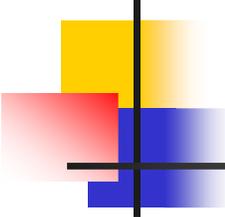


# Logique floue et commande

---

2<sup>ème</sup> Année master Commande Electrique

Université de M'sila

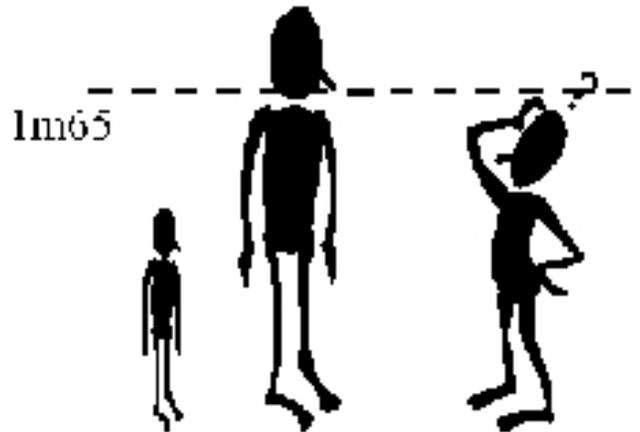


# Formalisme de la logique floue

1. Présentation	Exemples introductifs Logique floue vs booléenne Champs d'applications et historique
2. Concepts principaux	Ensemble flou Opérateur logique floue Fuzzification >> Inférence floue >> Défuzzification
3. Fuzzification	Variables linguistiques Comment fuzzifier?
4. Inférence floue	Base de règles Principe du raisonnement approximatif Méthodes d'inférence floue + agrégation des règles
5. Défuzzification	Méthodes de défuzzification Synthèse générale
6. Exemple complet de prise de décisions floues	

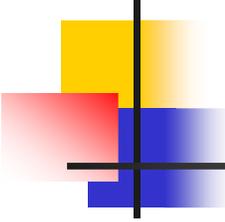
# Introduction à la logique floue

- Logique booléenne – logique floue  
Supposons que la limite soit de *1m65*.  
Je mesure *1m63*, suis-je vraiment petit ?



Logique **booléenne** : oui, je suis *petit* à 100%

Logique **floue** : à la fois *petit* et *grand* ...

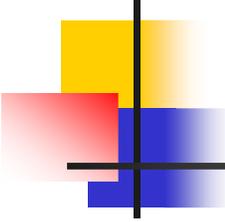


# Introduction à la logique floue

## Exemple de règles floues

<b>si le feu est rouge</b>	<b>si ma vitesse est élevée</b>	<b>et si le feu est proche</b>	<b>alors je freine fort</b>
<b>si le feu est rouge</b>	<b>si ma vitesse est faible</b>	<b>et si le feu est loin</b>	<b>alors je maintiens ma vitesse</b>
<b>si le feu est orange</b>	<b>si ma vitesse est moyenne</b>	<b>et si le feu est loin</b>	<b>alors je freine doucement</b>
<b>si le feu est vert</b>	<b>si ma vitesse est faible</b>	<b>et si le feu est proche</b>	<b>alors j'accélère</b>

Les règles floues sont énoncées en langage naturel



# Introduction à la logique floue

...sans le savoir!

**Transposition de notre exemple selon un modèle plus mathématique « moins flou »**

Si le feu est rouge, si ma vitesse dépasse  $85,6 \text{ km/h}$  et si le feu est à moins de  $62,3 \text{ mètres}$ , alors j'appuie sur la pédale de frein avec une force de  $33,2 \text{ Newtons}$  !!!

**Notre cerveau fonctionne en logique floue**

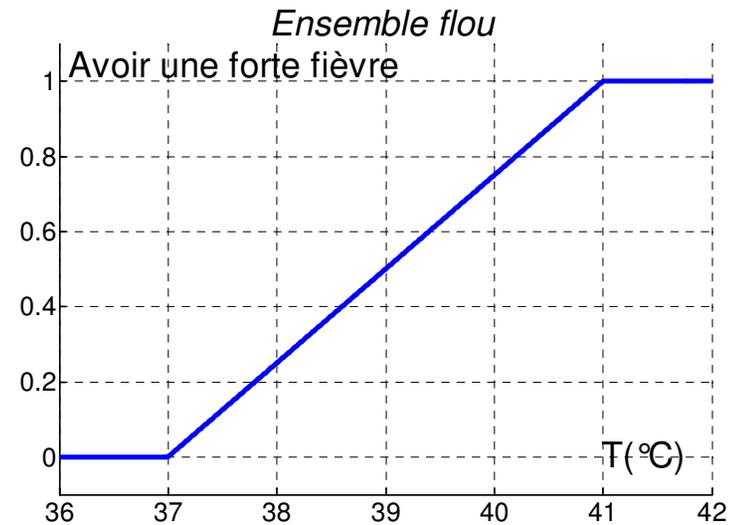
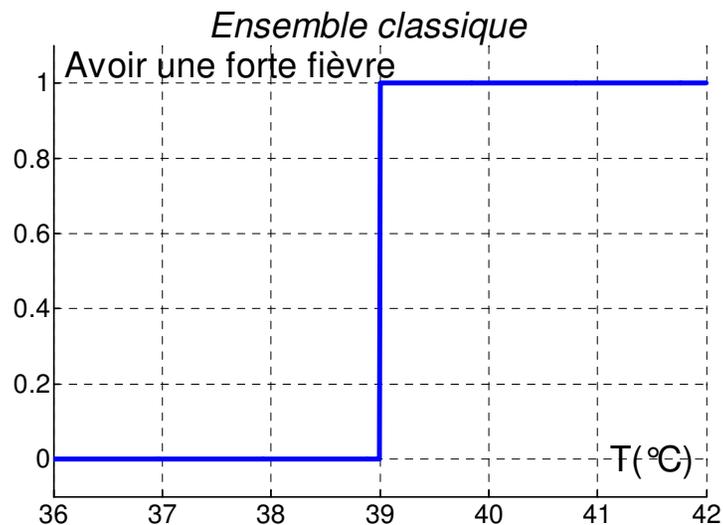
Il apprécie les variables d'entrées de façon approximative (faible, élevée, loin, proche), fait de même pour les variables de sorties (freinage léger ou fort) et propose un ensemble de règles permettant de déterminer les sorties en fonction des entrées

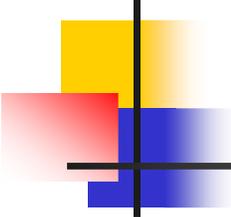
# Introduction à la logique floue

## Limite de la logique booléenne

Un patient atteint d'hépatite présente généralement les symptômes suivants :

- Le patient a une forte fièvre
- Sa peau présente une coloration jaune
- Il a des nausées





# Introduction à logique floue

---

Si le patient a  $38,9^{\circ}\text{C}$  de température

## Logique classique

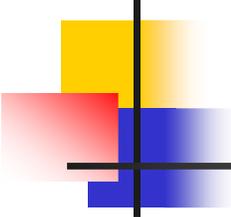
Le patient n'a pas de forte fièvre

$\Rightarrow$  Le patient n'a pas d'hépatite

## Logique floue

Le patient a une forte fièvre à  $48\%$

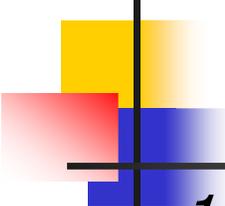
$\Rightarrow$  Le patient a une hépatite à  $x\%$



# Champs d'applications de la logique floue

---

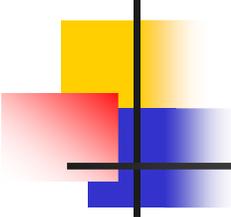
- Aide à la décision, au diagnostic  
(domaine médical, orientation professionnelle...)
- Base de données  
(objets flous et/ou requêtes floues)
- Reconnaissance de formes
- Agrégation multicritères et optimisation
- Commande floue de systèmes...



# Bref historique : les débuts

---

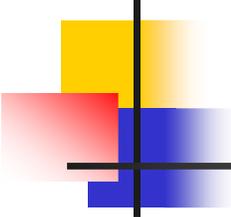
- *1965* : Concept introduit par Pr. Lotfi Zadeh (Berkeley)  
« Fuzzy set theory »: Définition des ensembles flous et opérateurs associés
- *1970* : Premières applications: Systèmes experts, Aide à la décision en médecine, commerce...
- *1974* : Première application industrielle. Régulation floue d'une chaudière à vapeur réalisée par Mamdani
- Longtemps universitaire
- *1985* : Les premiers, les japonais introduisent des produits grand public « Fuzzy Logic Inside »



# Bref historique

---

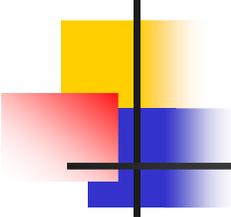
- *1990* : Généralisation de l'utilisation de cette technique
  - Appareils électroménagers (lave-linge, aspirateurs, autocuiseurs,...)
  - Systèmes audio-visuels (appareils de photos autofocus, caméscope à stabilisateur d'images, photocopieurs,...)
  - Systèmes automobiles embarqués (BVA, ABS, suspension, climatisation,...)
  - Systèmes autonomes mobiles
  - Systèmes de décision, diagnostic, reconnaissance
  - Systèmes de contrôle/commande dans la plupart des domaines industriels de production



# Concepts principaux

---

- Ensemble flou
- Opérateur logique flou
- Fuzzification >> Inférence floue >> Défuzzification



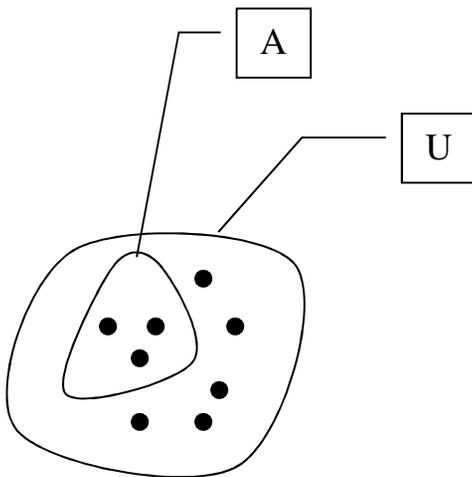
# Introduction à logique floue

---

- **Les deux concepts principaux de la logique floue**

1. Les ensembles et variables flous et opérateurs associés
2. Prise de décision à partir d'une base de règles *SI ... ALORS ...*  
C'est l'**inférence floue**

# Ensemble flou



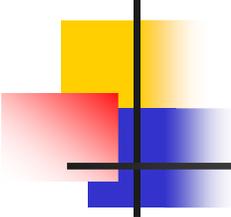
Soient  $U$  : l'univers du discours.  
 $A$  : un sous-ensemble de  $U$

## Théorie classique des ensembles

*Si  $\mu_A$  est la fonction d'appartenance de l'ensemble  $A$*

$$\forall x \in U \quad \mu_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A$$

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A$$



# Ensemble flou

---

## Concept d'ensemble flou

*Si  $\mu_A$  est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou A*

$$\forall x \in U \quad \mu_A(x) \in [0;1]$$

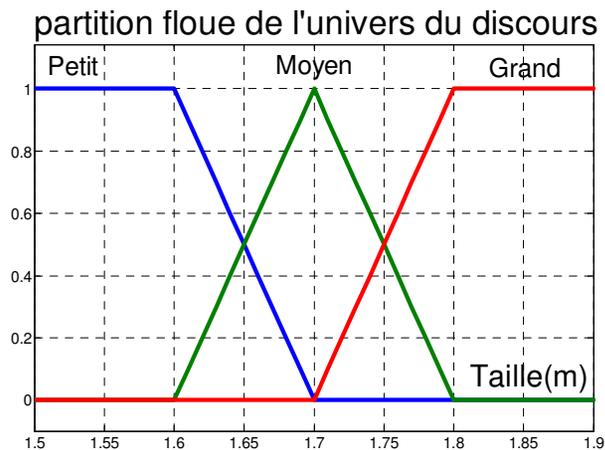
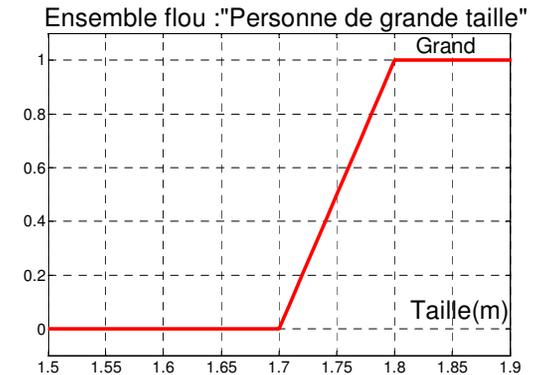
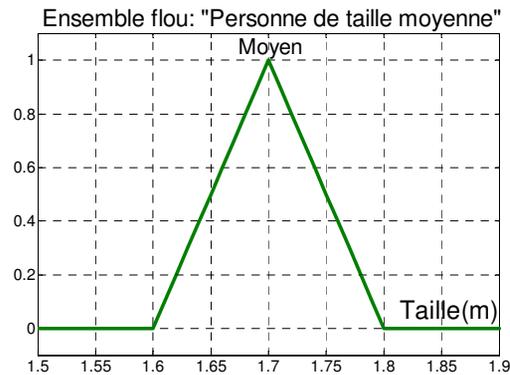
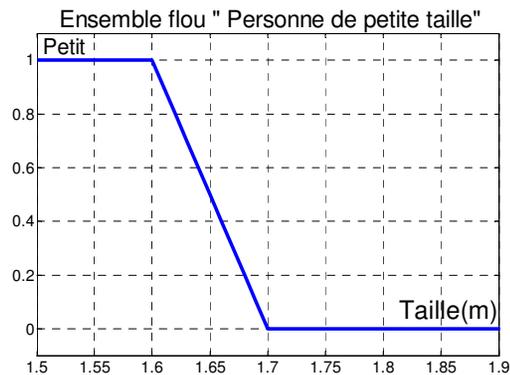
Si  $\mu_A(x) = 0,30$

