نتطرق من خلال هذ الفصل إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: مفاهيم أساسية حول الإحصاء والعينات

ثانيا: ملخص لأهم التوزيعات المستخدمة في مجال الإحصاء الاستدلالي

ثالثا: توزيعات المعاينة

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

يعتبر حصر جميع بيانات المجتمع الإحصائي أفضل طريقة لإجراء الدراسات الإحصائية حول ظاهرة ما، لأنها تعطي نتائج دقيقة وشاملة، ولكنها غالبا ما تكون مكلفة جدا، وفي بعض الأحيان مستحيلة، لذلك نلجأ إلى اختيار وفحص جزء من المجتمع المراد دراسته، يسمى بالعينة، والهدف من ذلك هو الاستدلال على العديد من الخصائص حول المجتمع محل الدراسة انطلاقا من نتائج العينة المختارة. حيث تسمى هذه العملية بالاستدلال الاحصائي، كما أن عملية اختيار مفردات العينة تسمى بالمعاينة، ولمعرفة كيفية الاستدلال حول خصائص المجتمع انطلاقا من بيانات العينة المختارة منه، يجب فهم العلاقات الرياضية بين الخصائص المختلفة للمجتمع مثل المتوسط الحسابي، التباين، النسبة وغيرها، والخصائص المناظرة لها في العينة، وهو ما يمثل محور دراسة هذا الفصل.

أولا: مفاهيم أساسية حول الاحصاء والعينات

1. مفاهيم أساسية حول الإحصاء:

1-1- تعريف الإحصاء: هو العلم الذي يبحث في طرق جمع البيانات الخاصة بمختلف الظواهر وعرضها وتحليلها للوصول إلى نتائج تساعد في اتخاذ القرارات المناسبة. فالإحصاء بهذا التعريف هو أسلوب منطقي منتظم موحد يعالج الموضوعات والخصائص التي يمكن أن يعبر عنها بصورة رقمية.

1-2- أنواع الإحصاء: ينقسم علم الإحصاء إلى قسمين، هما:

أ- الإحصاء الوصفي: هو ذلك الجزء من الإحصاء الذي يهتم بتلخيص البيانات الإحصائية إلى عدد محدود من الأرقام تسمى مقاييس إحصائية أو إلى جدول إحصائي يسهل القراءة أو إلى رسوم بيانية، والغرض من كل ذلك هو إعطاء وصفا أوليا للظاهرة المدروسة بدون تحليل معمق.

ب- الإحصاء الاستدلالي: يستند على فكرة إجراء الدراسة الإحصائية (جمع البيانات) على جزء من المجتمع يسمى العينة، يتم اختيارها بطريقة علمية مناسبة، بغرض استخدام بيانات هذه العينة في التوصل إلى نتائج يمكن تعميمها على مجتمع الدراسة، فنقول لقد استدللنا على خواص المجتمع على أساس خواص العينة، وهذا عكس الاستنباط الذي يعني استخراج خواص الجزء انطلاقا من خواص الكل.

1-3- طرق جمع البيانات الإحصائية:

يتم جمع البيانات الإحصائية بطرق مختلفة، من أهمها نذكر ما يلي:

أ- طريقة الحصر الشامل: وتعني جمع البيانات حول كل أفراد المجتمع الإحصائي بدون نسيان ولا تكرار، هذا النوع من الدراسات يعطي نتائج دقيقة وشاملة، ولكنها مكلفة جدا، وفي بعض الأحيان مستحيلة.

ب- طريقة العينات: حيث يتم دراسة جزء من المجتمع الإحصائي فقط، وذلك بأخذ عينة عشوائية من المجتمع ودراسة خواصها واستخلاص المعلومات اللازمة منها، ثم تعميم نتائجها على المجتمع الذي سحبت منه.

2. مفاهيم أساسية حول العينات:

2-1- تعريف العينة: هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم استخراجها بطرق إحصائية معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويتم الاعتماد عليها في الدراسة بدل المجتمع للأسباب التالية:

أ- كبر حجم المجتمع؛

ب- ربحا للوقت والجهد والتكاليف؛

ج- الفحص الشامل قد يكون مؤذيا أو متلفا للوحدات، فمثلا لو أردنا فحص دم مريض معين، فإنه لا يمكننا أخذ كل دمه، لأن ذلك سيؤدي إلى موته، وبالتالي يصبح الفحص الشامل مؤذي في هذه الحالة. كذلك لو أردنا فحص جميع المصابيح التي تنتجها شركة معينة، فإنه لا يمكننا أخذ كل المصابيح، لأن ذلك سيؤدي إلى تلفها، وبالتالي نكتفي بأخذ عينة من الإنتاج اليومي للشركة؛

د- قد تكون الدراسة الشاملة مستحيلة، فمثلا لو أردنا إجراء دراسة إحصائية معينة على جميع أسماك البحر الأبيض المتوسط فمن المستحيل إجراؤها، وذلك نظرا لاستحالة حصرها، وبالتالي نكتفي بأخذ عينة فقط.

2-2- أنواع العينات:

يمكن تصنيف العينات إلى صنفين، عينات غير احتمالية وأخرى احتمالية، كما يلي:

2-2-1- العينات غير الاحتمالية:

تعرف العينات غير الاحتمالية على أنها تلك العينات التي يتدخل فيها ميل الباحث وتحيزه في اختيار الوحدات الإحصائية التي تجرى عليها الدراسة، مما يؤدي إلى صعوبة تعميم نتائجها على المجتمع المسحوبة منه. من أهمها:

أ- العينة الميسرة: وهي العينة التي يتم اختيار وحداتها جزافيا أو بالمصادفة، حيث أنها قائمة على أساس سهولة الوصول والاتصال بالوحدات الإحصائية محل الدراسة، وكمثال على ذلك، إذا أراد الباحث أن يتعرف على رأي المسافرين في جودة الخدمات التي تقدمها إحدى المطارات، فإنه يتجه إلى البوابة الرئيسية لخروج المسافرين من المطار، ويقوم بسؤال أول 50 مسافرا يواجههم حول مدى جودة الخدمات المقدمة من قبل إدارة المطار.

ب- العينة الهادفة: تستخدم العينة الهادفة للحصول على معلومات من شريحة محددة قادرة على توفير المعلومات، إما بسبب موقعهم أو لأن بعض المعايير التي وضعها الباحث تتوفر فيهم، لأنهم أفضل الأشخاص القادرين على توفير المعلومات، حيث يتم اختيار وحدات العينة بناء على الخبرات في الموضوع الذي يدرس، وتستخدم العينة الهادفة عندما تكون المعلومات المطلوبة متوفرة لدى فئة معينة من الأفراد، فهي التي تملك المعرفة في الموضوع المبحوث وتستطيع تقديم المعلومات، وتستخدم العينة الهادفة في الغالب عندما نتعامل مع عينات صغيرة، أو عندما نتعامل مع حالات نريد منها معلومات خاصة.

وكمثال على ذلك، إذا أراد الباحث أن يتعرف على أهم العوامل التي تساعد لاعبي كرة القدم في الوصول إلى قمة الاحترافية، فإن العينة الهادفة المناسبة هنا هي مجموعة اللاعبين الذين بلغوا قمة الاحترافية، حيث أن لديهم معرفة متخصصة في ذلك الموضوع نتيجة للخبرة.

ج- العينة الحصصية: تعتمد العينة الحصصية على تقسيم المجتمع إلى مجموعات، ثم حساب حصة كل مجموعة في العينة التي ستسحب، وذلك بناء على علاقتها بالبيانات المتوفرة وحجم المجتمع، ثم الحصول على تلك الحصص بأيسر الطرق، كما أنها تستخدم في حالة وجود صفات يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار كالجنس والوظيفة والتوزيع الجغرافي، إذ يجب أن يظهر التنوع الموجود في المجتمع داخل العينة المسحوبة. وكمثال على ذلك إذا أردنا معرفة رأي طلبة كلية معينة حول جودة التدريس داخل الكلية، وكانت نسبة الطلبة الذكور بالكلية 40%، والطالبات 60%، وكان حجم العينة هو 20 طالبا،

فإننا سنوجه السؤال إلى أول 8 طلبة ذكور وأول 12 طالبة، تتم مقابلتهم في ظروف مريحة وبصورة كيفية دون الاعتماد على الأسلوب العشوائي، ليصبح حجم العينة: 8 + 12 = 20 طالبا.

