Solution de la série N°1
O.V (2023/2024)

Ex 01

- $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}$.
- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt}\left[L_{/\Delta}(\text{solide})\right] = \sum_i \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_i) = J_{/\Delta}\ddot{\theta}$$

donc : $$\boxed{\sum_i \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_i) = J_{/\Delta}\cdot\ddot{\theta}}$$

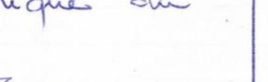
$L_{/\Delta}$ (solide) : moment cinétique du solide / Δ

$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_i)$: moment de $\vec{F}_i$ / Δ

$J_{/\Delta}$: moment d'inertie du solide / Δ

$\ddot{\theta}$: accélération angulaire / Δ

- forme cylindrique :



* cylindre ou anneau :

$J_{/\Delta} = MR^2$ M : masse du cylindre

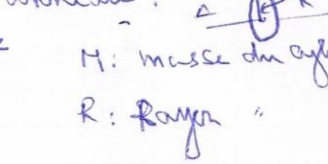
R : Rayon " "

* cylindre plein ou disque :

$J_{/\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$

* parallélépipède :

$J_{/\Delta} = \frac{Ml^2}{12}$



- Théorème de Huygens :

$$J_{/\Delta} = J_{(G)} + Ma^2$$

(G) : axe passant par le centre de gravité du solide

Δ : axe // à (G)

a : distance entre Δ et (G)

M : masse du solide.

Ex 02

- $\sin x = \sin x_0 + \frac{(x-x_0)^1}{1!}\cos x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2!}\sin x_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\sin^{(n)}(x_0) + \dots$

- $\cos x = \cos x_0 - \frac{(x-x_0)^1}{1!}\sin x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2!}\cos x_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\cos^{(n)}(x_0) + \dots$

- $e^x = e^{x_0} + \frac{(x-x_0)^1}{1!}e^{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}e^{x_0} + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}e^{x_0} + \dots$

pour $x_0 = 0$ (série de MacLaurin) :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Identité d'Euler au voisinage de 0 :

$$\cos x + j\sin x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\cos x} + j\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

d'autre part nous avons :

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(jx)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty}(j)^{2p}\frac{x^{2p}}{(2p)!} + j\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

or : $(j)^{2p} = [j^2]^p = (-1)^p$

$(j)^{2p+1} = j(-1)^p \Rightarrow$

$$e^{jx} = \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}}_{\cos x} + j\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}}_{\sin x}$$

d'où l'identité d'Euler au voisinage de 0.

* Energie cinétique d'un corps solide : (S)

- En mvt de translation :

$$T_{(S)} = \frac{1}{2} M V_G^2$$

M = masse du solide

V_G = vitesse de translation du centre de gravité de (S)

- En mvt de rotation / Δ qui passe par G :

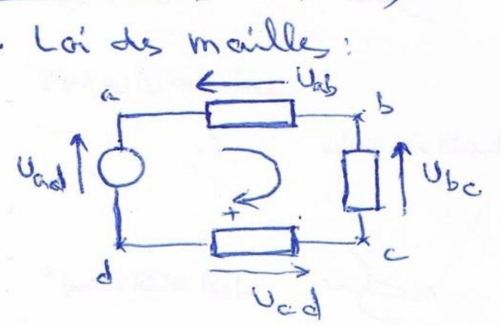
$$T = \frac{1}{2} J_G \cdot \dot{\theta}^2$$

J_G = moment d'inertie de (S) par rapport à son centre de gravité G.

$\dot{\theta}$ = vitesse angulaire de rotation de (S) / Δ

Electricité (rappels) :

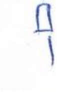
- Loi des mailles :



La somme des tensions le long d'une m̂ maille est nulle.

c-à-d :

$$U_{ad} - U_{ab} - U_{bc} - U_{cd} = 0$$

 = générateur

 = récepteur

les tensions dans le m̂ sens choisi sont comptées positivement les autres négativement :

$U_{ad} = U_a - U_d$

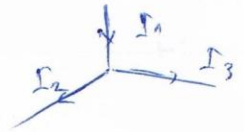
$U_{ab} = U_a - U_b$

- Loi des nœuds :

Un nœud est le pt de rencontre de plusieurs conducteurs

La somme des courants entrants égale à la somme des courants sortants ! $\sum i_{entrant} = \sum i_{sort}$

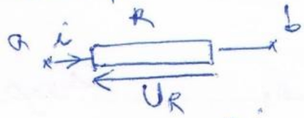
Ex :



$I_1 = I_2 + I_3$.