$x$  appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 30%

degré d'appartenance = valeur de vérité

Un ensemble flou est totalement déterminé par sa fonction d'appartenance

# Exemples d'ensembles flous



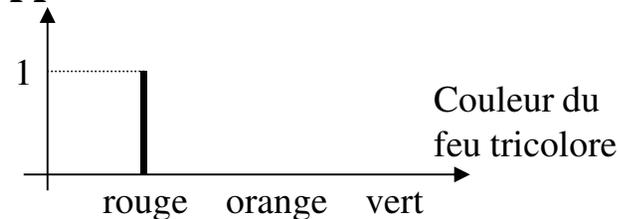
Ici, Pierre mesure  $1m625$   
se traduit en logique floue par  
« Pierre est petit » à un degré de 75%  
« Pierre est moyen » à 25%  
« Pierre est grand » à 0%

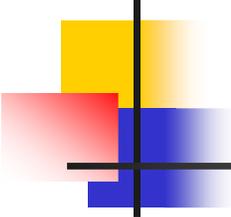
# Fonctions d'appartenance particulières

Lorsqu'un fait certain correspond à l'énoncé de la valeur d'une variable, on a un singleton:

$$\begin{cases} \mu_{x_0}(x_0) = 1 \text{ pour } x = x_0 \\ \mu_{x_0}(x) = 0 \text{ pour } x \neq x_0 \end{cases}$$

**Fonction d'appartenance de la classe « Le feu est rouge »**





# Opérateurs de logique floue

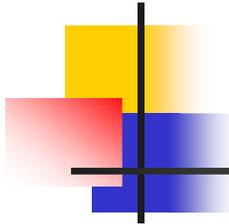
---

Comme pour la théorie classique des ensembles,  
on définit **la réunion, l'intersection, le complément...**d'ensembles flous

La logique booléenne standard est un cas particulier de la logique floue



Tous les résultats obtenus en logique classique doivent être retrouvés  
par la logique floue



# La réunion

---

$A$  est l'ensemble flou des personnes petites

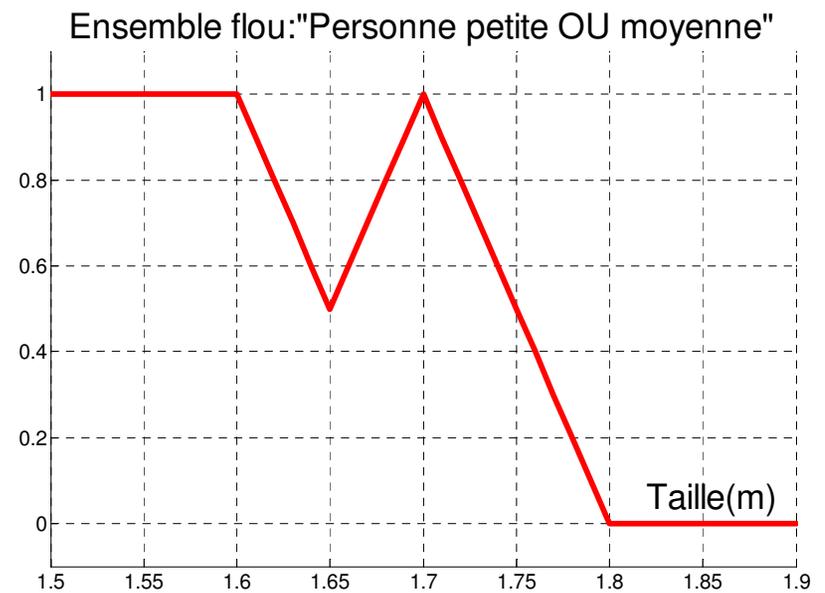
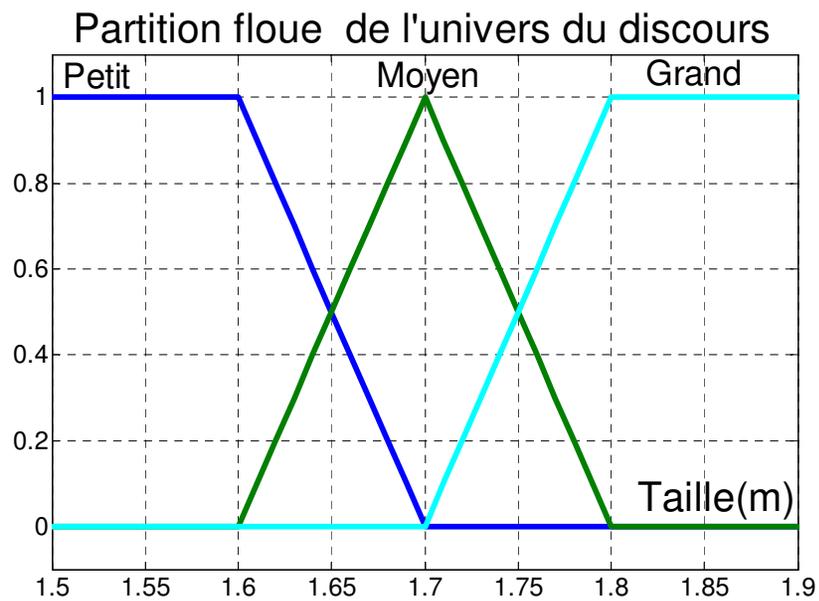
$B$  est l'ensemble flou des personnes moyennes

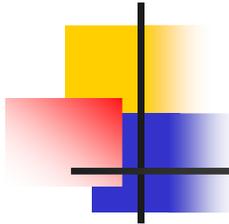
L'ensemble des personnes petites OU moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$

# La réunion

- Réunion des deux ensembles flous





# L'intersection

---

$A$  est l'ensemble flou des personnes petites

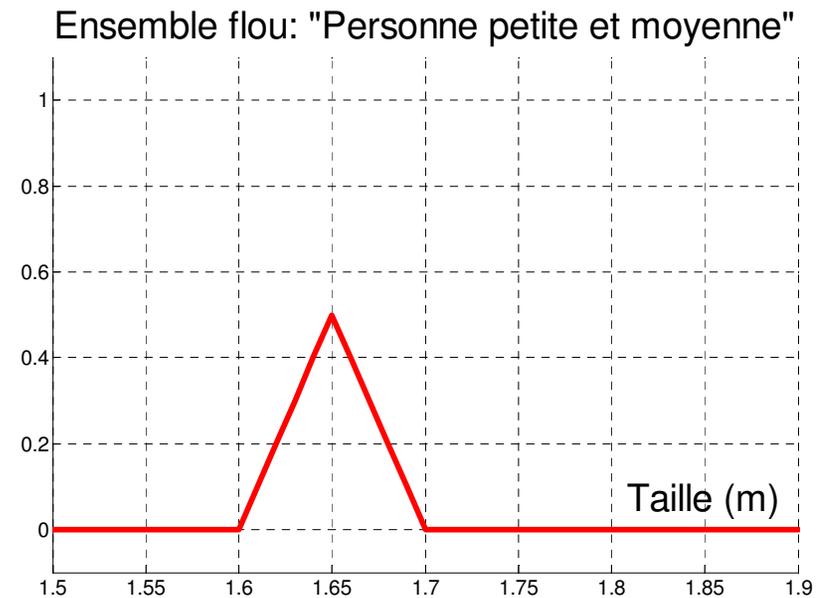
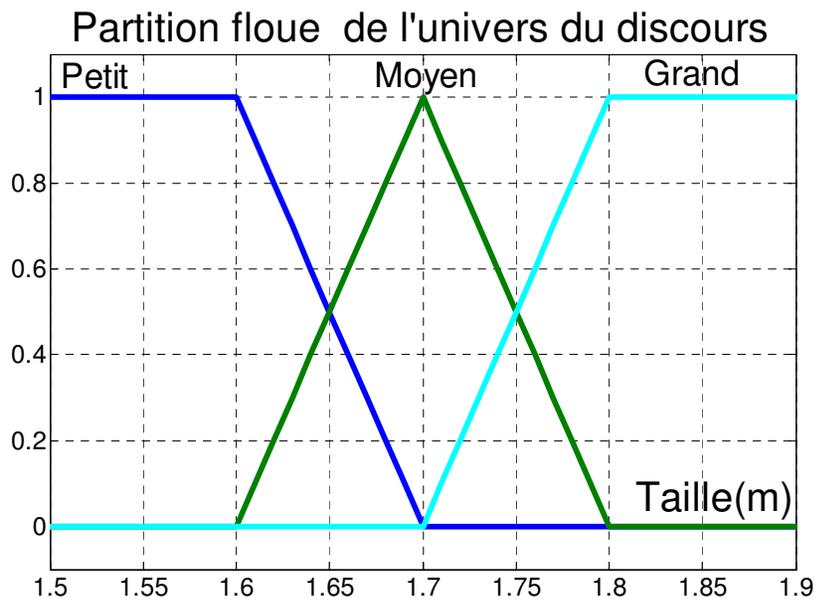
$B$  est l'ensembles flou des personnes moyennes

L'ensemble des personnes petites ET moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$

# L'intersection

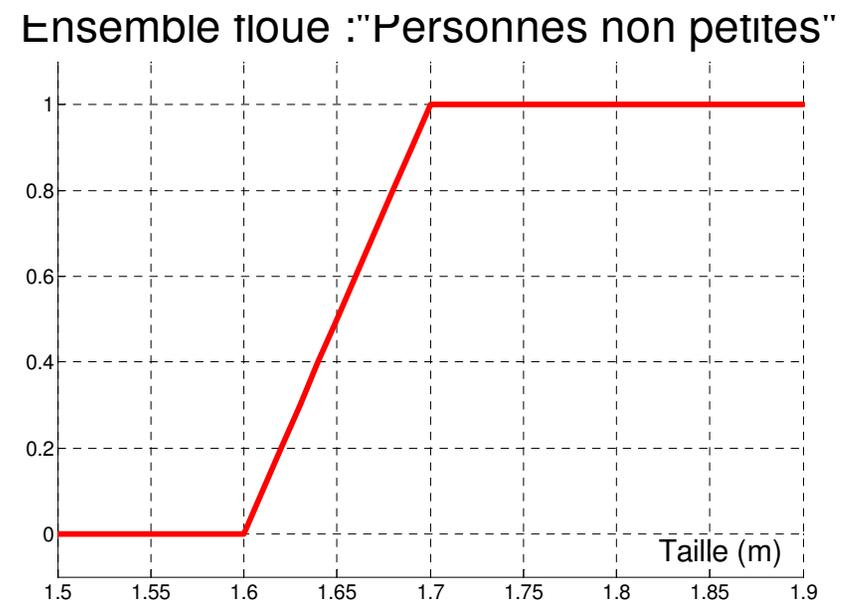
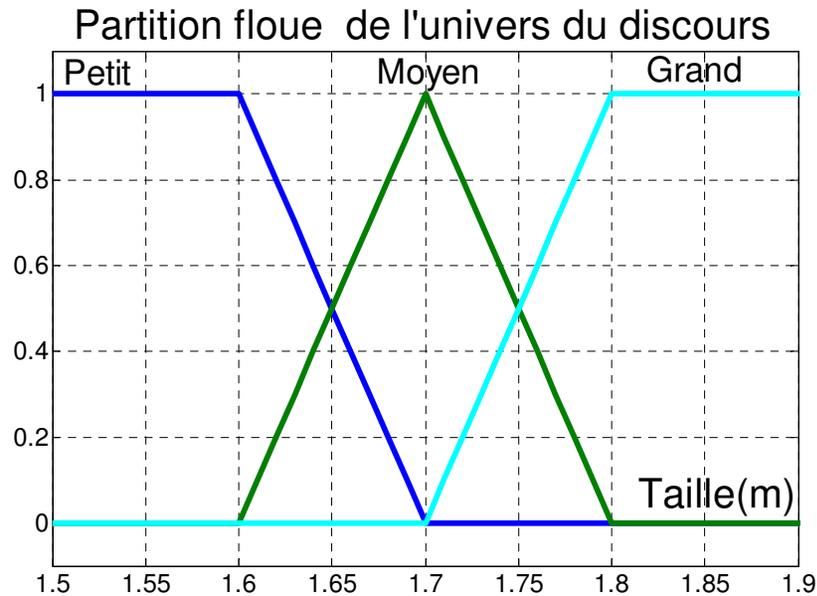
- Intersection des deux ensembles flous

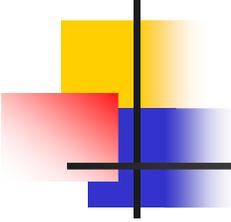


# Le complément

A est l'ensemble flou des personnes petites

L'ensemble des personnes NON petites est un ensemble flou de fonction d'appartenance





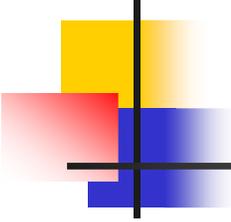
# Opérateurs flous alternatifs

---

- Toute *t-norme* peut servir à définir l'intersection floue

Une *t-norme* est une application  $T(x,y)$  satisfaisant les conditions suivantes:

- 1 est élément neutre  $\forall x \in [0,1] \quad T(x,1) = T(1,x) = x$ .
- Commutative  $T(x,y) = T(y,x)$
- Associative  $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$
- Monotone si  $x \leq z$  et  $y \leq w$  alors  $T(x,y) \leq T(z,w)$



# Opérateurs flous alternatifs

---

- Toute t-conorme peut servir à définir la réunion floue

Une t-conorme est une application  $S(x,y)$  satisfaisant les conditions suivantes:

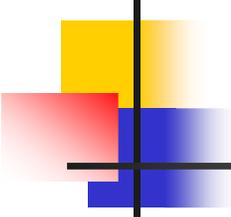
- 0 est élément neutre  $\forall x \in [0,1] \quad S(x,0) = x$
- Commutative  $S(x,y) = S(y,x)$
- Associative  $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$
- Monotone si  $x \leq z$  et  $y \leq w$  alors  $S(x,y) \leq S(z,w)$

# Opérateurs flous alternatifs

notation	t-norme	dénomination	t-conorme associée
$t_G$	$\min(x, y)$	Zadeh	$\max(x, y)$
$t_P$	$x \cdot y$	probabiliste	$x + y - x \cdot y$
$t_L$	$\max(0, x + y - 1)$	Lukasiewicz	$\min(1, x + y)$
$t_D$	$\min(x, y)$ pour $x = 1$ ou $y = 1$ 0 ailleurs		$\max(x, y)$ pour $x \cdot y = 0$ 1 ailleurs
$t_\lambda^D, \lambda > 0$	$1 - \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1-x}{x} \right)^\lambda + \left( \frac{1-y}{y} \right)^\lambda \right]^{1/\lambda}}$	Dombi	$\frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{x}{1-x} \right)^\lambda + \left( \frac{y}{1-y} \right)^\lambda \right]^{-1/\lambda}}$
$t_\gamma^H, \gamma \geq 0$	$\frac{xy}{\gamma + (1-\gamma) \cdot (x + y - xy)}$	Hamacher	$\frac{x + y - xy - (1-\gamma)xy}{1 - (1-\lambda)xy}$
$t_p^Y, p > 0$	$1 - \min([1-x]^p + [1-y]^p]^{1/p}, 1)$	Yager	$\min((x^p + y^p)^{1/p}, 1)$
$t_\lambda^W, \lambda > -1$	$\max\left(0, \frac{x+y-1+\lambda \cdot xy}{1+\lambda}\right)$	Weber	$\min(x+y+\lambda xy, 1)$

# Opérateurs de logique floue les plus utilisés

Dénomination	Intersection <i>ET</i> ( <i>t</i> -norme)	Réunion <i>OU</i> ( <i>t</i> -conorme)	Complément <i>NON</i>
Opérateurs de Zadeh MIN/MAX	$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
Probabiliste PROD/PROBOR	$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$



# Opérateurs de logique floue

---

∀ les définitions d'opérateurs ET et OU, on retrouve les propriétés des opérateurs booléens

*Commutativité*

*Distributivité*

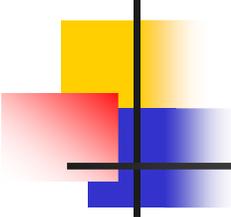
$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

*Associativité*

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

*Lois de de Morgan*

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$$



# Opérateurs de logique floue

---

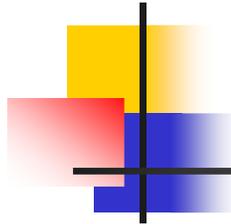
## Deux exceptions notables

1. En logique floue, le principe du tiers exclu est contredit

$$A \cup \bar{A} \neq U \quad \text{i.e.} \quad \mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$$

2. En logique floue, on peut être  $A$  et non  $A$  en même temps

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset \quad \text{i.e.} \quad \mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq 0$$



# Fuzzification

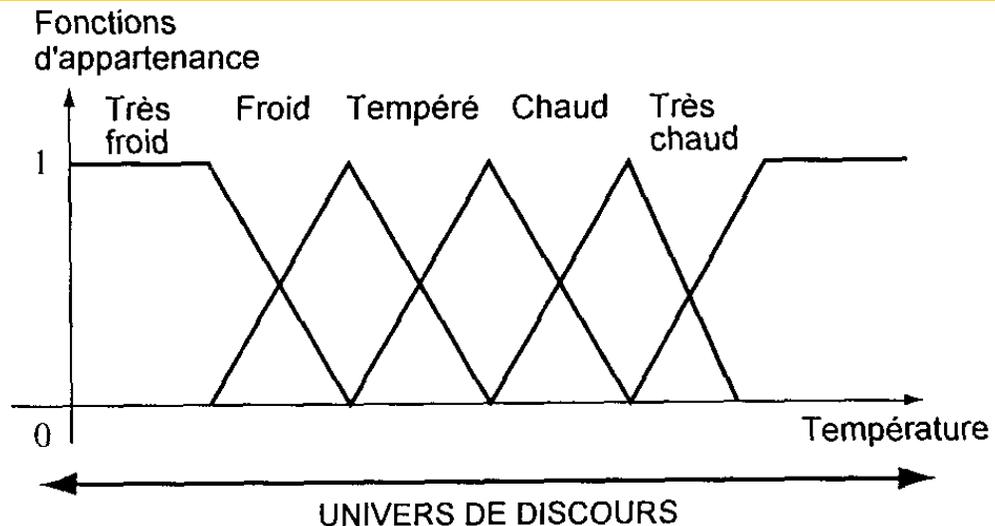
---

- Variables linguistiques
- Comment fuzzifier?

# Variables floues

- Logique floue → basée sur des variables floues dites **variables linguistiques** à symboles dans l'univers du discours  $U$
- Chaque symbole constitue alors un ensemble flou de l'univers du discours

Exemple:



**Univers du discours** : gamme de température de  $0^{\circ}\text{C}$  à  $200^{\circ}\text{C}$

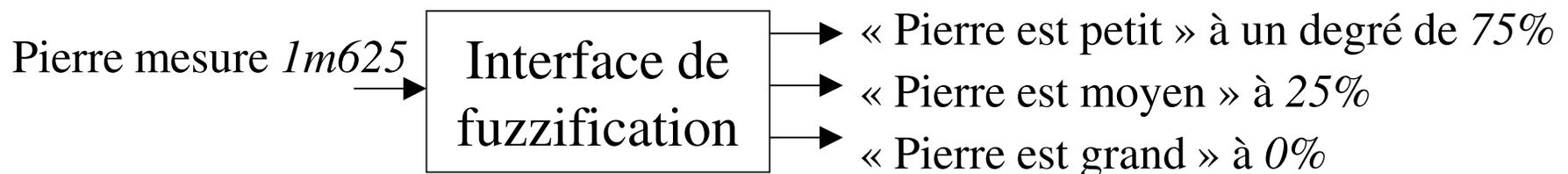
**Variable linguistique** : la température

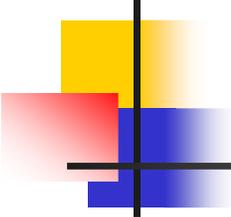
**Symboles** : « Très froid » « Froid » « Tempéré » « Chaud » « Très Chaud »

# Fuzzification

- Les systèmes à logique floue traitent de variables d'entrées floues et fournissent de résultats sur des variables de sorties elle-mêmes floues

La fuzzification est l'étape qui consiste en la quantification floue des valeurs réelles d'une variable.

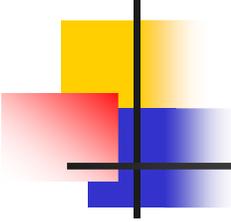




# Comment fuzzifier ?

---

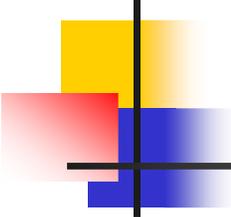
- Pour fuzzifier, il faut donner
  - L'univers du discours
    - i.e.: domaine de définition de l'entrée considérée
  - Une partition en symboles de cet univers
  - Les fonctions d'appartenances de chacun de ces symboles



# Inférence floue

---

- Base de règles
- Principe du raisonnement approximatif :  
inférence floue
- Méthodes d'inférence floue
- Agrégation des règles



# Base de règles

---

Les systèmes à logique floue utilisent une expertise exprimée sous forme d'une base de règles du type: *Si....Alors...*

*Si ( X est A ) Alors ( Y est B )*

*Si Temps est beau ET Moment est DébutMatinée ALORS Moral est haut*

*Si Cours est Ennuyeux ET Moment est DébutCours ALORS Moral est bas*

*Si Cours est Intéressant ET ChargedeTravail est Importante ALORS Moral est Maussade*

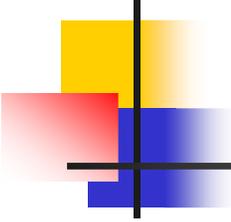
*Si .....*

# Inférence floue



## Inférence :

Opération logique par laquelle on admet une proposition en vertu de sa liaison avec d'autres propositions tenues pour vraies.



# Inférence floue

---

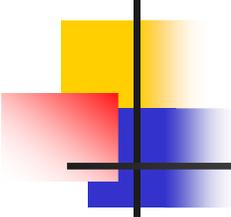
## En logique classique

$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } p \textit{ Alors } q \\ \textit{p vrai Alors } q \textit{ vrai} \end{array} \right.$

## En logique floue

*Si ( X est A ) Alors ( Y est B )*

- La variable floue  $X$  appartient au symbole  $A$  avec un degré d'appartenance  $\mu(x_0)$
- La variable floue  $Y$  appartient au symbole  $B$  à un degré qui dépend du degré d'appartenance  $\mu(x_0)$  de la prémisse



# Inférence floue

---

**Plus la condition sur les entrées est vraie.**

**Plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée**

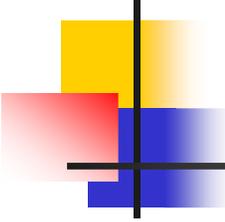
SI *la température est très basse* ALORS *Chauffer fort*

La conclusion d'une règle floue est l'appartenance d'une variable linguistique de sortie « *chauffer* » à un ensemble flou

« *fort* »

Cette appartenance dépend de :

- 1°) La classe floue de sortie considérée.
- 2°) du degré de validité de la prémisse  $\mu_{\text{prémises}}(x_0)$
- 3°) de la méthode d'implication choisie.



# Méthodes d'implication

---

Deux méthodes principales d'implication floue

Méthode de Mamdani  $\mu'_{conclusion}(y) = \underset{y}{MIN}(\mu_{prémisse}(x_0), \mu_{conclusion}(y))$

Méthode de Larsen  $\mu'_{conclusion}(y) = \mu_{prémisse}(x_0) \times \mu_{conclusion}(y)$

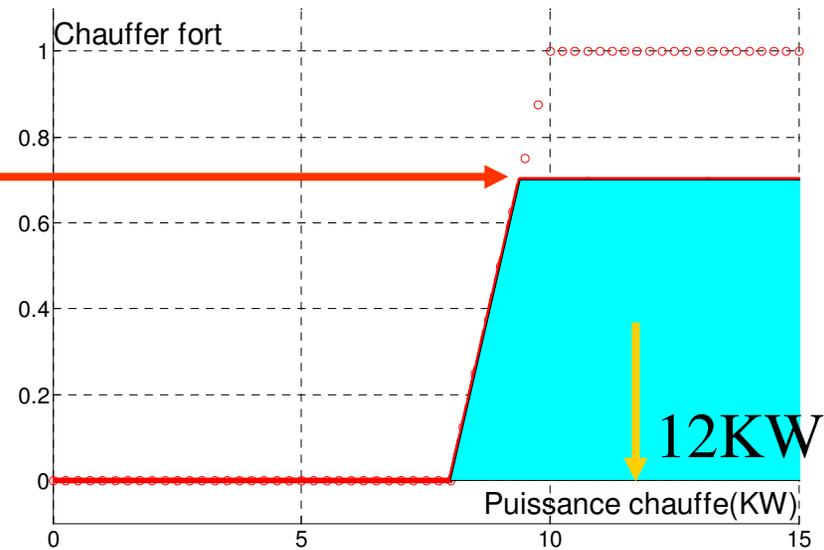
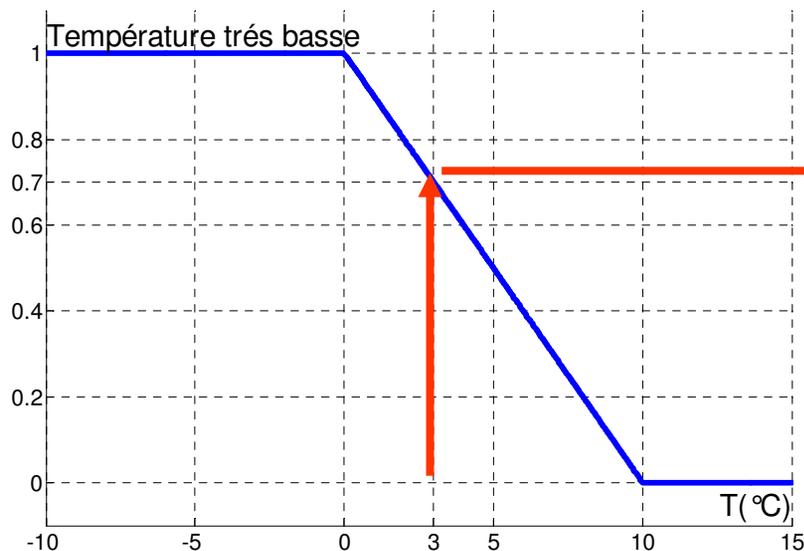
# Exemple (Mandani)

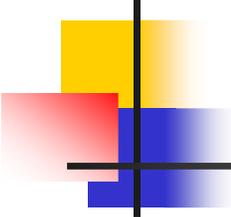
Plus la condition sur les entrées est vraie.

Plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée

Règle: SI la température est très basse ALORS Chauffer fort

$$\mu'_{conclusion}(y) = \min_y(\mu_{prémisse}(x_0), \mu_{conclusion}(y))$$





# Activation des règles

---

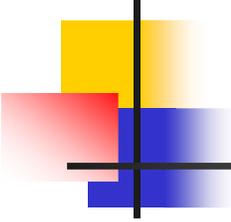
R1: *Si ( $X_1$  est  $A_{11}$ ) et ( $X_2$  est  $A_{12}$ )* *alors  $Y$  est  $B_1$*

R2: *Si ( $X_1$  est  $A_{21}$ ) ou ( $X_2$  est  $A_{22}$ )* *alors  $Y$  est  $B_2$*

R3: *Si ( $X_1$  est  $A_{31}$ ) et ( $X_2$  est  $A_{32}$ ) et ( $X_3$  est  $A_{33}$ )* *alors  $Y$  est  $B_3$*

.....

- Une règle est activée dès qu'elle a une prémisse ayant une valeur de vérité non nulle
- Plusieurs règles peuvent être activées simultanément et préconiser des actions avec différents degrés de validité ; ces actions peuvent être contradictoires



# Agrégation des règles

---

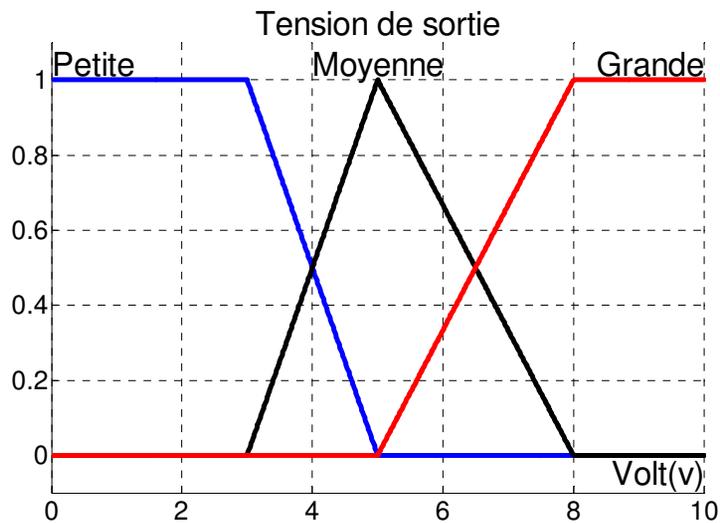
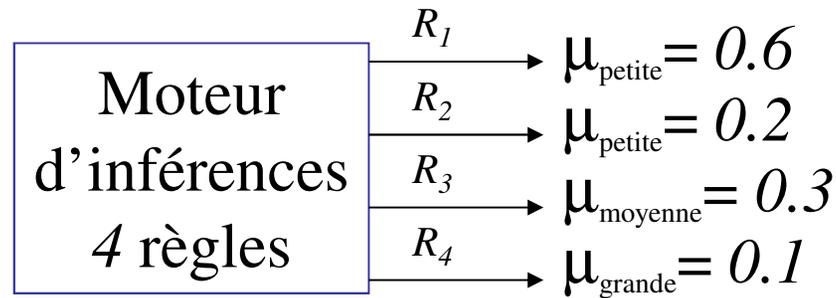
Nous considérons que les règles sont liées par un opérateur *OU*

$$\mu_B(y) = \text{MAX} [\mu_{B_i}(y)] \quad i \in \{\textit{indices des règles activées}\}$$

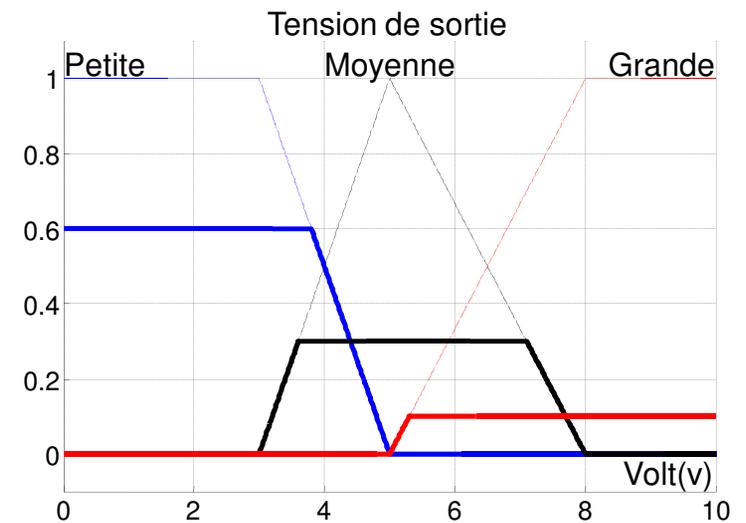
Les règles sont agrégées pour fournir une appartenance de la variable floue de sortie à un ensemble flou consolidé

# Exemple

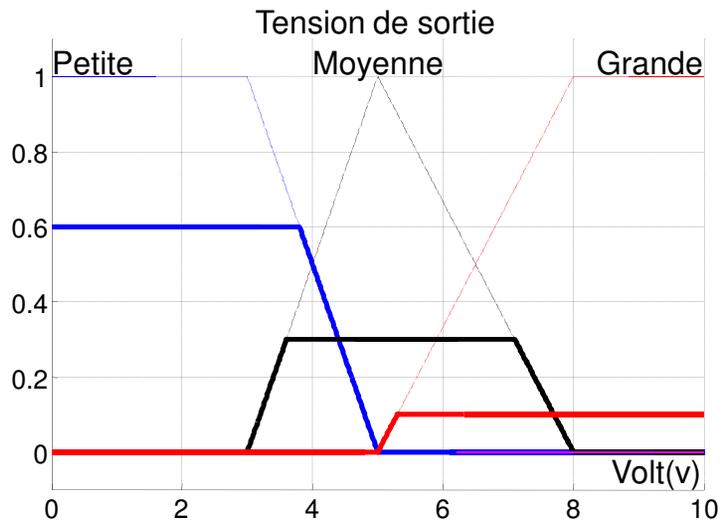
On considère un moteur d'inférence à 4 règles qui fournit pour la sortie de tension  $S_1$ , les résultats suivants



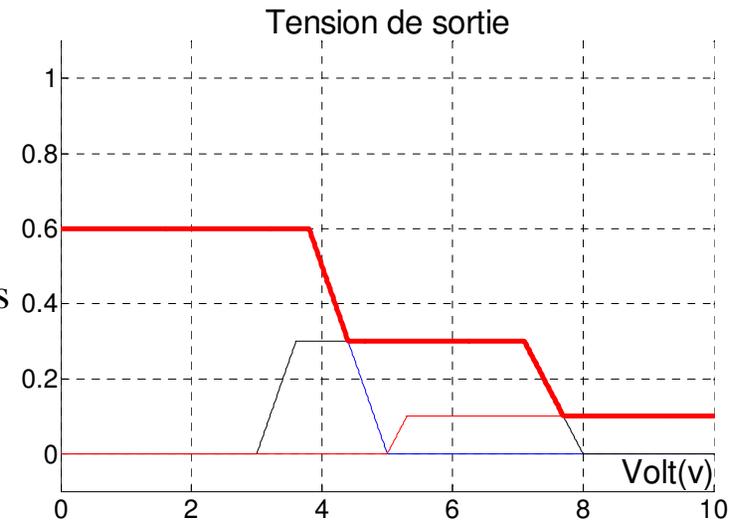
Implication floue de Mamdani



# Exemple



⇒  
Agrégation  
des conclusions

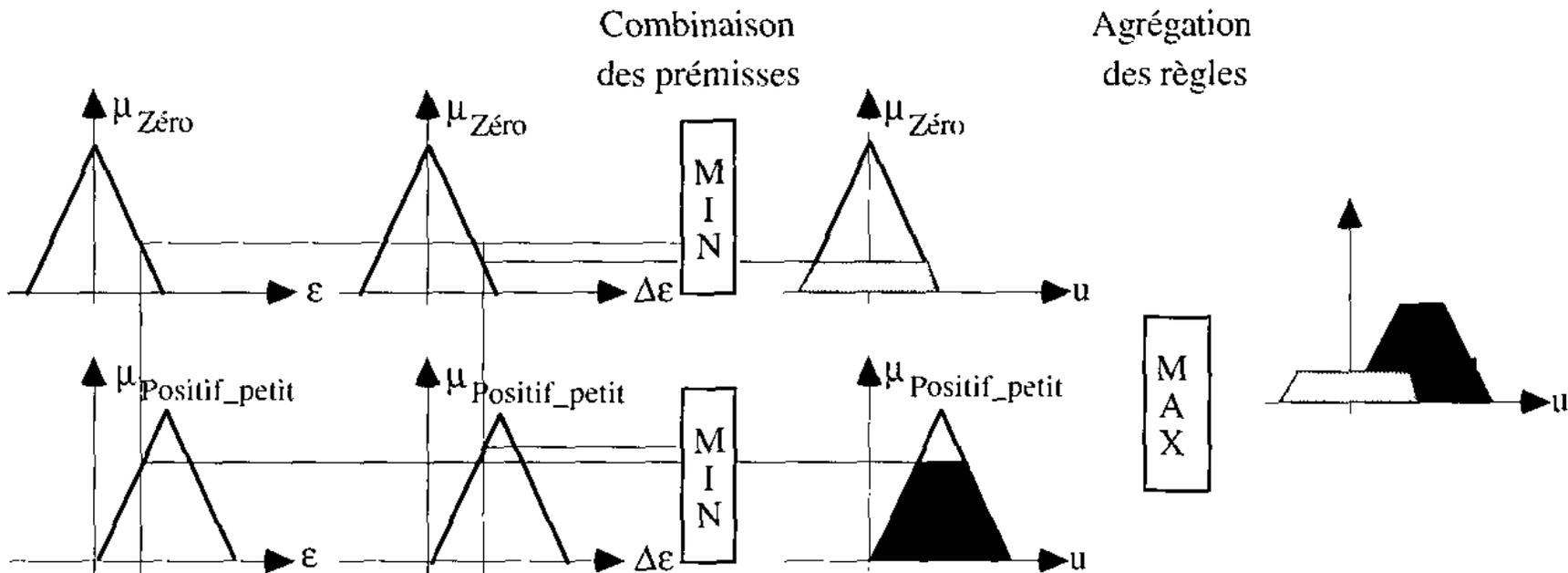


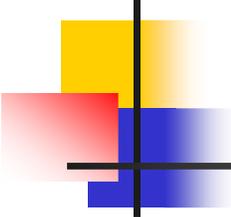
Nous avons la fonction d'appartenance d'un ensemble flou  
qui caractérise le résultat

Il faut défuzzifier, c'est à dire

Associer à cette ensemble flou un nombre interprétable par  
l'utilisateur, l'interface de commande...

# Principe de la méthode de Mandani





# Défuzzification

---

- Méthodes de défuzzification
- Synthèse générale

# Méthodes de défuzzification

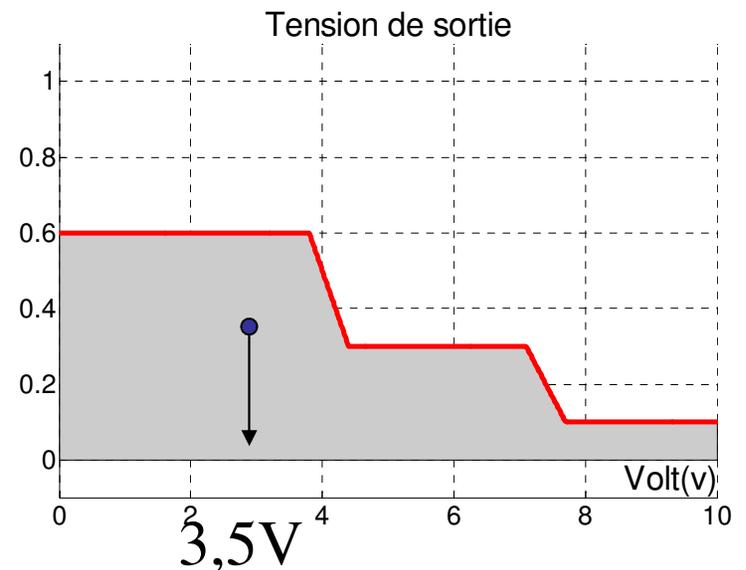
## 1. Méthode du centre de gravité (COG)

C'est l'abscisse du centre de gravité de la surface sous la courbe résultat

$$sortie = \frac{\int_U y \cdot \mu(y) \cdot dy}{\int_U \mu(y) \cdot dy}$$

$U = \text{Univers du discours}$

$= \text{Toutes les valeurs de sorties considérées}$



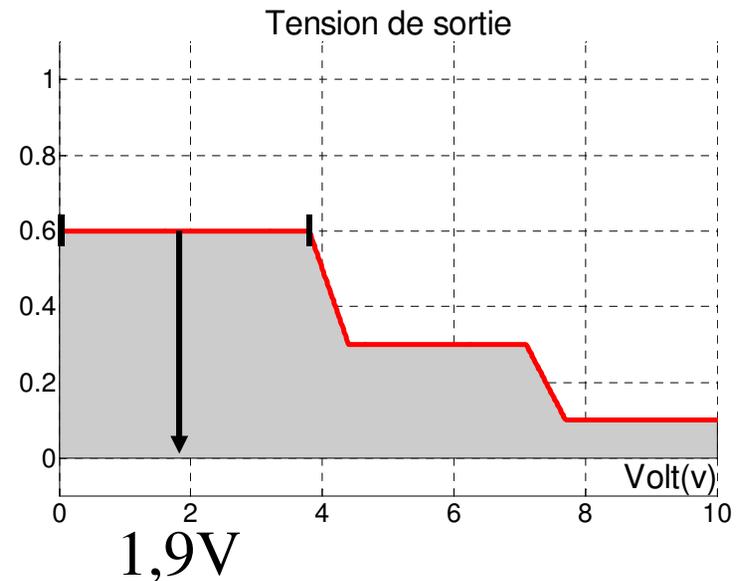
# Méthodes de défuzzification

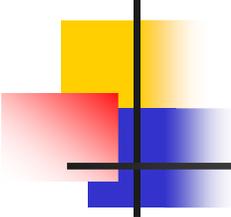
## 2. Méthode moyenne des maximums (MM)