2-2-1- العينات الاحتمالية:

تعرف العينات الاحتمالية على أنها تلك العينات التي لا يتدخل فيها ميل الباحث وتحيزه في اختيار الوحدات الإحصائية التي تجرى عليها الدراسة، أي أن اختيارها يتم عشوائيا، مما يتيح امكانية تعميم نتائجها على المجتمع المسحوبة منه. من أهمها:

أ- العينة العشوائية البسيطة: هي العينة التي تعطي فيها لجميع مفردات المجتمع المراد بحثه نفس الفرصة في الاختيار، وهذا يعني عدم الاهتمام ببعض المفردات أكثر من البعض الآخر وإتاحة الفرص المتكافئة أمام كل مفردة للظهور في العينة، ويمكن أن نحقق ذلك بأن نحضر عددا من البطاقات المتشابهة (في اللون والوزن والحجم وكل شيء) ويكتب على كل بطاقة رقما يمثل مفردة من مفردات المجتمـــع ونسحب العــدد المطلوب من هذه البطاقات (بعد خلطها جيدا) فنجد أن الأرقام المسجلة عليها تعطي لنا المفردات التي تم اختيارها بطريقة عشوائية، كما يمكن استخدام جدول الأرقام العشوائية لاختيار العينة، فمثلا لسحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 15 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 300، بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية (أنظر الملحق رقم 1) نتبع الخطوات التالية:

- نحدد مفردات العينة؛
- نعطي لكل مفردة عددا من الأعداد التالية: 001، 002، 003، ....، 300.
- من جدول الأرقام العشوائية نختار سطر أو عمود معين، ونأخذ منه جميع الأعداد المحصورة ضمن المجال المحدد (من 001 إلى غاية 300)، وفي حالة نفاذ أعداد السطر أو العمود دون الانتهاء من حجم العينة فإننا ننتقل للسطر أو العمود الموالي، وهكذا حتى يتم حصر العدد المطلوب من حجم العينة، نختار مثلا السطر الثاني، فنجد العينة المطلوبة هي التي تحمل مفرداتها الأعداد التالية:

212، 159، 179، 176، 54، 84، 43، 246، 241، 18، 60، 297، 262، 285، 250.

ب- العينة الطبقية: إذا كان المجتمع يتكون من مجموعات من المفردات تتصف بالتجانس داخل كل مجموعة وبالتباين بين المجموعات المختلفة، ويراد أخذ عينة تكون ممثلة بقدر الإمكان لهذا المجتمع فلابد أن تكون هذه المجموعات ممثلة في العينة، وذلك بتقسيم المجتمع إلى أقسام تعرف بالطبقات، ثم تؤخذ عينة عشوائية من كل طبقة، وبذلك نضمن تمثيل العينة لكل طبقات المجتمع. فمثلا، إذا كان مجتمع يتكون من ثلاث فئات اجتماعية، حجمه $N = 80000$، وحجم كل فئة من فئات المجتمع هو: $N_3 = 24000$, $N_2 = 36000$, $N_1 = 20000$. ونريد سحب عينة حجمها $n = 200$، فإن عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة هو:

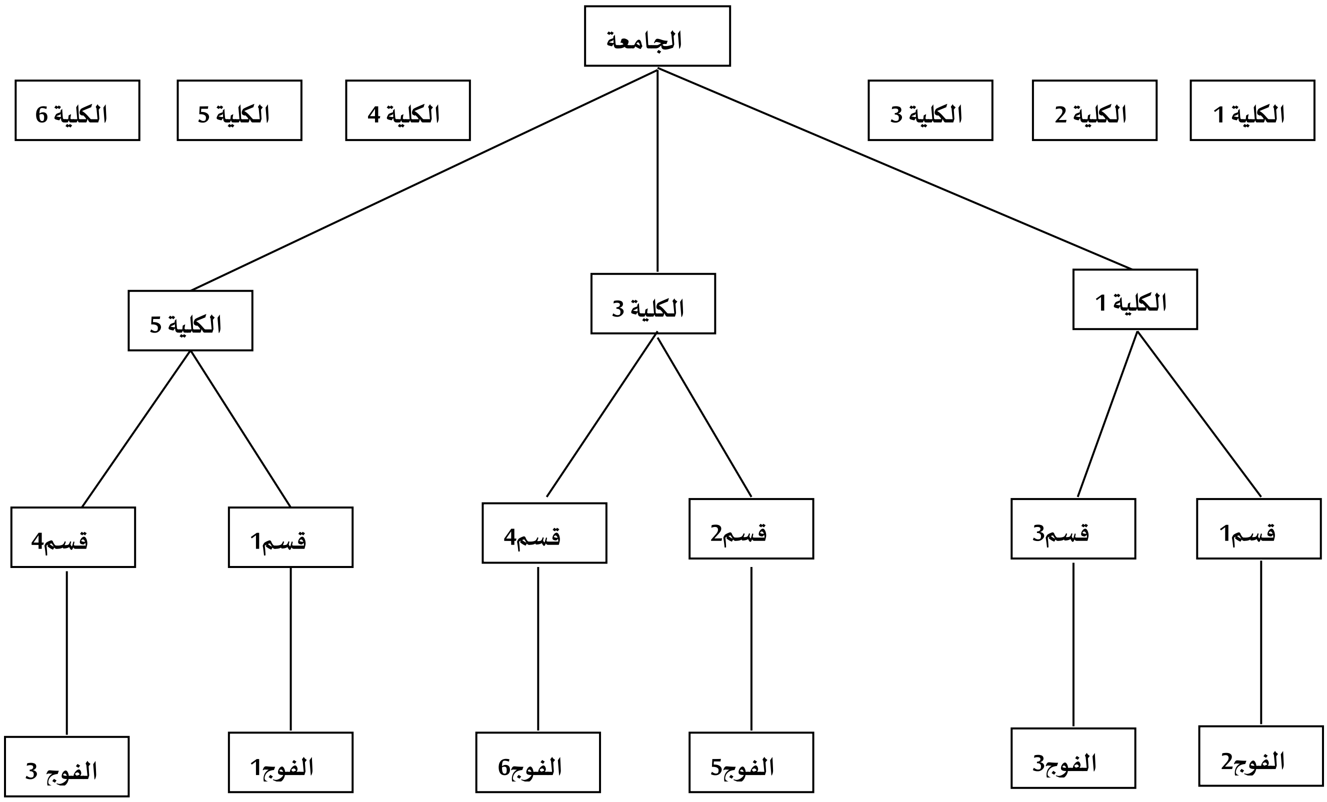
بتطبيق القاعدة الثلاثية:

$$\boldsymbol{N \rightarrow n}$$
$$\boldsymbol{N_i \rightarrow n_i \quad \Rightarrow \quad n_i = \frac{N_i}{N} \times n}$$

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \times n = \frac{20000}{80000} \times 200 = 50$$
$$n_2 = \frac{N_2}{N} \times n = \frac{36000}{80000} \times 200 = 90$$
$$n_3 = \frac{N_3}{N} \times n = \frac{24000}{80000} \times 200 = 60$$