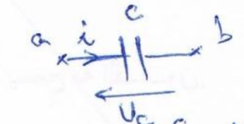
- La d.d.p aux bornes de :

R :



$U_R = U_a - U_b = Ri$ (Loi d'Ohm)

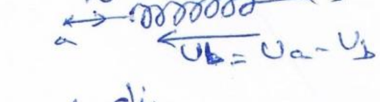
C :



$$U_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{q}{C}$$

q = quantité de charge de C.

L :



$$U_L = L\frac{di}{dt}$$

- Energie électrostatique dans C :

$$W_C = \frac{1}{2} C\, U_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

- Energie magnétique ds L :

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2$$

- Energie par effet Joule : $W_R = Ri^2$

Ex 02

$$- \sin x = \sin x_0 + \frac{(x-x_0)^1}{1!}\cos x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2!}\sin x_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\sin^{(n)}(x_0) + \dots$$

$$- \cos x = \cos x_0 - \frac{(x-x_0)^1}{1!}\sin x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2!}\cos x_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\cos^{(n)}(x_0) + \dots$$

$$- e^x = e^{x_0} + \frac{(x-x_0)^1}{1!}e^{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}e^{x_0} + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}e^{x_0} + \dots$$

pour $x_0 = 0$ (série de Mac Laurin):

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$- \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Identité d'Euler au voisinage de 0:

$$\cos x + j \sin x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\cos x} + j \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

d'autre part nous avons:

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} (j)^{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + j^{2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

or : $(j)^{2p} = [j^2]^p = (-1)^p$

$(j)^{2p+1} = j(-1)^p \Rightarrow$

$$e^{jx} = \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}}_{\cos x} + j \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}}_{\sin x}$$

d'où l'identité d'Euler au voisinage de 0.

Ex 03

En représentation complexe :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \bar{x}_1(t) = \bar{A}_1 e^{j\omega t}$$

avec: $\bar{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$

de même :

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \longrightarrow \bar{x}_2(t) = \bar{A}_2 e^{j\omega t}$$

alors:

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) e^{j\omega t} = \bar{A} e^{j\omega t}$$

avec $\bar{A} = A e^{j\varphi}$ $\quad A = \|\bar{A}\|$, $\varphi = \arg(\bar{A})$

donc :

$$A = \sqrt{[\mathrm{Re}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)]^2 + [\mathrm{Im}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)]^2}$$

d'où :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

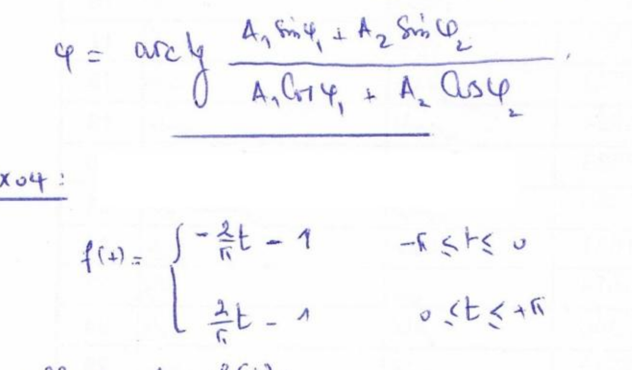
$$\varphi = \arg(\bar{A}) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)}{\mathrm{Re}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Ex 04 :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t - 1 & -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}t - 1 & 0 \leq t \leq +\pi \end{cases}$$

allure de $f(t)$:



calcul des coefficients a_0, a_n et b de la série de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{2}{\pi}t-1\right)dt + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}t-1\right)dt\right]$$

$$= 0$$

$f(t)$ fonction pair car $f(-t) = f(t)$

alors :

$\forall n \quad b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{2}{\pi}t-1\right)\cos nt\,dt + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}t-1\right)\cos nt\,dt\right]$$

$\Rightarrow$ si $n = 2p \Rightarrow a_{2p} = 0$

si $n = 2p+1 \Rightarrow a_{2p+1} = -\frac{8}{(2p+1)^2\pi^2}$

La série de fourier sera alors :

$$f(t) = \rho(t) = \sum_{p=0}^{\infty} -\frac{8}{(2p+1)^2\pi^2}\cos(2p+1)t$$

L'égalité est toujours vérifiée car $f(t)$ est continue

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = f(t)$$

$f(t)$ la fonction définie ds N° 4

Si on prend les 2 premiers terme de la série de furier alors

$$f(t) = -\frac{8}{\pi^2}\cos t - \frac{8}{9\pi^2}\cos 3t$$

l'équation differentielle devient :