C'est la moyenne des valeurs de sorties les plus vraisemblables

$$sortie = \frac{\int_S y \cdot dy}{\int_S dy}$$

$$où S = \left\{ y_0 \in U / \mu(y_0) = \underset{y \in U}{SUP}(\mu(y)) \right\}$$



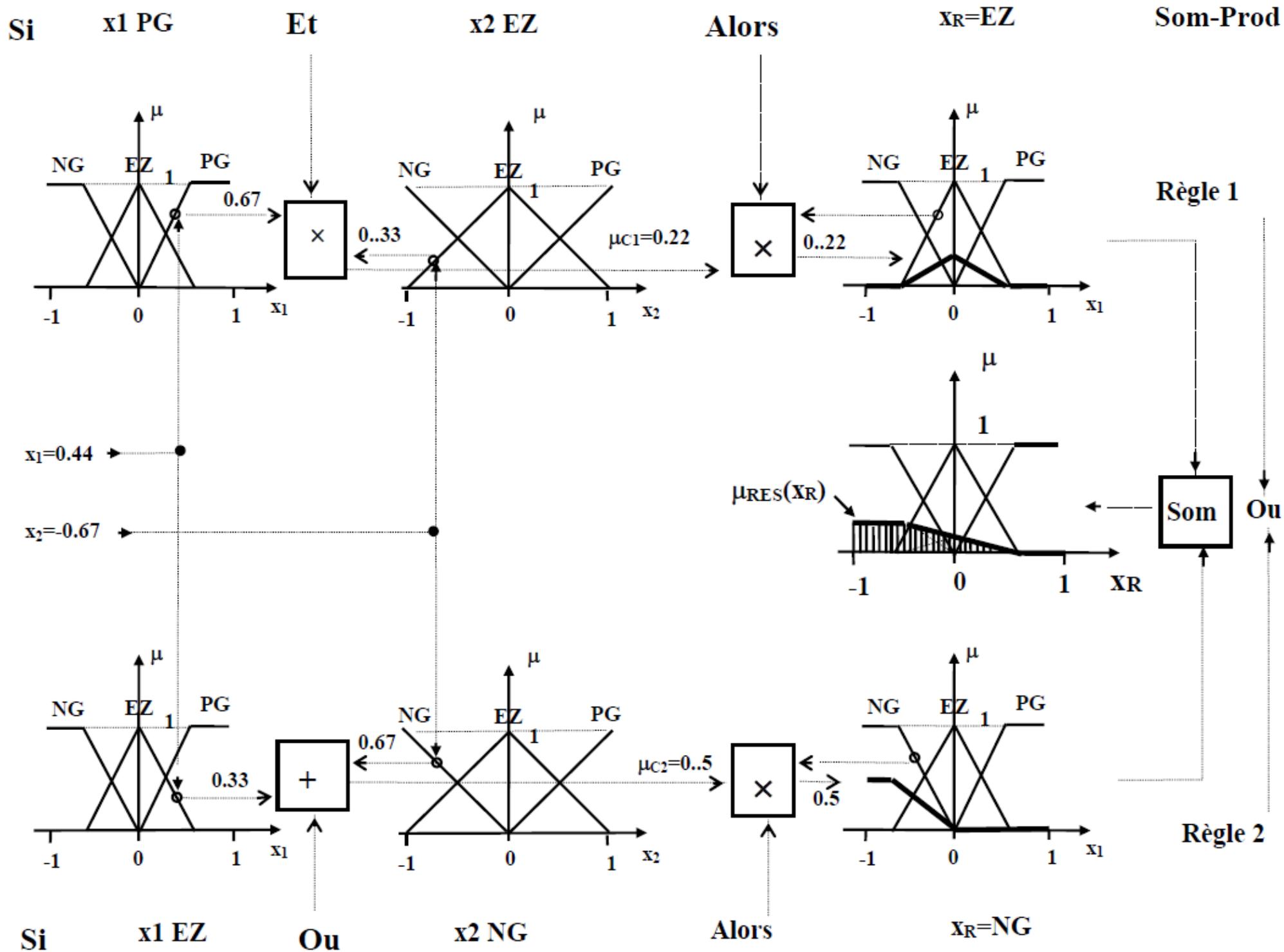


# Défuzzification

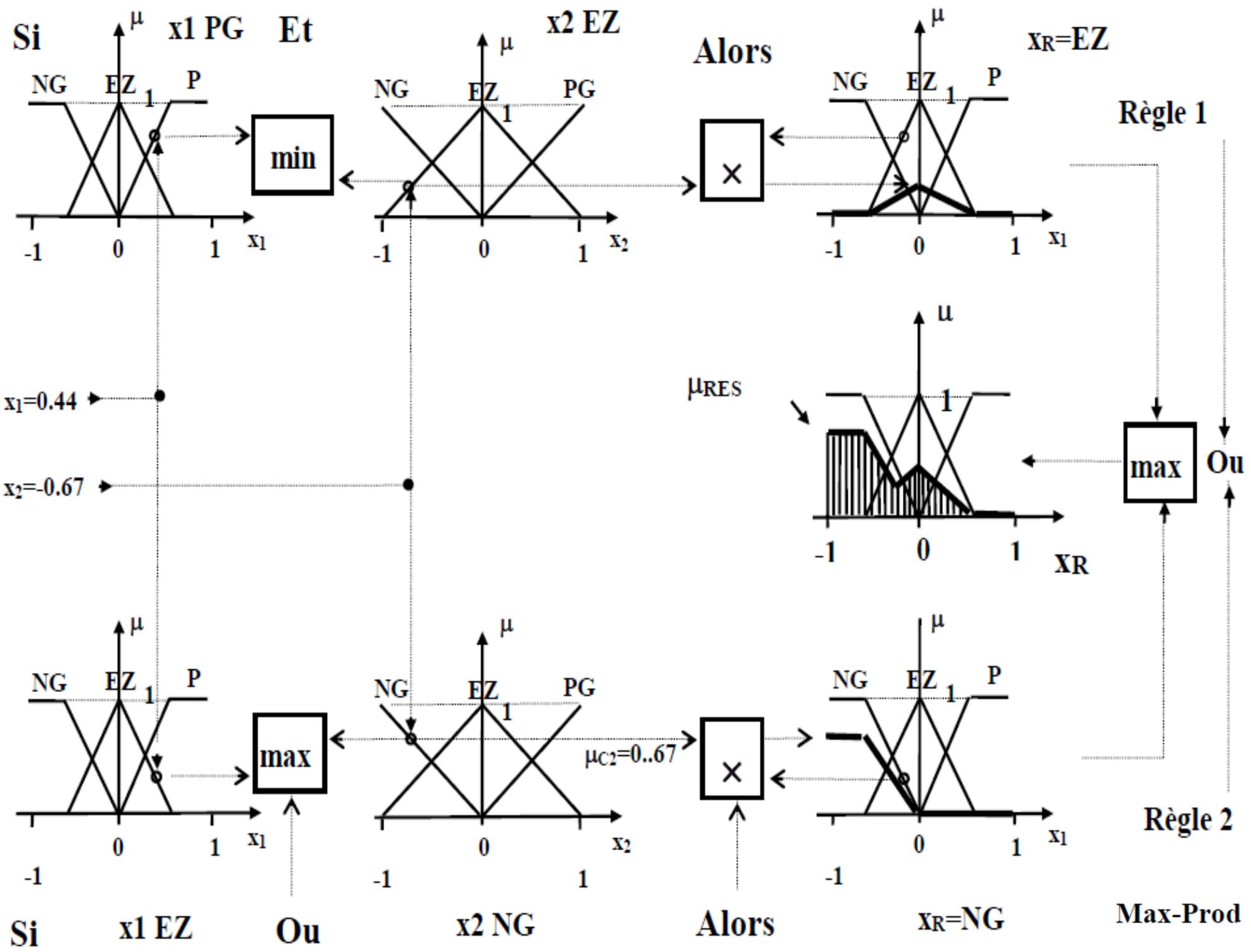
---

- Remarque

En commande floue, la défuzzification *COG* est presque toujours utilisée. Elle prend en compte l'influence de l'ensemble des valeurs proposées par la solution floue