ج- **العينة متعددة المراحل (العنقودية):** إذا كان المجتمع يتكون من مجموعات متجانسة نبدأ باختيار بعض هذه المجموعات عشوائيا (كمرحلة أولى)، ثم نختار عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة من المجموعات التي تم اختيارها (كمرحلة ثانية)، وقد يحتاج الأمر إلى اختيار مجموعات من بين المجموعات التي تم اختيارها في المرحلة الثانية وهكذا....، والعينة التي تم اختيارها بهذه الطريقة تعرف بالعينة متعددة المراحل أو العنقودية، حيث أن كل مجموعة من المجموعات التي تم اختيارها تسمى عنقودا، فمثلا، إذا أردنا إجراء دراسة إحصائية حول مدى تحكم طلبة جامعة ما في اللغة الانجليزية، فإننا نقوم بتقسيم الجامعة إلى كليات، ومن ثم نختار عشوائيا ثلاث كليات كمرحلة أولى، ثم نختار عشوائيا من كل كلية قسمين كمرحلة ثانية، ثم نختار عشوائيا فوج من كل قسم كمرحلة ثالثة، لنحصل في الأخير على عينة تسمى بالعينة متعددة المراحل – ذات ثلاث مراحل - أو العنقودية. نوضح ذلك من خلال الشكل التالي:

الشكل(1-1): العينة متعددة المراحل أو العنقودية



المصدر: إعداد الباحث

د- **العينة المنتظمة**: يتم اختيارها من خلال تحديد مجتمع الدراسة ووضع أفراده في قائمة بشكل عشوائي، وإعطاء كل منهم رقما، ثم يتم تحديد قاعدة الاختيار وفق قسمة حجم المجتمع على حجم العينة من أجل الحصول على طول الفترة، وبعد ذلك يتم انتقاء أحد الأرقام عشوائيا من بين الأرقام التي تساوي أو تقل عن طول الفترة، ليتم اعتباره كعنصر أول من مفردات العينة ويشرع في إضافة طول الفترة له للحصول على المفردة الثانية، وهكذا نستمر في إضافة العدد الثابت إلى غاية

الوصول إلى العدد الممثل لحجم العينة المطلوب، فمثلا، لسحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 15 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 300، نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب المفردات عشوائيا من 1 إلى 300

- حساب طول الفترة كما يلي: $\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{N}{n} = \frac{300}{15} = 20$

- اختيار الرقم الأول عشوائيا على أن يكون أقل من أو يساوي طول الفترة أي 20، ثم نضيف طول الفترة في كل مرة لنحصل على العينة المطلوبة، ولنختار مثلا الرقم 8 من المفردات المرتبة عشوائيا فتكون العينة المطلوبة هي:

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128، 148، 168، 188، 208، 228، 248، 268، 288.

ثانيا: ملخص لأهم التوزيعات المستخدمة في مجال الإحصاء الاستدلالي

1. التوزيع الطبيعي: $X \to N(\mu , \sigma)$

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة ذات الاستخدام الواسع، وذلك نظرا للخصائص التي يتميز بها، والتي تنطبق على أغلبية الظواهر العشوائية. ففي الكثير من الحالات التطبيقية، طبيعية كانت أو اجتماعية أو اقتصادية، تكون أغلبية قيم المتغير العشوائي المدروس متمركزة حول قيمة المتوسط الحسابي والقليل منها يتطرف إما بالزيادة أو بالنقصان، فمثلا لو أخترنا عشوائيا ألف مصباح من المصابيح التي تنتجها إحدى الشركات، وقمنا بدراسة متغير عشوائي معين، مثل مدة حياتها، سنجد أن أغلبية المصابيح سوف تكون مدة حياتها تتمحور حول قيمة متوسط مدة حياة المصابيح، وكلما ابتعدنا عن المتوسط سواء إلى أعلى أو أسفل سيقل عدد تلك المصابيح، ولو قمنا بتمثيل هذا المتغير العشوائي، سنجده يأخذ شكل جرسي أو ناقوسي متناظر حول المتوسط الحسابي، وهذا ما ينطبق على خصائص التوزيع الطبيعي، وهكذا بالنسبة للأوزان أو الأطوال أو أي متغير مستمر آخر.

1-1- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث أن: $x \in]-\infty , +\infty[$ ، $e = 2,7183$: العدد النيبري. $\pi = 3,14$: العدد الثلاثي.

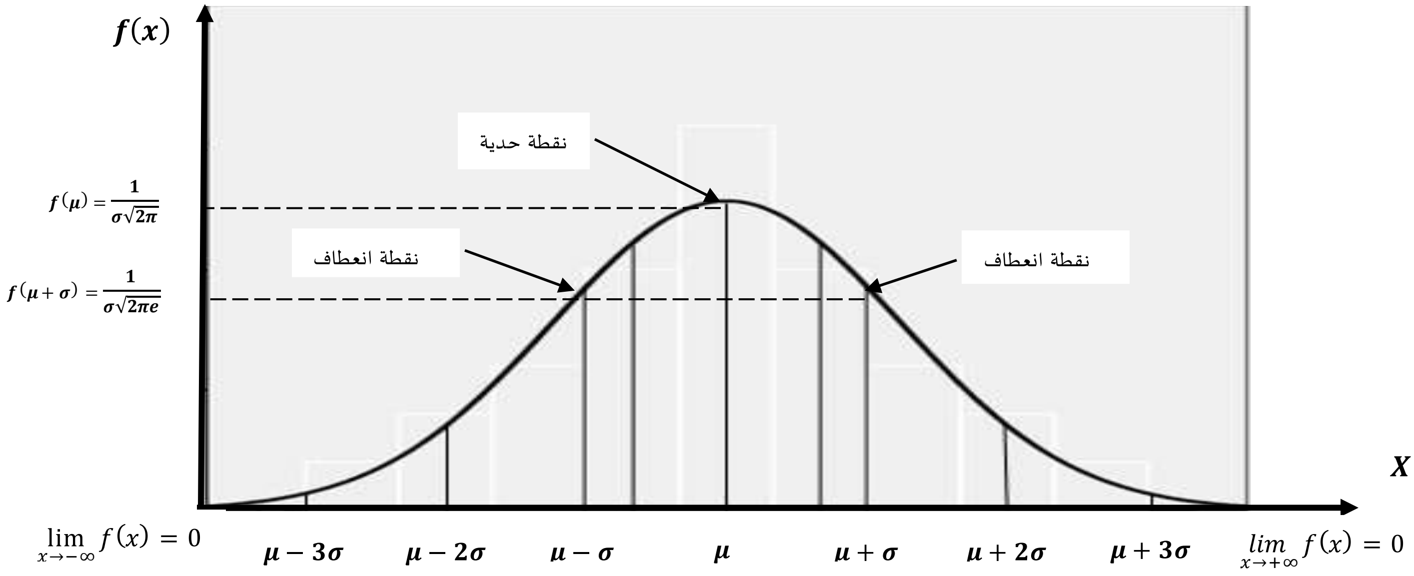
$\mu \in \mathbb{R}$: المتوسط الحسابي للمجتمع، وهو عدد حقيقي. $\sigma > 0$: الانحراف المعياري للمجتمع، يكون دوما موجبا.

1-2- خصائص التوزيع الطبيعي:

يتميز التوزيع الطبيعي بالخصائص التالية:

أ- يأخذ التوزيع الطبيعي الشكل الجرسي أو الناقوسي، كما هو موضح من خلال الشكل(1-2).

الشكل(1-2): منحنى التوزيع الطبيعي



المصدر: إعداد الباحث

من خلال منحنى التوزيع الطبيعي، يتضح مايلي:

- لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر؛

- لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$، وترتيبتهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر.

- طرفا منحنى التوزيع الطبيعي غير منطبقين على محور الفواصل، أي أنهما ممتدان إلى ما لا نهاية في الجهتين.

ب- الدالة الممثلة للتوزيع الطبيعي هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال الشكل(1-2) بوقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x)\geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$.