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = -\frac{8}{\pi^2}\cos t - \frac{8}{9\pi^2}\cos 3t$$

donc : $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$y_h(t)$ solution homogène de :

$$\ddot{y}_h + 5\dot{y}_h + 4y_h = 0$$

$$y_h = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

avec r_1 et r_2 solution de

$r^2 + 5r + 4 = 0$ d'où

$r_1 = -1$ et $r_2 = -4$

$$\Rightarrow \quad y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

$y_p(t)$: solution particulière de

$$\ddot{y}_p + 5\dot{y}_p + 4y_p = -\frac{8}{\pi^2}\cos t - \frac{8}{9\pi^2}\cos 3t$$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ tel que

(1) ... $\ddot{y}_{p_1} + 5\dot{y}_{p_1} + 4y_{p_1} = -\frac{8}{\pi^2}\cos t = \frac{8}{\pi^2}\cos(t+\pi)$

(2) ... $\ddot{y}_{p_2} + 5\dot{y}_{p_2} + 4y_{p_2} = -\frac{8}{9\pi^2}\cos 3t = \frac{8}{9\pi^2}\cos(3t+\pi)$

$y_{p_1} = A\cos(t+\varphi_1) \rightarrow \bar{y}_{p_1} = \bar{A}e^{jt}$ ... (3)

$y_{p_2} = B\cos(3t+\varphi_2) \rightarrow \bar{y}_{p_2} = \bar{B}e^{3jt}$ ... (4)

(3) $\rightarrow$ (1)

(4) $\rightarrow$ (2)

Ce qui nous donne :

(2) $\quad -\bar{A} + 5j\bar{A} + 4\bar{A} = \frac{8}{\pi^2}e^{j\pi}$

$\Rightarrow$

et

$$-9\bar{B} + 15j\bar{B} + 4\bar{B} = \frac{8}{9\pi^2}e^{j\pi}$$

$$\bar{A} = \frac{\frac{8}{\pi^2}e^{j\pi}}{3+5j} \Rightarrow A = \frac{8/\pi^2}{\sqrt{34}}$$

$$\bar{B} = \frac{\frac{8}{9\pi^2}e^{j\pi}}{-5+15j} \Rightarrow B = \frac{8/45\pi^2}{\sqrt{10}}$$

$$\varphi_1 = \arg \frac{8/\pi^2 e^{j\pi}}{3+5j} = \pi - \arg(3+5j)$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \pi - \operatorname{arctg} 5/3.$$

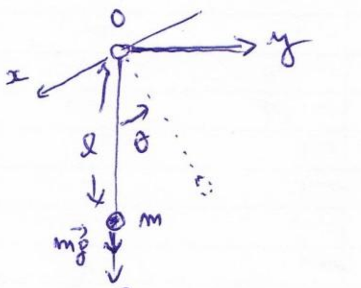
de m̂ : $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}(-5)$.

finalement :

$$y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + \frac{8/\pi^2}{\sqrt{34}} \cos(t+\varphi_1) + \frac{8/45\pi}{\sqrt{10}} \cos(3t+\varphi_2).$$

A_1 et A_2 seront déterminés des C.I : $y(0)=1$ et $\dot{y}(0)=0$

Exo 5



les liens appliqués au pendule simple sont : $x=0$ et $y^2+z^2=l^2$
et m masse ponctuelle alors

$$s = 3 - 2 = 1 \text{ degré de liberté}$$

la masse décrit un cercle de centre O $\Rightarrow$ on localise m par l'angle $\theta \Rightarrow q(t) = \theta(t)$.

U : potentiel gravitationnel de m qui dépend que de z $\Rightarrow$

$$\vec{P}(z) = -\operatorname{grad} U \Rightarrow U(z) = -mgz + U(l)$$

en fonction de $\theta \Rightarrow$:

$$U(\theta) = mgl(1-\cos\theta) + U(0)$$

si on choisit $\theta=0$ comme origine des potentiels alors :

$$U(\theta) = mgl(1-\cos\theta)$$

pour les oscillations de faibles amplitudes $\theta \ll$

alors :

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$

donc :

$$U(\theta) = mgl\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\right)$$

si θ est assez faible on aura $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ d'où la forme quadratique du potentiel :

$$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{2} mgl\,\theta^2}$$

L'équation de Lagrange et la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl\,\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

- le pendule constitué d'un ressort et d'une masse ponctuelle est un syst à 2 degrés de liberté : mvt le long du ressort + mvt autour de O
$\Rightarrow$ le syst admet 2 coordonnées généralisées $q_1(t)$ et $q_2(t)$
en coordonnées polaires nous aurons : $q_1(t) = \rho = l$

$$q_2(t) = \theta$$

La fct de Lagrange sera :

$$\mathcal{L}(l, \theta)$$

et les 2 equations de Lagrange

sont

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Fin