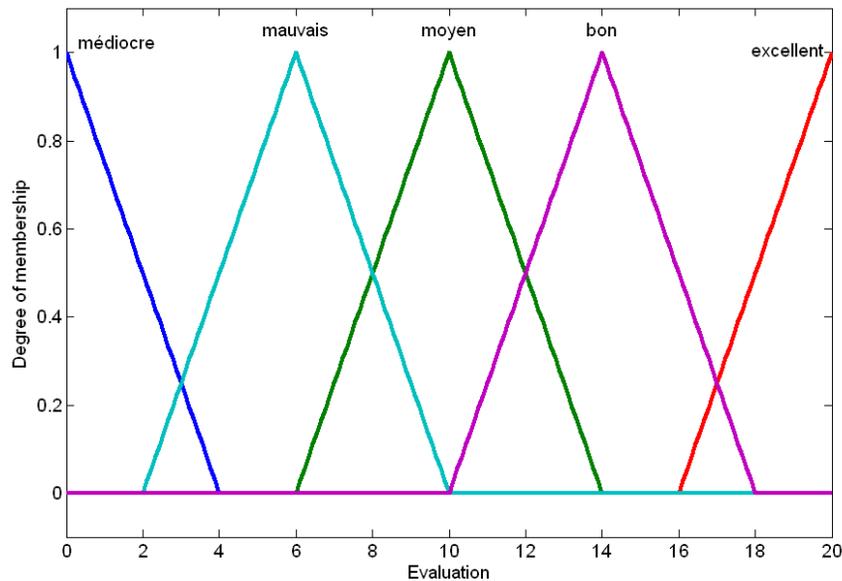


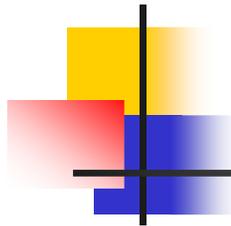




# Mise en place du système d'inférence floue

## Sortie



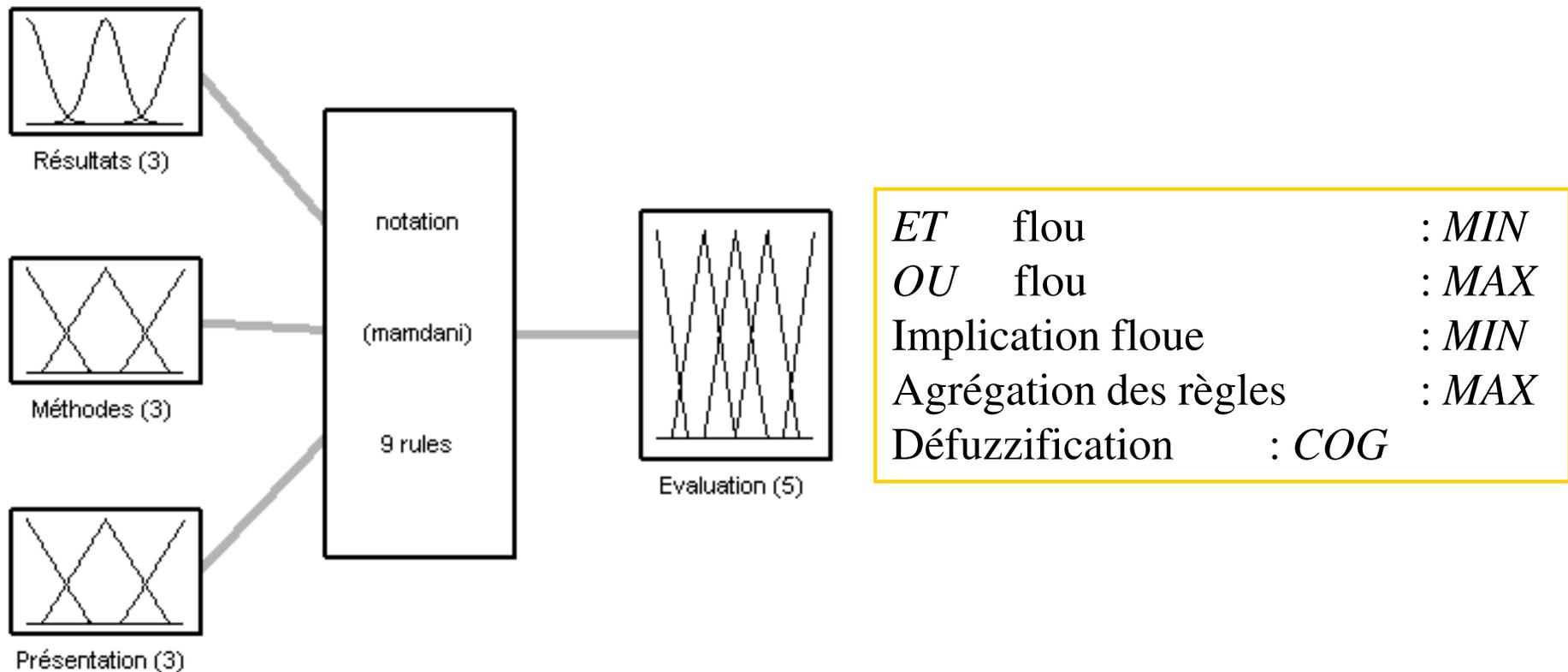


# Base de règles

---

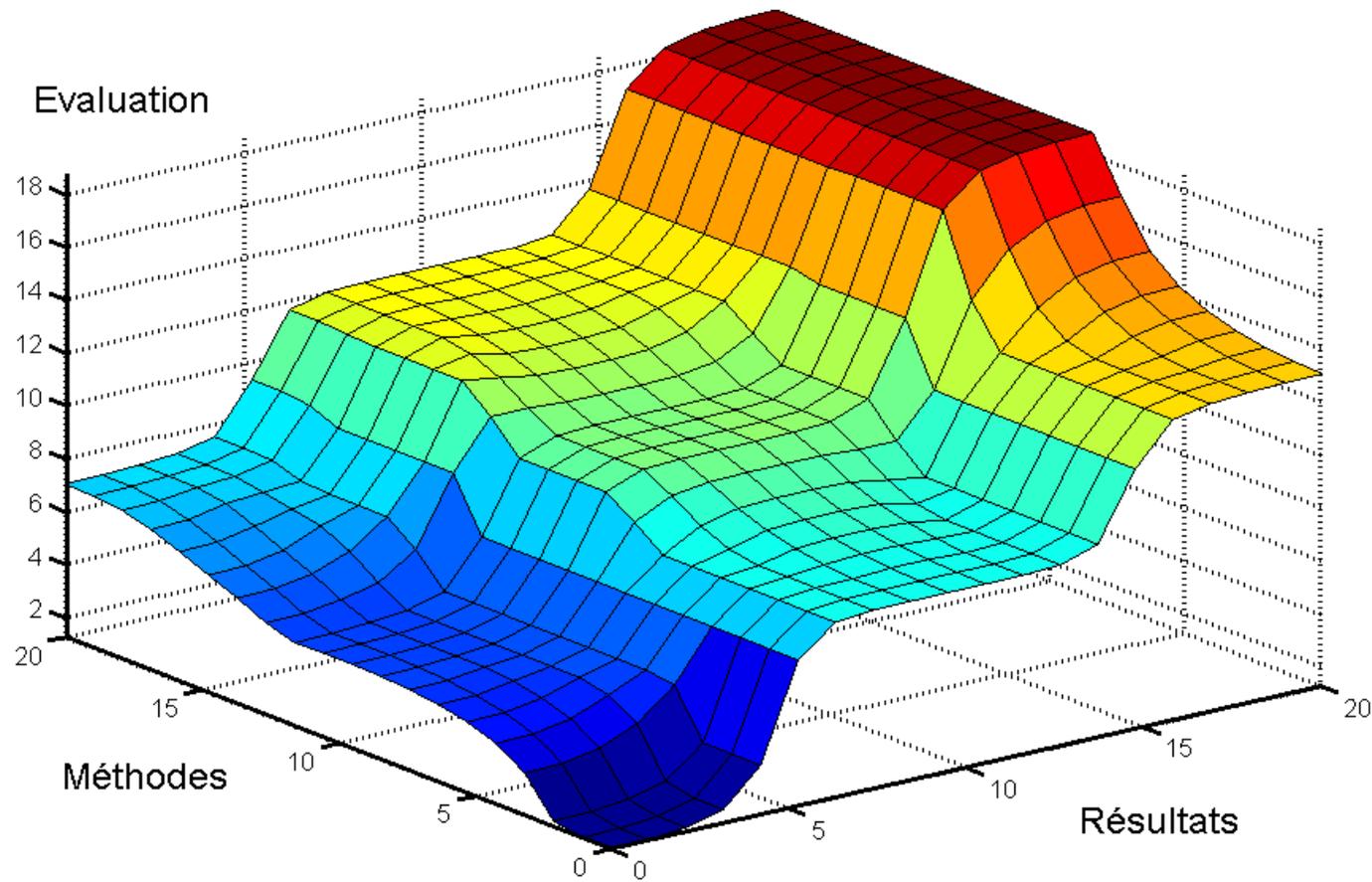
1. If (Résultats is excellent) then (Evaluation is excellent)
2. If (Résultats is moyen) then (Evaluation is moyen)
3. If (Résultats is médiocre) then (Evaluation is médiocre)
4. If (Résultats is moyen) and (Méthodes is médiocre) then (Evaluation is mauvais)
5. If (Résultats is moyen) and (Méthodes is excellent) then (Evaluation is bon)
6. If (Résultats is médiocre) and (Méthodes is moyen) then (Evaluation is mauvais)
7. If (Résultats is excellent) and (Méthodes is excellent) and (Présentation is excellent) then (Evaluation is excellent)
8. If (Résultats is médiocre) and (Méthodes is excellent) then (Evaluation is moyen)
9. If (Résultats is excellent) and (Méthodes is médiocre) then (Evaluation is moyen)

# Choix des opérateurs flous

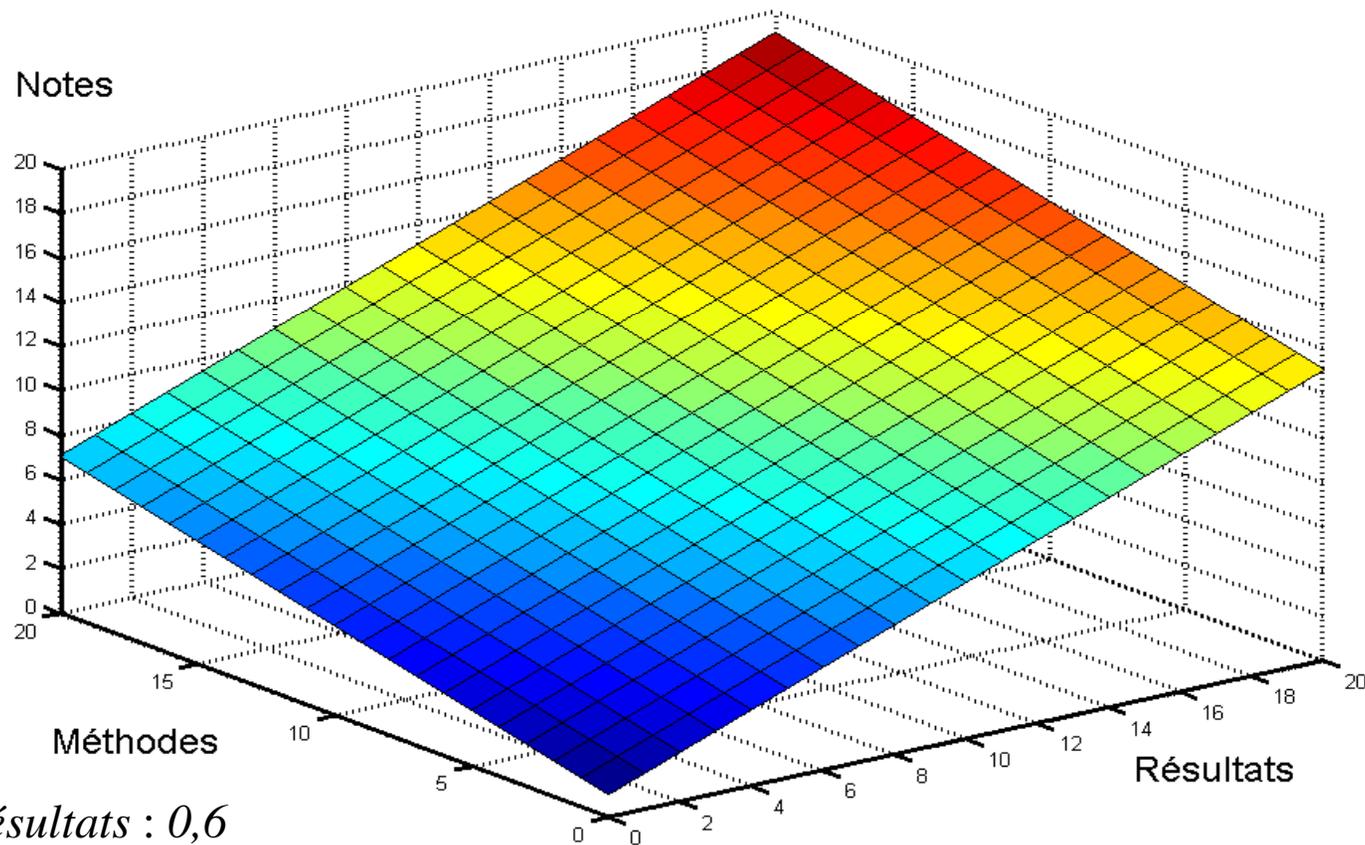
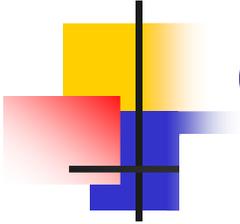


System notation: 3 inputs, 1 outputs, 9 rules

# Surface de décision floue

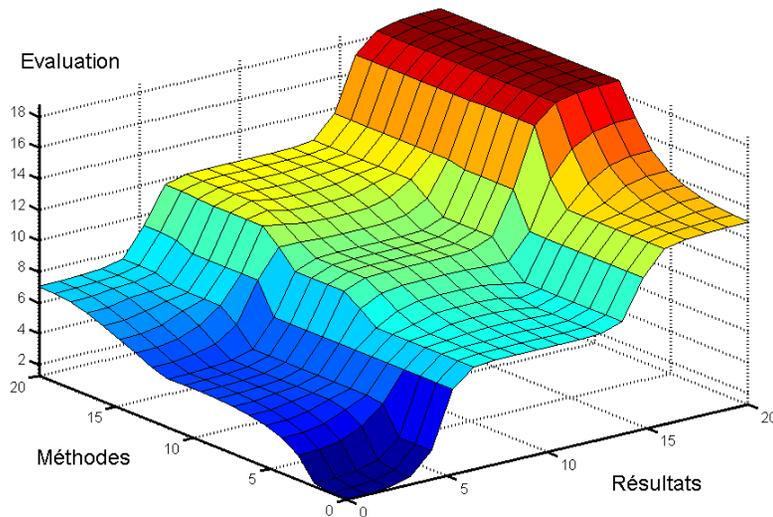


# Surface de décision linéaire classique



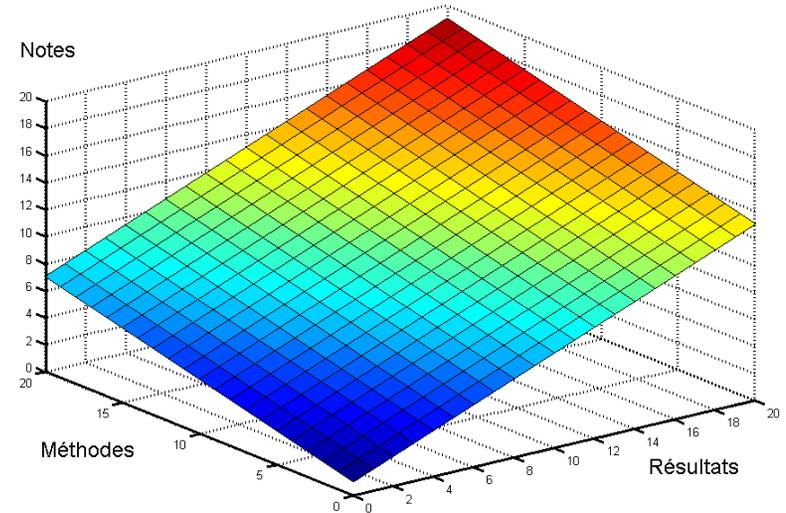
Pondération *Résultats* : 0,6  
Pondération *Méthodes* : 0,3  
Pondération *Présentation* : 0,1

# Commentaires



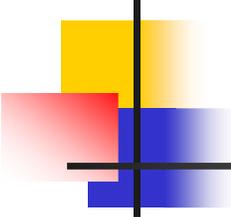
Décision selon un système d'inférence  
floue

Non linéaire



Décision selon un modèle mathématiques  
 $Note = 0,6 * Résultats + 0,3 * Méthodes + 0,1 * Présentation$

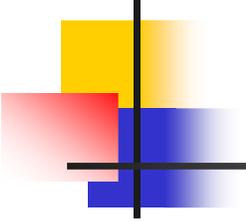
Linéaire ( $\Delta Note / \Delta entrée = Cste$ )



# Exemple complet

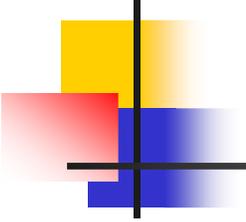
---

Exemple d'application :  
régulation de température



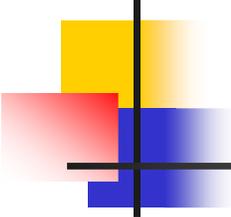
# Régulation de température

- Nous présentons le cas du réglage de la température d'une serre. Dans ce but, nous mesurons la température avec un capteur qui fournit la valeur de la grandeur à régler.



# Régulation de température

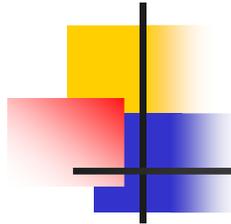
- Nous supposons que le système est linéaire et sa fonction de transfert est définie par : avec cependant un retard égal à  $1s$ . C'est un système de contrôle de température avec un élément de chauffage et de ventilation. Un échelon de température de  $-1.5^{\circ}C$  sera ajouté à la sortie de  $H(s)$  puis le signal ainsi obtenu sera filtré par un intégrateur. La température extérieure est de  $10^{\circ}C$  et son effet intervient après l'intégrateur. La température désirée est de  $20^{\circ}C$ .