ج- منحنى التوزيع الطبيعي معتدل، لأنه يحقق أمرين مهمين، هما:

- التناظر: حيث يمثل المستقيم العمودي الذي يمر بالفاصلة $x=\mu$ محور التناظر للمنحنى الممثل لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي، وبالتالي فهو يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قسمين متساويين، أي:

$P(X\leq\mu)=P(X\geq\mu)=\frac{1}{2}$، وفي هذه الحالة فإن المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية، المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال تكون متساوية، أي: $\mu=M_e=M_o$.

- غير متطاول ولا مفرطح: يمكن إثبات ذلك من خلال حساب مقياس فيشر للتفرطح، حيث أن قيمته تساوي الصفر، وهو ما يعني أن له قمة معتدلة، لا هي مدببة ولا هي منبسطة.

3-1- معالم المتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي يساوي μ. أي: $\boldsymbol{E(X)=\mu}$

يمكن إثبات ذلك رياضيا، كما يلي:

باعتبار التوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة، فإن التوقع الرياضي يحسب بواسطة التكامل التالي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

بوضع: $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$، نجد أن: $x=z\sigma+\mu$، بمفاضلة المقدار x، نجد: $dx=d(z\sigma+\mu)=\sigma dz$

وبالتالي:

$$E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma+\mu)e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma+\mu)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma+\mu)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(z\sigma e^{-\frac{1}{2}z^2}+\mu e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)dz$$

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z\sigma e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$E(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

نلاحظ أن التكاملين: $\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz=0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\sqrt{2\pi}$ من التكاملات الشهيرة.

وبالتالي:
$$E(X)=0+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$$
$$E(X)=\mu$$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي يساوي σ^2. أي: $\boldsymbol{V(X)=\sigma^2}$

يمكن إثبات ذلك رياضيا، كما يلي:

باعتبار التوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة، فإن التباين يحسب بواسطة التكامل التالي:

$$V(X)=E\big(X-E(X)\big)^2=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\big(E(X)\big)^2$$

نقوم بحساب $E(X^2)$ كما يلي:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

بوضع: $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$، نجد أن: $x=z\sigma+\mu$، بمفاضلة المقدار x، نجد: $dx=d(z\sigma+\mu)=\sigma dz$

وبالتالي:

$$E(X^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma+\mu)^2e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma+\mu)^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma+\mu)^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z^2\sigma^2+2\sigma z+\mu^2)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(z^2\sigma^2e^{-\frac{1}{2}z^2}+2\sigma z\mu e^{-\frac{1}{2}z^2}+\mu^2e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)dz$$

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\sigma^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2\sigma z\mu e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$E(X^2)=\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

بالتكامل بالتجزئة، نجد أن: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 1$

ومما سبق لدينا: $\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \sqrt{2\pi}$

وبالتالي: $E(X^2) = \sigma^2(1) + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}(0) + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\right)$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

بالرجوع إلى علاقة التباين، وبمعلومية أن: $E(X) = \mu$، نستنتج أن:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2$$
$$V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$
$$V(X) = \sigma^2$$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma}$

1-4- دالة التوزيع الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \le x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية، حيث نحصل على توزيع طبيعي آخر يدعى: التوزيع الطبيعي المعياري.

1-5- التوزيع الطبيعي المعياري: $\boldsymbol{Z \to N(0\,,1\,)}$

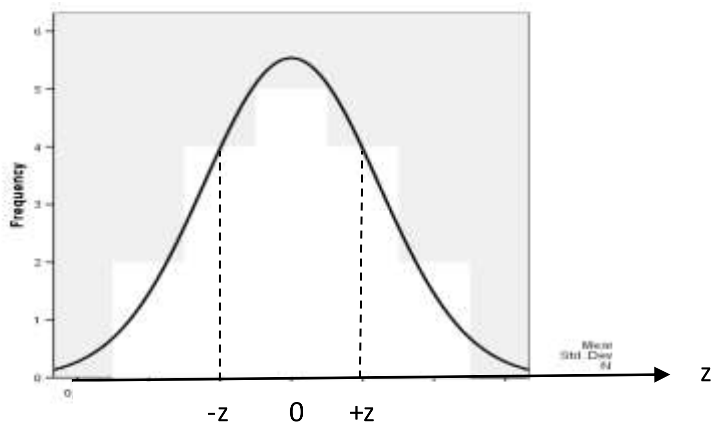
نقوم بوضع: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$، وبالتالي فإن خصائص المتغير العشوائي الجديد $\boldsymbol{Z}$ هي:

أ- مجال التعريف: $z \in \Omega_Z = \left]-\infty\,,+\infty\right[$

ب- دالة الكثافة الاحتمالية: معرفة بالصيغة التالية: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z)^2}$

ج- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي المعياري:

الشكل(1-3): منحنى التوزيع الطبيعي المعياري



المصدر: إعداد الباحث

حيث: $f(z) = f(-z)$

د- دالة التوزيع الاحتمالية $F(z)$:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$$

هـ- معالم المتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي المعياري:

- التوقع الرياضي: $\boldsymbol{E(Z) = 0}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} => E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\big(E(X) - E(\mu)\big) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

- التبـــــــاين: $\boldsymbol{V(Z) = 1}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} => V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\big(V(X) - V(\mu)\big) = \frac{1}{\sigma^2}\big(V(X)\big) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

- الانحراف المعياري: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1}$

ملاحظات هامة:

- يتمتع التوزيع الطبيعي المعياري بالخصائص نفسها التي يتمتع بها التوزيع الطبيعي العام، غير أن لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي 1 وترتيبتها تساوي $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي المعياري ومساواتها للصفر. كما أن له نقطتي انعطاف هما -1 و $+1$، وترتيبتهما تساوي $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر.

- لقد تم حساب الدالة الأصلية لـ $f(z)$ وتم التعويض فيها بكل القيم الممكنة داخل المجال: $]-\infty, +\infty[$، وأدرجت الإحتمالات في جداول خاصة تدعى: جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 2)، حيث يمكننا استنتاج الاحتمال مباشرة من الجدول بشرط أن يكون الاحتمال على شكل أصغر أو أصغر أو تساوي لكي يتوافق مع دالة التوزيع الاحتمالية.

مثال1: أجريت دراسة إحصائية حول الاستهلاك السنوي من اللحوم في الجزائر، وقد بينت الدراسة أن الاستهلاك المتوسط السنوي للفرد من اللحوم يقدر بـ 45 كلغ، وأن الانحراف المعياري يقدر بـ 18 كلغ، كما أن تحليل البيانات بين أن التوزيع طبيعي.

1- ما هي نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ؟

2- ما هي نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ؟

3- ما هي نسبة الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي ما بين 40 و60 كلغ؟

الحل: الاستهلاك السنوي من اللحوم في الجزائر X، متغير عشوائي يخضع للقانون الطبيعي، أي أن:

$\boldsymbol{X \to N(\mu, \sigma)}$ أي: $\boldsymbol{X \to N(45, 18)}$

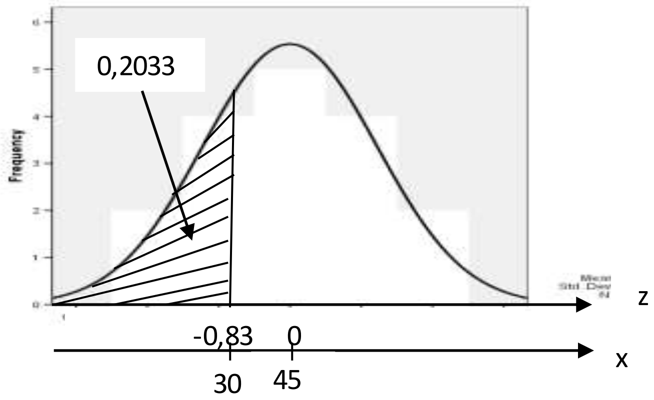
1- حساب نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ:

نقوم بحساب القيمة المعيارية z المقابلة للاستهلاك السنوي 30 كلغ، كما يلي: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{30-45}{18} = -0{,}83$

