preuve rigoureuse de principe de Dirichlet est introduit en 1900 par Hilbert pour des fonction de $u \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathscr{C}^1(\Omega)$, prenant une trace g sur $\partial\Omega$, cela a donné les premiers pas d'invention des espaces de sobolev. Notons que plus tard le principe de Dirichlet a été lié à des problèmes aux limites de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & : \text{ dans } \Omega, \\ u = g & : \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Si u est une solution du problème (4), alors u minimise l'énergie de Dirichlet :

$$E(v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - f(x)v(x) \right) dx.$$

Il y a d'autre travaux sur le principe de Dirichlet, notamment les travaux de : Bippo Levy, Fubini, Tonelli, Nicodym, Friedrichs et al., Rellich...

En 1934, J. Leray dans son article intitulé : «**Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace**», introduit une nouvelle terme c'est le «quasi-dérivée» :

Soit deux fonctions de carré sommable dans $\mathbb{R}^3, u$ et $u_{,i}$. Nous dirons que $u_{,i}$ est la quasi-dérivée de u par rapport à x_i quand la relation

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + u_{,i}(x)\varphi(x) \right) dx = 0,$$

sera vérifiée ; rappelons que dans cette relation φ représente une quelconque des fonctions admettant des dérivées premières continues qui sont, comme ces fonctions elles-mêmes, des carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$.

En 1935, S. L. Sobolev a présenté une théorie des solutions générales de l'équation des ondes, définies comme L^1- limites des solutions de classe $\mathscr{C}^2$ de cette équation. Il a introduit un concept de fonctionnelles linéaires continues sur des espaces de fonctions continûment différentiables (appelées plus tard « distributions d'ordre fini») et annonçait un théorème d'existence pour une solution à une grande classe d'équations hyperboliques.

En 1938, S. L. Sobplev a donnée une définition clair des dérivées faibles et les espaces qu'on appelés espaces de Sobolev :

Appelons espaces L_p^ν l'espace fonctionnel linéaire qui est formé de toute les fonctions de n variables réelles $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre ν existent et sont sommables à la puissance $p > 1$ dans chaque partie bornée de l'espace $x_1, \cdots, x_n$. La dérivée $\dfrac{\partial^\alpha \varphi}{\partial^\alpha x_1 \cdots \partial^\alpha x_n}$ est définie comme une fonction qui satisfait l'équation

$$\underset{\infty}{\int \cdots \int} \psi \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial^\alpha x_1 \cdots \partial^\alpha x_n} dx_1 \cdots dx_n = \underset{\infty}{\int \cdots \int} (-1)^\alpha \varphi \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial^\alpha x_1 \cdots \partial^\alpha x_n} dx_1 \cdots dx_n,$$

quelque soit la fonction ψ continue ayant des dérivées jusqu'à l'ordre ν s'annule en dehors d'un domaine borné D.

Plus tard, S. L. Sobolev a remplacé la notation L_p^ν par W_p^m qui est plus proche que la notation actuelle $W^{m,p}$, Il s'est développé très rapidement à partir des années 1950s.

Comme précédemment évoqué, les espaces de Sobolev sont construits à partir des espaces de Lebesgue, qui sont des espaces de Banach. On encourage donc le lecteur à approfondir sa compréhension des propriétés topologiques et analytiques inhérentes aux espaces de Banach. De plus, il serait bénéfique de se familiariser avec des théories bien établies telles que par exemple : théorème de Hahn-Banach, théorème de Banach-Steinhaus, ainsi que d'autres concepts connexes liés aux espaces de Hilbert.

En revanche, la théorie des distributions repose sur des espaces de fonctions régulières et leurs dualités, présentant une structure topologique spécifique qui peut être assez complexe. Si le lecteur souhaite approfondir cette notion, nous lui recommandons de consulter les deux ouvrages [10] et [13], ou encore d'autres références traitant des espaces vectoriels topologiques. Cependant, il est tout à fait approprié de fournir ici quelques incitations pour éveiller l'intérêt du lecteur à l'égard de ces espaces.

Il est évident que tous les éléments de l'espace $\mathscr{C}^k(K)$, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions bornées, ainsi leurs dérivées partielles jusqu'à k, cet est espace a alors une structure d'un espace vectoriel normé suivant la norme : $\sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in K, |\alpha|=k} |D^\alpha f(x)|$. Malheureusement, cette propriété n'est généralement pas obtenue pour les espaces $\mathscr{C}^m(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a besoin d'une structure topologique qui préserve les propriétés de ces espaces, par exemple si une suite $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ est suite des fonctions de $\mathscr{C}^m(\Omega)$, converge vers une fonction f par cette topologie, il est nécessaire que $f \in \mathscr{C}^m(\Omega)$, encore il est nécessaire que si F est un voisinage de f et G est un voisinage de g alors : $F + G$ est un voisinage de $f + g$ et λF est un voisinage de λf pour λ est nombre réel où complexe. La topologie requise construit par des familles de semi-normes $\sup_{x\in K, |\alpha|\leq m} |D^\alpha f(x)|$, où K sont des compacts contenus dans Ω. C'est une topologie localement convexe (i.e pour tout $f \in \mathscr{C}^m(\Omega)$ il existe un système des voisinages convexes de f, ce qui équivalent dans ce cas là l'existence d'un un système des voisinages convexes de 0). Pour plus de détaille, le lecteur est encouragé à consulter §1.5, ainsi que deux ouvrages [10] et [13]. En complément des concepts topologiques, on motive le lecteur à se pencher sur les notions fondamentales de l'algèbre, de l'analyse mathématique, de la théorie de l'intégration, ainsi que des espaces de Lebesgue.

Ce polycopié est organisé en cinq chapitres. Le premier chapitre offre des rappels et des compléments sur les notions essentielles nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants. Le deuxième chapitre introduit les définitions et les propriétés liées aux distributions. Le troisième chapitre aborde le produit de convolution et ses propriétés. Le quatrième chapitre se consacre à la transformation de Fourier. Enfin, le cinquième chapitre traite les espaces de Sobolev. Chaque chapitre est conclu par une série d'exercices résolus.

J'espère sincèrement que cette polycopie sera d'une utilité pour les étudiants de Master, en particulier ceux suivant des cours d'analyse fonctionnelle, d'anqlyse numérique et d'équations aux dérivées partielles. Mon souhait le plus cher est que cette oeuvre puisse enrichir ne serait-ce qu'un peu la bibliothèque universitaire nationale.

M'sila, le 21 septembre 2023, correspondant au 6 Rabi' al-Awwal 1445 AH.
Saadi Abderachid.