# Plan du cours

---

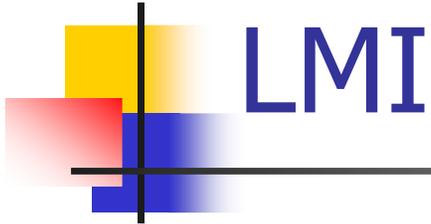
- Inégalités matricielles linéaires (*LMI*)
- Modèles flous de type Takagi-Sugeno (*TS*)
- Contrôleurs flous : Parallel Distributed Compensation (*PDC*)
- Commande floue et poursuite de trajectoire



# Plan du cours

---

## Inégalités Matricielles Linéaires (*LMI*)

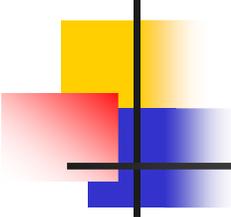


⇒ Inégalité matricielle linéaire ou LMI

$$F(\xi) = F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i > 0$$

$\xi \in \mathfrak{R}^m$  : vecteur de variables de décision

$F_i$  :  $m$  matrices symétriques  $\in \mathfrak{R}^{n \times n}$



# Théorie de Lyapunov

---

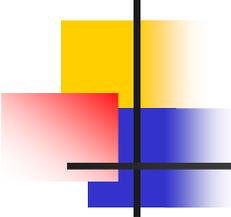
⇒  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

⇒ Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V = x^t P x$$

⇒ Trois propriétés à vérifier...  $P$  matrice symétrique définie positive

⇒  $dV / dt < 0 \Rightarrow x^t (A^t P + PA)x < 0$   
⇒  $(A^t P + PA) < 0$



# LMI

---

⇒ Application au problème de stabilité

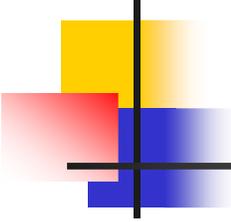
$$dV / dt < 0 \Rightarrow (A^t P + PA) < 0$$

$$V > 0 \Rightarrow P > 0$$

$$P = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \xi_i P_i$$

$P_i$  : base de l'espace des matrices symétriques

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \xi_i F_i = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \xi_i \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -(A^t P_i + P_i A) \end{bmatrix} > 0$$



# Ensemble et fonction convexe

---

⇒ Ensemble *convexe*  $C$

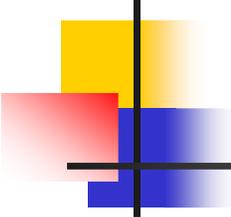
$$\forall \lambda \in [0 \ 1], x_1 \in C, x_2 \in C \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$$

⇒ Fonction *convexe*  $f$

Support  $D$  convexe +

$$\forall \lambda \in [0 \ 1], \forall x \in D, \forall y \in D$$

$$\Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$



# Problème d'optimisation

---

⇒ Problème d'optimisation de dimension finie

$$\min f(\xi)$$

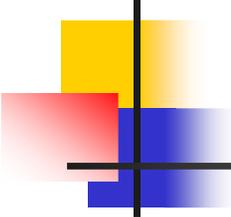
$$\xi \in C$$

$\xi$  : vecteur de variables de décision  
ou d'optimisation

$C$  : ensemble des contraintes

$f$  : objectif ou fonction de coût

$\xi^*$  : minimum atteint



# Optimisation convexe

---

⇒ Problème d'optimisation convexe

$f$  fonction convexe et  $C$  ensemble convexe

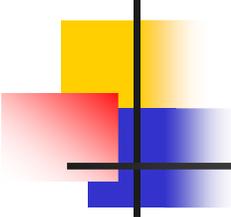
⇒ Problème d'optimisation convexe sous  
contrainte LMI

$$\min f(\xi)$$

$$\xi \in C$$

$$C = \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^m \mid \forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\} \ x^t F(\xi) x > 0 \right\}$$

$$F(\xi) = F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i$$



# Optimisation convexe

---

⇒ Application au problème de stabilité

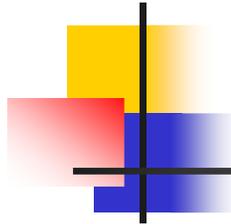
$$\min \lambda$$

$$\lambda \in \mathfrak{R}, \xi \in C$$

Sous la contrainte LMI :

$$\lambda I - F(\xi) > 0$$

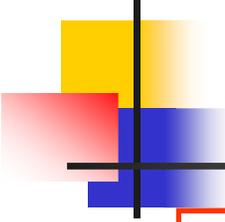
⇒ Résolution par l'algorithme des points intérieurs... + LMI Toolbox Matlab



# Plan du cours

---

Modèles flous de type Takagi  
Sugeno (TS)



# Modèles flous

➔ Modèle flou de type TS

Cas continu

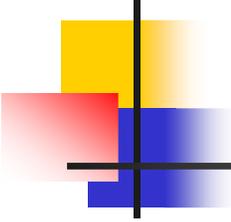
$R_i$  : Si  $x_1(t)$  est  $M_{i1}$  et  $x_2(t)$  est  $M_{i2}$  et ...  $x_n(t)$  est  $M_{in}$

Alors  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$

La dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) \{ A_i x(t) + B_i u(t) \}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \frac{\prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)} \{ A_i x(t) + B_i u(t) \}$$



# Modèles flous

---

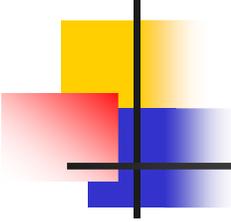
⇒ Remarques

⇒ Théorème d'approximation universelle

⇒ Propriété de convexité satisfaite

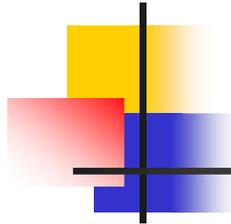
$$h_i(x) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(x) = 1$$

# Modèles flous : comment les obtenir



---

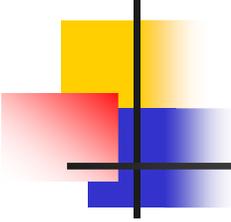
- ➔ Directement à partir du modèle non linéaire du système : décomposition des non-linéarités , non linéarité sectorielle ...
- ➔ Identification des modèles linéaires à partir d'un ensemble d'entrées/sorties



# Plan du cours

---

Approche PDC : Parallel  
Distributed Compensation



# Approche PDC

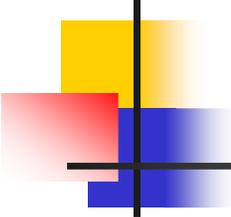
---

⇒ Même philosophie que l'approche multi-modèles

⇒ Approche PDC : retour d'état

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) \{-F_i x(t)\}$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \frac{\prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)} (-F_i x(t))$$



# Approche PDC

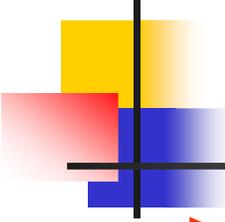
---

⇒ Equation dynamique de la boucle fermée

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x)h_j(x) \{A_i - B_i F_j\} x(t)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x)h_j(x) G_{ij} x(t)$$

⇒ **!!!!!!!Problème de stabilité!!!!!!!**  
=> Utilisation de la théorie de Lyapunov



# Approche PDC

---

⇒ Choix d'une fonction de Lyapunov quadratique

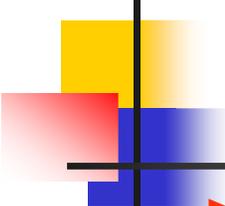
$$V(x) = x^t P x$$

⇒ Conditions suffisantes :  
Stabilité asymptotique

$$? \exists P = P^t > 0$$

$$G_{ij}^t P + P G_{ij} < 0 \quad i, j = 1 \dots r$$

⇒ Système de LMIs....



# Approche PDC

---

⇒ Problème de conservatisme...

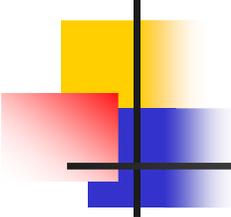
⇒ Théorème [*Wang et al. 1996*]

$$? \exists P = P^t > 0$$

$$G_{ii}^t P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i = 1 \dots r$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^t P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0 \quad \forall i < j = 1 \dots r$$

⇒ + Théorèmes [*Tanaka et al. 1996, 2003*],  
[*Kim and Lee 2000*]



# Approche PDC

---

⇒ Problème d'obtention de la matrice  $P$

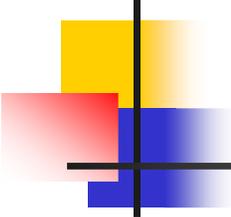
⇒ + Problème d'obtention des matrices  $F_i$

$$? \exists P = P^t > 0$$

$$G_{ii}^t P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i = 1 \dots r$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^t P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0 \quad \forall i < j = 1 \dots r$$

$F(\xi)$  n'est pas affine en la variable  $\xi$



# Approche PDC

---

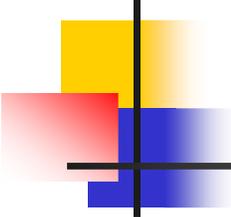
⇒ Objectif : trouver un systèmes de LMI  
Comment? Différents lemmes...

⇒ Changement de variables

⇒ Transformation congruente

$$M > 0 \Leftrightarrow T^t M T > 0$$

Quelle que soit la matrice  $T$  non singulière



# Approche PDC

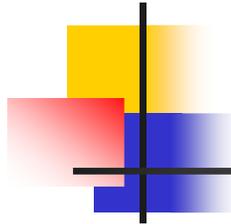
---

⇒ Complément de Schur

$$M_{22} < 0, M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^t < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^t & M_{22} \end{bmatrix} < 0$$

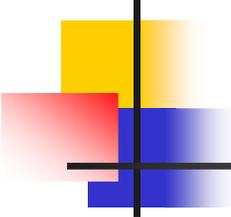
⇒ Lemme de la  $S$ -procédure  
+ lemme de projection ou d'élimination  
+ lemme de Finsler...



# Plan du cours

---

Commande floue et poursuite  
de trajectoire

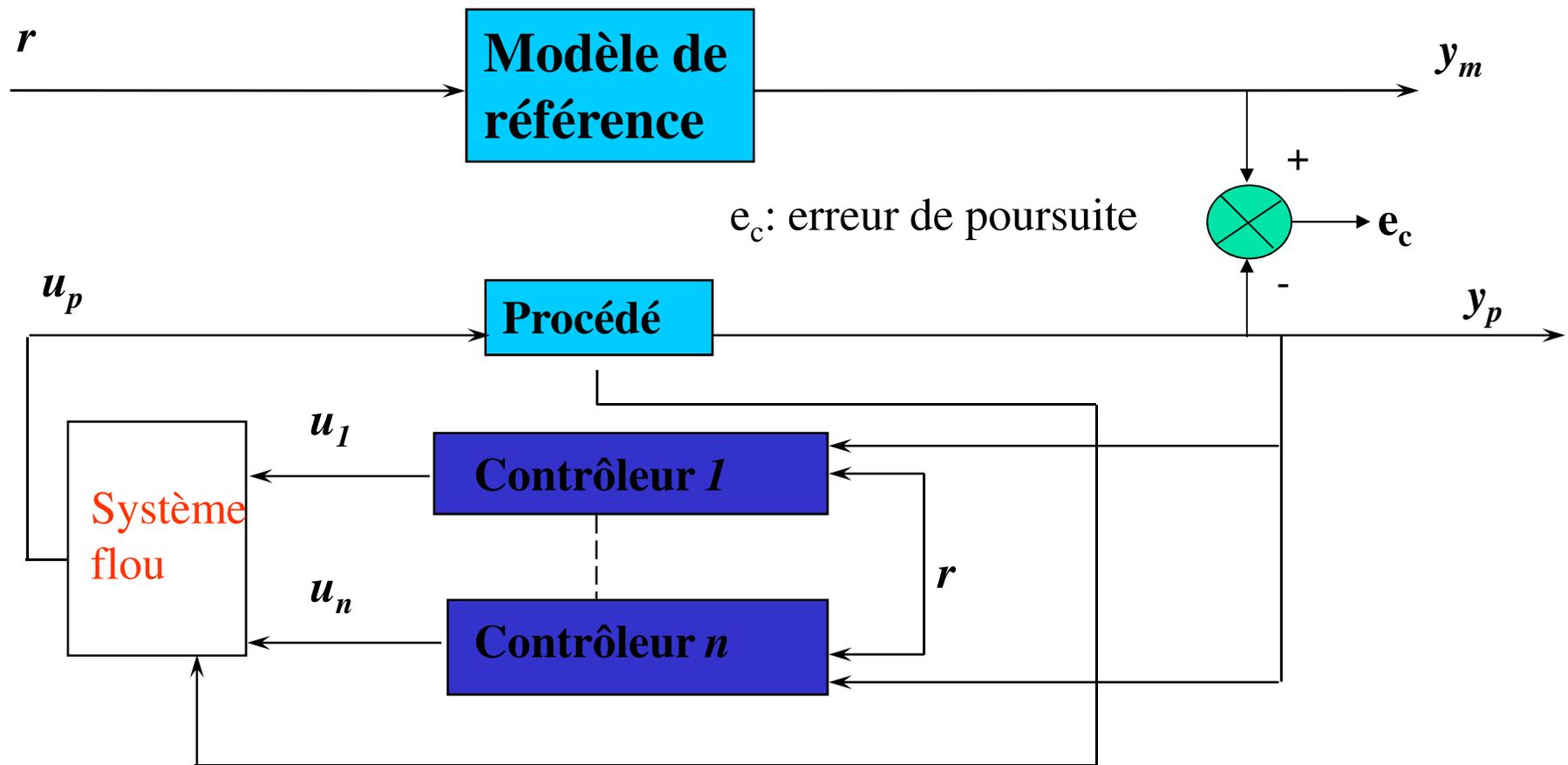


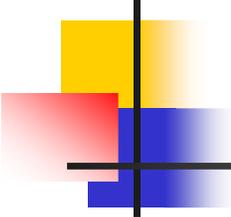
# Poursuite de trajectoire

---

- ⇒ Faire de la poursuite de trajectoire  
En garantissant certaines performances
- ⇒ Modèles flous de type TS  
Hypothèse : vecteur d'état non mesurable  
Autre solution :  
observateur flou => combinaison convexe  
d'observateurs de type Luenberger +  
principe de séparation (pas toujours  
applicable)

# Poursuite de trajectoire





# Poursuite de trajectoire

---

⇒ Position du problème

\* Système :

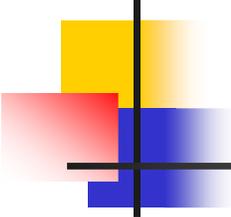
$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(x) \{A_i x + B_i u\}; \quad y_p = \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(x) C_i x$$

\* Modèle de référence :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r; \quad y_m = C_m x_m$$

\* Erreur de poursuite :

$$e_c = y_p - y_m$$



# Poursuite de trajectoire

---

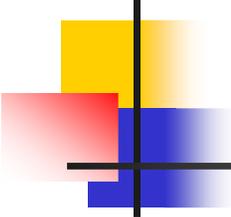
\* Choix du contrôleur dynamique :

$$\dot{\zeta} = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(x) \{ A_{K_j} \zeta + B_{K_j} y_p \};$$

$$u_p = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(x) (C_{K_j} \zeta + D_{K_j} y_p + E_{K_j} r)$$

\* Objectifs à atteindre :

- Stabilité globale asymptotique de la BF
- Dynamique contrôleur stable
- $e_c$  aussi « petite » que possible



# Poursuite de trajectoire

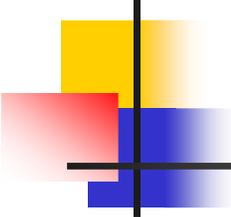
---

⇒  $e_c$  aussi « petite » que possible???