ثم نحسب الاحتمال التالي: $P(X < 30) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{30-45}{18}\right) = P(Z < -0{,}83) = 0{,}2033 = 20{,}33$

حيث أن القيمة $0{,}2033$ تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 2)، بالاعتماد على قيمة Z المقابلة للقيمة 0,83- أو بإجراء التناظر إذا كانت قيم Z السالبة غير موجودة، كما يلي:

$$P(Z < -0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033 = 20{,}33\%$$



2- حساب نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ:

$$P(Z>55)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{55-45}{18}\right)=P\big(Z>0{,}55\big)=1-P\big(Z<0{,}55\big)$$
$$P(Z>55)=1-0{,}7088=0{,}2912=29{,}12\%$$

3- حساب نسبة الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي ما بين 40 و60 كلغ:

$$P\,(40<X<60)=P\left(\frac{40-45}{18}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{60-45}{18}\right)=P(-0{,}28<Z<0{,}83)=F(0{,}83)-F(-0{,}28)$$
$$=P(Z<0{,}83)-P(Z<-0{,}28)=P(Z<0{,}83)-[1-P(Z<0{,}28)]$$
$$=P(Z<0{,}83)+P(Z<0{,}28)-1=0{,}7967+0{,}6103-1=0{,}407=40{,}7\%$$

2. توزيع كاي مربع:

إذا كان لدينا $X_1,\ X_2,\ X_3,\dots,X_v$، متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$X_1\to N(0\,,1)\ ,\ X_2\to N(0\,,1)\ ,\ X_3\to N(0\,,1)\ ,\dots\dots,\ X_v\to N(0\,,1)$$

وكان لدينا المتغير العشوائي X المعرف بالصيغة التالية: $X=X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_v^2$، فإن المتغير العشوائي X يتبع قانون كاي مربع، بدرجة حرية v، ونرمز لذلك بـ: $\boldsymbol{X\to\chi_v^2}$.

حيث v تمثل درجة الحرية، والتي تعتمد على حجم العينة.

كما يطلق على هذا القانون اسم قانون: *Karl Pearson* نسبة لمكتشفه.

2-1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع كاي مربع، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)}}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}} & x\in\ ]0\,,+\infty[\\[2ex] 0 & x\notin\ ]0\,,+\infty[\end{cases}$$

حيث أن: Γ: هي الدالة قاما.

2-2- خصائص توزيع كاي مربع:

يتميز توزيع كاي مربع بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع كاي مربع ملتوي نحو اليمين، أي موجب الالتواء، وكلما زادت قيمة درجة الحرية يقترب منحنى توزيع كاي مربع من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع كاي مربع هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع كاي مربع تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_0^{+\infty} f(x) = 1$.

ج- قيم المتغير العشوائي في توزيع كاي مربع موجبة، حيث أن منحنى توزيع كاي مربع يبدأ من النقطة 0، ويمتد إلى الطرف الأيمن، وكلما اقتربنا بجوار $+\infty$ اقترب المنحنى من محور الفواصل غير أنه لا ينطبق عليه.

د- إذا كان $30 \leq v < 100$: فإننا نقرب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v - 1}$$

هـ- إذا كان $v \geq 100$: فإننا نقرب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي: $z = \frac{x - v}{\sqrt{2v}}$

2-3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع كاي مربع:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع كاي مربع يساوي: $\boldsymbol{E(X) = v}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع كاي مربع يساوي: $\boldsymbol{V(X) = 2v}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2v}}$

2-4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^x x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

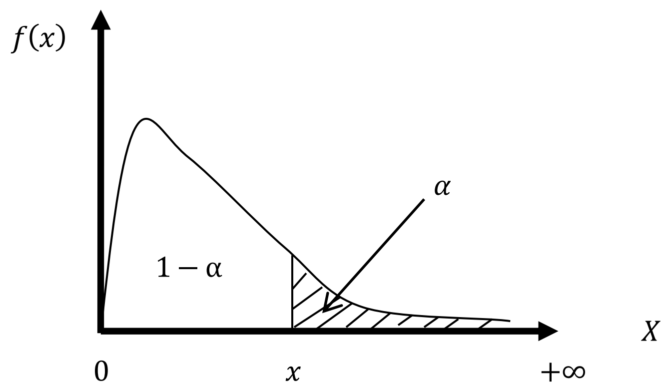
إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x)$.

2-5- قراءة جدول كاي مربع واستعمالاته:

جدول كاي مربع (أنظر الملحق رقم 3)، أعد من أجل تحديد قيمة معينة x بدلالة معلومتين:

- درجة الحرية v: وتقرأ على العمود الأول؛ - احتمال معلوم α: ويقرأ على السطر الأول.

الشكل(1-4): منحنى توزيع كاي مربع



المصدر: إعداد الباحث

مثال2: إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 20، أي: $X \to \chi^2_{20}$، ما هي قيمة x التي يقع على يسارها 0,995 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}995$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}005$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 3، نجد: التقاطع بين: $v = 20$ و $\alpha = 0{,}005$ وهو القيمة $x = 39{,}997$

أي أن: $P(X < 39{,}997) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \geq 39{,}997) = 0{,}005$

3. توزيع ستودنت:

نقول أن المتغير العشوائي T يستجيب لقانون ستودنت، بدرجة حرية v، إذا كان T معرف كالتالي: $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}}$

حيث: $X \to N(0,1)$ و $Y \to \chi^2_v$. X و Y مستقلان. ونكتب في هذه الحالة: $\boldsymbol{T \to t_v}$

v: تمثل درجة الحرية، والتي تعتمد على حجم العينة.

3-1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر T يتبع توزيع ستودنت، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \qquad t \in [-\infty\,, +\infty[$$

حيث أن: Γ: هي الدالة قاما.

3-2- خصائص توزيع ستودنت:

يتميز توزيع ستودنت بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع ستودنت متناظر ومفرطح، وكلما زادت قيمة درجة الحرية يقترب منحنى توزيع ستودنت من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع ستودنت هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(t) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع ستودنت تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(t)$، أي أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) = 1$.

ج- طرفا منحنى توزيع ستودنت غير منطبقين على محور الفواصل، أي أنهما ممتدان إلى ما لا نهاية في الجهتين.

3-3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع ستودنت:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(T)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع ستودنت يساوي: $\boldsymbol{E(T) = 0}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(T)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع ستودنت يساوي: $\boldsymbol{V(T) = \frac{v}{v-2}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{\frac{v}{v-2}}}$

3-4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع ستودنت:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} dt$$

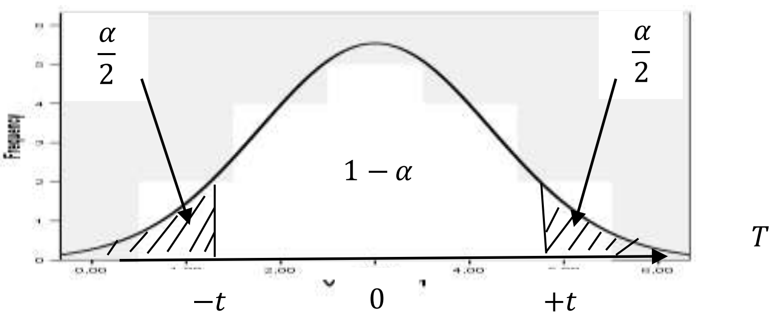
إذن لحساب $F(t)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(T \leq t)$.

3-5- قراءة جدول ستودنت واستعمالاته:

جدول ستودنت (أنظر الملحق رقم 4)، أعد من أجل تحديد قيمة معينة t بدلالة معلومتين:

- درجة الحرية v: وتقرأ على العمود الأول؛
- احتمال معلوم α: ويقرأ على السطر الأول.

الشكل(1-5): منحنى توزيع ستودنت



المصدر: إعداد الباحث

مثال3: إذا كان T يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية 12، أي: $T \rightarrow t_{12}$، ما هي قيمة t التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(T < t) = 0{,}05$. لكن جدول ستودنت يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي، كما يلي:

نلاحظ أن قيمة t التي يقع على يسارها 0,05 أي 5% من المساحة قيمتها سالبة، وبما أن منحنى توزيع ستودنت متناظر، فإننا نستخرج قيمة t الموجبة ونسبقها بإشارة سالبة كما يلي:

$$P(T < -t) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(T \geq +t) = 0{,}05$$

ومن خلال جدول ستودنت بالملحق رقم 4، نجد: التقاطع بين: $v = 12$ و $\alpha = 0{,}05$ وهو القيمة $1{,}782$ التي نسبقها بإشارة سالبة فتكون: $t = -1{,}782$ هي القيمة التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة.

4. توزيع فيشر:

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان توزيع كاي مربع، أي: $X_1 \rightarrow \chi^2_{v_1}$ و $X_2 \rightarrow \chi^2_{v_2}$، فإن المتغير X، حيث: $X = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$، يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية v_1 و v_2، اللتان تعتمدان على حجم العينة لكل متغير.

ونكتب: $\boldsymbol{X \rightarrow F_{v_1,v_2}}$

1-4- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع فيشر، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}v_1^{\frac{v_1}{2}}v_2^{\frac{v_2}{2}}x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1}(v_2+v_1x)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2}} & x\in\,]0\,,+\infty[\\ 0 & x\notin\,]0\,,+\infty[\end{cases}$$

حيث أن: Γ: هي الدالة قاما.

2-4- خصائص توزيع فيشر:

يتميز توزيع فيشر بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع فيشر ملتوي نحو اليمين، أي موجب الالتواء، وكلما زادت قيمتا درجة الحرية يقترب منحنى توزيع فيشر من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع فيشر هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x)\geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع فيشر تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_0^{+\infty}f(x)=1$.

ج- يعتمد توزيع فيشر على معلمتين، هما، درجة حرية البسط v_1 ودرجة حرية المقام v_2، وتكتب درجتا الحرية أمام المتغير، بحيث تكون درجة حرية البسط إلى اليسار، ودرجة حرية المقام إلى اليمين، فإذا كانت درجة حرية البسط تساوي 8، ودرجة حرية المقام تساوي11، فنعبر عن ذلك كما يلي: $F_{8\,,11}$

د- قيم المتغير العشوائي في توزيع فيشر موجبة، حيث أن منحنى توزيع فيشر يبدأ من النقطة 0، ويمتد إلى الطرف الأيمن، وكلما اقتربنا بجوار $+\infty$ اقترب المنحنى من محور الفواصل غير أنه لا ينطبق عليه.

3-4- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع فيشر:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع فيشر يساوي: $\boldsymbol{v_2>2}$ $\boldsymbol{E(X)=\frac{v_2}{v_2-2}}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع فيشر يساوي: $\boldsymbol{v_2>4}$ $\boldsymbol{V(X)=\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}}}$

4-4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع فيشر:

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_0^x f(x)dx=\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}v_1^{\frac{v_1}{2}}v_2^{\frac{v_2}{2}}\int_0^x x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1}(v_2+v_1x)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2}}dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X\leq x)$.

4-5- قراءة جدول فيشر واستعمالاته:

باستخدام جدول توزيع فيشر (أنظر الملحق رقم 5)، نستطيع الحصول على قيمة المتغير العشوائي x الذي يقع على يمينه المساحة: $\alpha = 0,1$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,025$ أو $\alpha = 0,01$ ، وبمعلومية درجتي حرية v_1 و v_2.

مثال4: إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 8 و 11، أي: $X \rightarrow F_{8,11}$، ما هي قيمة x التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0,05$، لكن جدول فيشر يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي، كما يلي:

$$P(X < x) = 0,05 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0,95$$

ومن خلال جدول فيشر بالملحق رقم 5، نجد: التقاطع بين: $v_1 = 8$ و $v_2 = 11$ في الجدول الخاص بـ: $\alpha = 0,05$ وهي القيمة $2,95$، وهي القيمة التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة.

4-6- العلاقات بين توزيع فيشر وتوزيعي ستودنت وكاي مربع:

- **نظرية 1:** $F_{(1-\alpha),v_1,v_2} = \frac{1}{F_{\alpha,v_2,v_1}}$

- **نظرية 2:** $F_{\alpha,1,v} = t^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),v}$

نظرية 3: $F_{\alpha,v,\infty} = \frac{\chi^2_{\alpha,v}}{v}$

مثال5:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 8 و 10، أي: $X \rightarrow F_{8,10}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,95 من المساحة؟

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و 10، أي: $X \rightarrow F_{1,10}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,05 من المساحة؟

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 10 و $+\infty$، أي: $X \rightarrow F_{10,+\infty}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,05 من المساحة؟

الحل:

1- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,95$. لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow \alpha = 0,05$

ومنه: $$F_{(0,95),8,10} = \frac{1}{F_{(0,05),10,8}} = \frac{1}{3,35} = 0,298$$

2- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,05$.

ومنه: $$F_{(0,05),1,10} = t^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right),10} = t^2_{(0,975),10} = (-2,228)^2 = 4,96$$

3- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,05$.

ومنه: $$F_{(0,05),10,\infty} = \frac{\chi^2_{(0,05),10}}{10} = \frac{18,307}{10} = 1,8307$$

ثالثا: توزيعات المعاينة

يعتبر الإحصاء الاستدلالي فرع من فروع علم الإحصاء، الذي يستند على إحصائية العينة في استنتاج معالم المجتمع، حيث أن هذا الاستنتاج أو الاستدلال يكون بأحد أمرين، إما **بالتقدير**، أي استنتاج معالم المجتمع عن طريق تقديرها بواسطة إحصائية تحسب قيمتها من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من ذلك المجتمع، فمثلا، لو أردنا معرفة المتوسط الحقيقي والانحراف المعياري الحقيقي لأوزان علب الطماطم المنتجة من طرف مؤسسة معينة، فإن إجراء الدراسة الشاملة غير ممكنة في هذه الحالة، نظرا لكبر حجم المجتمع، وبالتالي نقوم بتقدير المتوسط والانحراف المعياري الحقيقيين للوزن، وذلك بأخذ عينة عشوائية من الإنتاج اليومي للمؤسسة، ونقوم بحساب متوسط الوزن والانحراف المعياري فيها، ونعتبرهما كتقدير للمتوسط والانحراف المعياري الحقيقيين للوزن في المجتمع، هذا ما يطلق عليه التقدير بنقطة، وهناك نوع آخر من التقدير يسمى التقدير بمجال. أما الأمر الآخر الذي يقوم عليه الإحصاء الاستدلالي فهو **اختبار الفرضيات**، حيث نستخدم في هذه الحالة احصائية تحسب بياناتها من العينة المسحوبة في اختبار مدى صحة فرض معين حول معلمة من معالم المجتمع المدروس.

قبل التطرق للتقدير واختبار الفرضيات، يجب معرفة أهم توزيعات المعاينة المستخدمة في مجال الاحصاء الاستدلالي، باعتبارها القاعدة الأساسية التي يقوم عليها كلا من التقدير واختبار الفرضيات.

إن من أهم توزيعات المعاينة نجد، توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين، توزيع المعاينة للنسبة، توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتين، توزيع المعاينة للتباين، توزيع المعاينة لنسبة تباينين.

1. أهم المصطلحات في توزيعات المعاينة:

1-1- المعلمة: هي كل مقياس إحصائي تحسب قيمته من جميع بيانات المجتمع المدروسN، ومن أهم المعالم التي تصف لنا المجتمع، نذكر: مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي μ ، الوسيط M_e ، المنوال M_o، ....)،مقاييس التشتت (التباين $V(x)$، الانحراف المعياري σ، ...)، مقاييس الشكل (معامل فيشر للالتواءα_F، معامل فيشر للتفرطح β_F ...). نسبة ظاهرة معينة في المجتمع P . من أهم مميزات المعلمة أن قيمتها ثابتة، لأنها تحسب من بيانات المجتمع بأكمله.