Traduction mathématique...

Objectif : Minimiser l'énergie du signal de sortie par rapport à l'énergie du signal d'entrée...

$$\Leftrightarrow \forall T \in \mathfrak{R}^+ > 0, \frac{\int_0^T e_c^t(t) e_c(t) dt}{\int_0^T r(t) r(t) dt} \leq \gamma^2$$

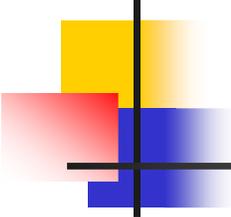


# Poursuite de trajectoire

---

⇒ Performance de poursuite  $H_\infty$

$$\forall T > 0, \frac{\int_0^T e_c^t(t) e_c(t) dt}{\int_0^T r(t) r(t) dt} \leq \gamma^2 \Leftrightarrow \frac{\|e_c\|_2^2}{\|r\|_2^2} \leq \gamma^2$$
$$\Leftrightarrow \|T_{re_c}\|_\infty \leq \gamma$$



# Poursuite de trajectoire

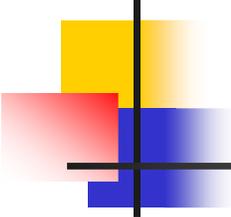
---

⇒ Lemme réel borné

Performance de poursuite satisfaite pour  $\gamma > 0$

$$\Leftrightarrow \exists X = X^t > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^t & B_{cl} & XC_{cl}^t \\ B_{cl}^t & -\gamma I & 0 \\ C_{cl}X & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$



# Poursuite de trajectoire

---

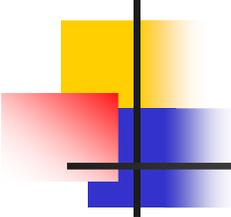
⇒ Problème d'optimisation convexe  
Sous contrainte LMI

$$\min c^t \xi$$

$$\xi \in \mathcal{K}^m$$

contraint par  $F(\xi) > 0$

$$\text{Avec } c = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^t$$



# Poursuite de trajectoire

---

⇒ Remarque ...

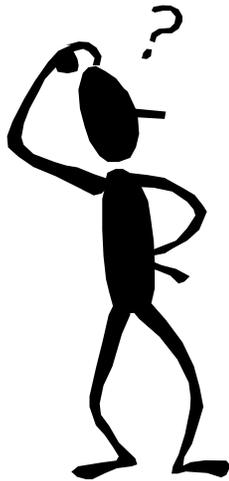
Problèmes classiques en automatique présentés  
Sous forme de LMI :

$H_2$ , passivité, contraintes de placements de pôles  
Contraintes sur la sortie.....

*[Chilali and Gahinet 1996, Scherer et al. 1997]*

# Poursuite de trajectoire

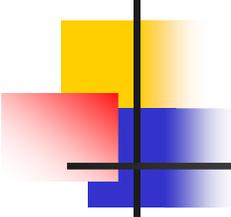
➔ Résoudre le système de LMI



$$? \exists X = X^t > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^t & B_{cl} & XC_{cl}^t \\ B_{cl}^t & -\gamma I & 0 \\ C_{cl}X & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Les contraintes ne sont pas des LMIs!!!



# Poursuite de trajectoire

---

⇒ Utiliser les différents lemmes pour  
Arriver à un système de LMIs

- $X = \begin{bmatrix} R & M \\ M^t & U \end{bmatrix}; X^{-1} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^t & V \end{bmatrix}$
- Transformation congruente
- Changement de variables

# Poursuite de trajectoire

⇒ Obtention du système de LMIs

$$? \exists C_{K_{i,j}}, A_{K_{i,j,k}}, D_{K_j}, B_{K_{i,j}}, R = R^t > 0$$

$$S = S^t > 0, \gamma > 0, \tau_{i,j,k} > 0, \forall i, j, k = 1 \dots n_m$$

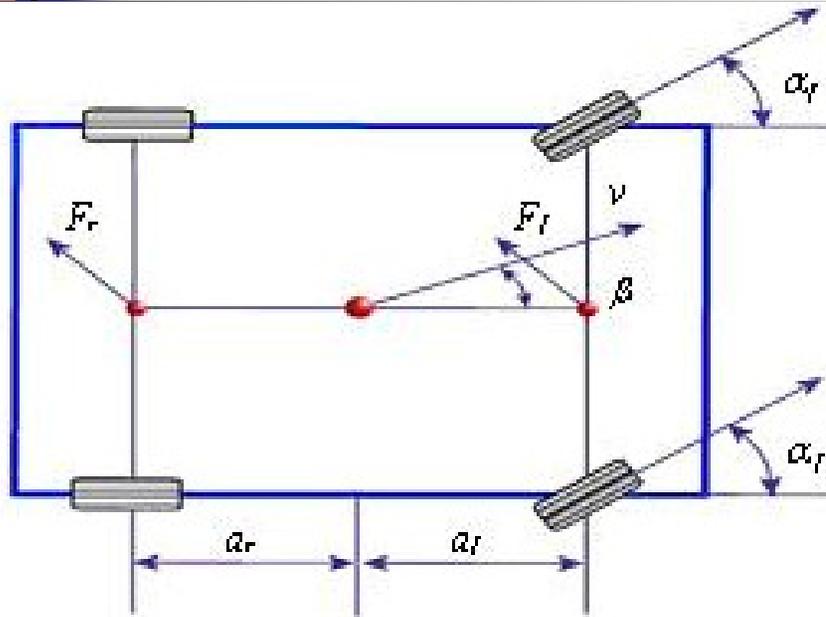
$$\begin{bmatrix} \text{sym}(A_i R + B_k C_{K_{i,j}}) & A_i + B_i D_{K_j} C_k + A_{K_{i,j,k}}^t & B_i E_{K_j} + B_r & R D_{z_i}^t \\ * & \text{sym}(S A_i + B_{K_{i,j}} C_k) & S B_r & D_{z_i}^t \\ * & * & (-\gamma - \tau_{i,j,k}) I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0$$



**Objectifs atteints!**

# Exemple : dynamique latérale



$\beta$  Angle de dérive

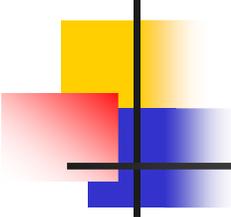
$r$  Vitesse du lacet

$$\begin{cases} \dot{\beta} = 2 \frac{F_f + F_r}{mv} - r \\ \dot{r} = 2 \frac{a_f F_f - a_r F_r}{I_z} \cos(\beta) + \frac{1}{I_z} u \end{cases}$$

$$F_f = -D_f(\mu) \sin \left[ C_f(\mu) \tan^{-1} \left\{ B_f(\mu) (1 - E_f(\mu)) \alpha_f + E_f(\mu) \tan^{-1} (B_f(\mu) \alpha_f) \right\} \right]$$

$$F_r = -D_r(\mu) \sin \left[ C_r(\mu) \tan^{-1} \left\{ B_r(\mu) (1 - E_r(\mu)) \alpha_r + E_r(\mu) \tan^{-1} (B_r(\mu) \alpha_r) \right\} \right]$$

$$\alpha_f = -\beta - \tan^{-1} \left[ \frac{a_f}{v} r \cos(\beta) \right] + \delta_f, \quad \alpha_r = -\beta + \tan^{-1} \left[ \frac{a_r}{v} r \cos(\beta) \right] + \delta_r$$



# Exemple : dynamique latérale



Modèle flou : entrée vitesse longitudinale  $v$

$$\text{If } v \text{ is } V\_Small \text{ then } \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = A_1 x + B_{1_f} \delta + B_{2_1} u; y = Cx$$

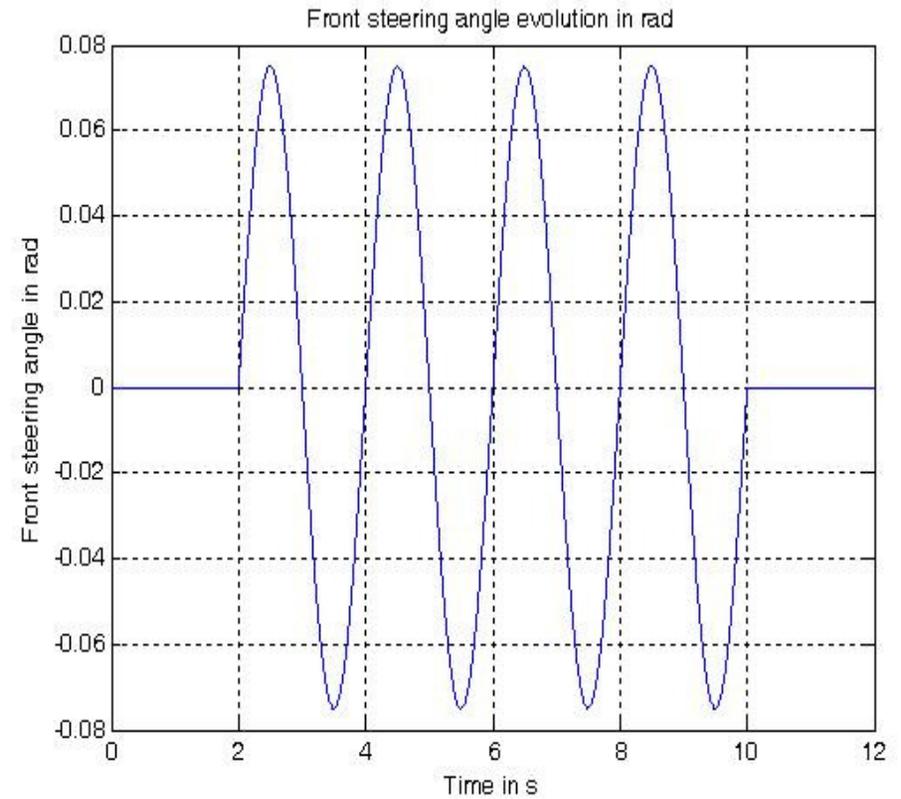
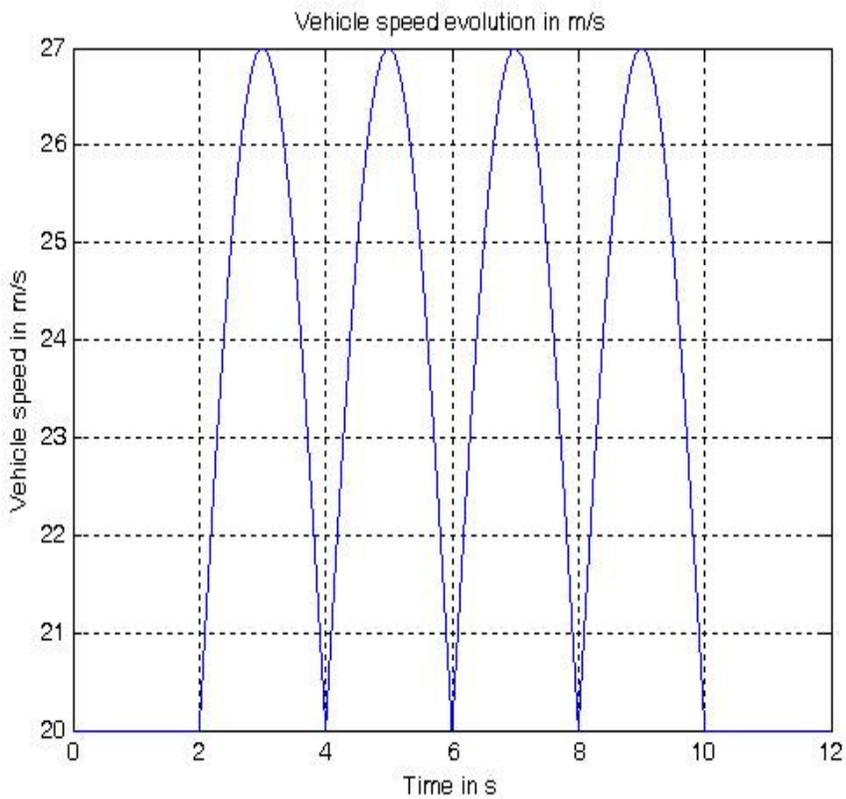
$$\text{If } v \text{ is } V\_Big \text{ then } \dot{x} = A_2 x + B_{2_f} \delta + B_{2_2} u; y = Cx$$



Fonctions d'appartenance

$$\begin{cases} \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_{\min}^2} \mu_{V\_Small}(v) + \frac{1}{v_{\max}^2} \mu_{V\_Big}(v) \\ \mu_{V\_Small}(v) + \mu_{V\_Big}(v) = 1 \end{cases} \quad v \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

# Résultats de simulation



# Résultats de simulation