1-2- الإحصائية: هي كل مقياس إحصائي تحسب قيمته من بيانات العينة المسحوبة ذات الحجم n من المجتمع المدروس، فمثلا، إذا سحبنا عينة مكونة من n طالب من طلبة كلية معينة، وقمنا بحساب متوسط وزن الطلبة في العينة المسحوبة، فإننا نستخدم العلاقة التالية: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$، هنا $\bar{X}$ يمثل إحصائية لأنه حُسِبَ من بيانات العينة، ولو أردنا حساب نسبة الطلبة الذين يتقنون لغة معينة من بيانات العينة السابقة، فإننا نستخدم العلاقة التالية: $\hat{p} = \frac{x}{n}$، حيث x تمثل عدد الطلبة الذين يتقنون تلك اللغة في العينة، هنا $\hat{p}$ تمثل إحصائية لأنها حُسِبَتْ من بيانات العينة. وإذا أردنا حساب تباين وزن الطلبة في العينة المسحوبة، فإننا نستخدم العلاقة التالية: $S^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}$، هنا S^2 يمثل إحصائية لأنه حُسِبَ من بيانات العينة، وهكذا لباقي الإحصاءات الأخرى. وبما أننا نستطيع أن نسحب أكثر من عينة من المجتمع نفسه فإننا نجد أن قيمة الإحصائية ستتغير من عينة لأخرى، وبالتالي نستنتج أن الإحصائية عبارة عن متغير.

1-3- توزيع المعاينة: هو التوزيع الاحتمالي لأي إحصائية تحسب قيمها من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من المجتمع. فلو سحبنا جميع العينات الممكنة والمكونة من n طالب من طلبة كلية معينة، وفي كل عينة

حسبنا متوسط الوزن $\bar{X}$، فإننا سنحصل على عدد المتوسطات مساوي لعدد العينات الممكن سحبها، وبما أن المتوسطات ستكون غير متساوية فإننا سنقوم بإنشاء توزيع احتمالي لها، حيث يعتبر $\bar{X}$ هو المتغير المدروس فيها، وفي هذه الحالة التوزيع الاحتمالي لـ$\bar{X}$ يسمى بتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة، وهكذا بالنسبة لأي إحصائية أخرى.

سنستخدم في توزيع المعاينة والتقدير واختبار الفرضيات الرموز والعلاقات التالية:

الجدول(1-1): الرموز والعلاقات المستخدمة في توزيع المعاينة والتقدير واختبار الفرضيات

المقياس		إحصائية العينة	معلمة المجتمع
المتوسط الحسابي		$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$	$\mu = \frac{\sum X_i}{N}$
التباين	السحب بالإرجاع	$S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	$\sigma^2 = \frac{\sum(X_i - \mu)^2}{N}$
	السحب بدون الإرجاع	$S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	
الانحراف المعياري		$S = \sqrt{S^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
نسبة ظاهرة معينة		$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$P = \frac{X}{N}$

المصدر: إعداد الباحث

2. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

2-1- تعريف توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو التوزيع الاحتمالي للمتوسطات الحسابية، المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة ذات الحجم المتساوي n، والممكن سحبها من المجتمع.

2-2- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma^2_{\bar{X}}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، متوسطه الحسابي μ وتباينه σ^2، وسحبنا جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n من هذا المجتمع. وحسبنا المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لكل عينة عشوائية، ثم حسبنا متوسط تلك المتوسطات $\mu_{\bar{X}}$ وتباينها $\sigma^2_{\bar{X}}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بمعالم المجتمع المدروس μ و σ^2؟

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالمثال التالي: نفرض أن مجتمع يتكون من 4 طلبة، A، B، C، D، حيث نريد دراسة متغير إحصائي يتمثل في الوقت المخصص من قبل كل طالب لمراجعة مقياس الإحصاء3. والنتائج كانت كما يلي:

الطالب	A	B	C	D
الوقت المخصص (الساعة) X_i	07	03	06	08

نقوم باستخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها من هذا المجتمع، لكن هنا يجب أن نعرف طريقة السحب، هل تمت بالإرجاع أم لا؟ لذا سنفرق بين الحالتين، كما يلي:

أ- حالة السحب بالإرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الطالبين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى ثم نعيدها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه يمكننا سحب الطالب الواحد مرتين.

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع μ وتباينه σ^2:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+3+6+8}{4} = 6\ h$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{(7-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2}{4} = 3,5$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب متوسط كل منها:

العينات (الثنائيات)	القيم	المتوسط $\bar{X}$
AA	7,7	7
AB	7,3	5
AC	7,6	6,5
AD	7,8	7,5
BA	3,7	5
BB	3,3	3
BC	3,6	4,5
BD	3,8	5,5
CA	6,7	6,5
CB	6,3	4,5
CC	6,6	6
CD	6,8	7
DA	8,7	7,5
DB	8,3	5,5
DC	8,6	7
DD	8,8	8

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}$)

$\bar{X}$	3	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	$\sum P_i$
P_i	$1/16$	$2/16$	$2/16$	$2/16$	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$2/16$	$1/16$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

المتوسط $\bar{X}_i$	الاحتمال P_i	$\bar{X}_i \times P_i$	$\bar{X}_i^2 \times P_i$
3	$1/16$	$3/16$	$9/16$
4,5	$2/16$	$9/16$	$40,5/16$
5	$2/16$	$10/16$	$50/16$
5,5	$2/16$	$11/16$	$60,5/16$
6	$1/16$	$6/16$	$36/16$
6,5	$2/16$	$13/16$	$84,5/16$
7	$3/16$	$21/16$	$147/16$
7,5	$2/16$	$15/16$	$112,5/16$
8	$1/16$	$8/16$	$64/16$
$\sum P_i$	1	$\frac{96}{16} = 6$	$\frac{604}{16} = 37,75$

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{X}_i \times P_i = \frac{96}{16} = 6 = \mu$$

نلاحظ أن: متوسط المجتمع μ يساوي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \left(\sum \bar{X}_i^2 \times P_i\right) - \mu_{\bar{X}}^2 = 37,75 - (6)^2 = 1,75 \neq \sigma^2$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{3,5}{2} = 1,75 = \sigma_{\bar{X}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة، أي:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$$

ب- حالة السحب بدون إرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الطالبين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى دون إعادتها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه لا يمكننا سحب الطالب الواحد مرتين.

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها بدون إرجاع، وحساب متوسط كل منها:

العينات (الثنائيات)	القيم	المتوسط $\bar{X}$
AB	7,3	5
AC	7,6	6,5
AD	7,8	7,5
BA	3,7	5
BC	3,6	4,5
BD	3,8	5,5
CA	6,7	6,5
CB	6,3	4,5
CD	6,8	7
DA	8,7	7,5
DB	8,3	5,5
DC	8,6	7

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}$)

$\bar{X}$	4,5	5	5,5	6,5	7	7,5	$\sum P_i$
P_i	$2/12$	$2/12$	$2/12$	$2/12$	$2/12$	$2/12$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

المتوسط $\bar{X}$	الاحتمال P_i	$\bar{X}_i \times P_i$	$\bar{X}_i^2 \times P_i$
4,5	$2/12$	$9/12$	$40,5/12$
5	$2/12$	$10/12$	$50/12$
5,5	$2/12$	$11/12$	$60,5/12$
6,5	$2/12$	$13/12$	$84,5/12$
7	$2/12$	$14/12$	$98/12$
7,5	$2/12$	$15/12$	$112,5/12$
$\sum P_i$	1	$\frac{72}{12} = 6$	$\frac{446}{12} = 37,167$

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{X}_i \times P_i = \frac{72}{12} = 6 = \mu$$

نلاحظ أن: متوسط المجتمع μ يساوي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = (\sum \bar{X}_i^2 \times P_i) - \mu_{\bar{X}}^2 = 37,167 - (6)^2 = 1,167 \neq \sigma^2$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{3,5}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = 1,167 = \sigma_{\bar{X}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة مضروبا في المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

- إذا تم سحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من مجتمع حجمه N، فإن:
متوسط المجتمع μ يساوي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$
- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فإن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n ، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$
- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

رياضيا يمكن أن نثبت أن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \sum \frac{\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)}{m} = \sum\left(\frac{\sum x_i}{nm}\right) = \frac{1}{n}\sum\left(\frac{\sum x_i}{m}\right) = \frac{1}{n}\sum E(X) = \frac{1}{n}\sum \mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

كما يمكن أن نثبت رياضيا أن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum V(X) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

2-3- طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

ترتبط طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ أي توزيع المتوسطات الحسابية المحسوبة من جميع العينات المسحوبة من مجتمع ما، بطبيعة توزيع المتغير المدروس X في ذلك المجتمع، الانحراف المعياري إذا كان معلوما أو مجهولا، وحجم العينة المسحوبة.

أ- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ معلوم، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$ ، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي: $X \to N(\mu\,;\,\sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\,;\sigma_{\bar{X}})$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$،
وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم

بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، أي أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، أي أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

مثال6: إذا كان لدينا متغير عشوائي X في مجتمع حجمه 500، موزع طبيعيا، متوسطه 75 وإنحرافه المعياري 10، نسحب من ذلك المجتمع عينة عشوائية حجمها n بدون إرجاع. ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة يفوق 78، في الحالتين التاليتين: 1- حجم العينة: $n = 16$ 2- حجم العينة: $n = 36$

الحل:

1- حجم العينة: $n = 16$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 75$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{16}{500} = 0,032 < 0,05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2,5$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(75 ; 2,5)$

$$P(\bar{X} > 78) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{78-75}{2,5}\right) = P(Z > 1,20) = P(Z < -1,20) = 1 - P(Z < 1,20)$$

$$P(\bar{X} > 78) = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

2- حجم العينة: $n = 36$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 75$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{36}{500} = 0,072 > 0,05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{10}{\sqrt{36}}\sqrt{\left(\frac{500-36}{500-1}\right)} = 1,61$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(75 ; 1,61)$

$$P(\bar{X} > 78) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} > \frac{78-75}{1,61}\right) = P(Z > 1,86) = P(Z < -1,86) = 1 - P(Z < 1,86)$$

$$P(\bar{X} > 78) = 1 - 0,9686 = 0,0314$$

ملاحظة: يطلق على الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ **بالخطأ المعياري**، الذي يعتمد على حجم العينة n، حيث أن قيمته تنخفض كلما زاد حجم العينة العشوائية، وهذا ما يؤدي بـ $\bar{X}$ المحسوب على العينة إلى الاقتراب أكثر فأكثر من μ المحسوب من المجتمع، أين يتطابقا لما تضم العينة جميع وحدات المجتمع.

ب- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$ ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي:

$$X \to N(\mu\ ;\ \sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$، أي أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال7: تتبع أوزان طلبة جامعة الجزائر توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 72 كلغ، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية حجمها 36 طالبا، ووجدنا أن إنحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فما احتمال أن يكون متوسط الوزن في العينة يفوق 70 كلغ؟

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 72$

- بما أن المجتمع غير محدود، فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{36}} = 1,17$ ، وبالتالي: $\bar{X} \to N(72\ ; 1,17)$

$$P(\bar{X} > 70) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \frac{70-72}{1,17}\right) = P(Z > -1,71) = P(Z < 1,71) = 0,9564$$

ج- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أقل من 30 أي: $n < 30$ ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$.

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى التوزيع T كما يلي: $T = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$، أي أن: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، أي أن: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال8: حل المثال السابق، إذا كان حجم العينة 26 طالبا.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1 = 26 - 1 = 25$

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 72$

- بما أن المجتمع غير محدود، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{7}{\sqrt{26-1}} = \frac{7}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(72\,;1{,}4)$

$$P(\bar{X} > 70) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} > \frac{70-72}{1{,}4}\right) = P(T > -1{,}43) = P(T < 1{,}43) = 1 - P(T > 1{,}43)$$

ومن خلال جدول ستودنت بالملحق رقم 4، نجد: التقاطع بين: $v = 25$ و أقرب قيمة ممكنة للقيمة 1,43 في ذلك السطر المقابل لدرجة الحرية 25، وهي القيمة 1,316، التي نسقطها على المحور العمودي، لنجد: $\alpha = 0{,}1$. أي أن:

$$P(T < 1{,}43) = 1 - 0{,}1 = 0{,}90$$

د- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30:

نظرية النهاية المركزية: إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ، و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$ ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي. بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي:

$$X \to N(\mu\,;\,\sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\,;\sigma_{\bar{X}})$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$، وفقا للحالات المذكورة في العنصرين أ وب.

مثال9: إذا كانت رواتب 540 موظف في أحد الشركات لا تتوزع طبيعيا، وسطها الحسابي يساوي 26953 دج، بإنحراف معياري 4573 دج، وقمنا بسحب عينة عشوائية تشمل81 موظفا من هذه الشركة، فما احتمال أن يكون وسطها الحسابي أقل من 26000 دج؟

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 26953\ DA$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{81}{540} = 0,15 > 0,05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{4573}{\sqrt{81}}\sqrt{\left(\frac{540-81}{540-1}\right)} = 468,89$$
وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(26953\ ; 468,89)$

$$P(\bar{X} < 26000) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} < \frac{26000-26953}{468.89}\right) = P(Z < -2,03) = 1 - P(Z < 2,03)$$

$$P(\bar{X} < 26000) = 1 - 0,9788 = 0,0212$$

مثال10: في أحد اختبارات الذكاء الذي أجري على 8000 شخص، وجد أن متوسط الدرجات هو 1000. اختيرت عينة عشوائية من 100 شخص ووجدنا أن تباينها يساوي 15625 . فإذا كانت درجات الذكاء في هذا المجتمع لا تتوزع طبيعيا.

ما هو احتمال أن قيمة متوسط الذكاء في العينة ستتراوح ما بين 970 و 1030؟

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 1000$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{100}{8000} = 0,0125 < 0,05$، فإن:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{15625} = 125 \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{125}{\sqrt{100}} = 12,5$$
وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(1000\ ; 12,5)$

$$P(970 \le \bar{X} \le 1030) = P\left(\frac{970-1000}{12,5} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{1030-1000}{12,5}\right) = P(-2,4 \le Z \le 2,4)$$
$$= P(Z \le 2,4) - P(Z \le -2,4) = P(Z \le 2,4) - \big(1 - P(Z \le 2,4)\big)$$
$$= 2P(Z \le 2,4) - 1$$
$$= 2(0,9918) - 1 = 0,9836$$

3. توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

3-1- تعريف توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين، هو التوزيع الاحتمالي للفروق ما بين جميع المتوسطات الحسابية المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول ذات الحجم المتساوي n_1، وجميع المتوسطات الحسابية المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني ذات الحجم المتساوي n_2.

3-2- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ وتباينه $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، متوسطه الحسابي في المجتمع الأول μ_1 وتباينه σ_1^2، ومتوسطه الحسابي في المجتمع الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_1، وحسبنا لكل عينة وسطها الحسابي $\bar{X}_1$، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_2، وحسبنا لكل عينة وسطها الحسابي $\bar{X}_2$، ثم حسبنا كل الفروق الممكنة بين جميع متوسطات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول، وجميع متوسطات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، ثم حسبنا متوسط تلك الفروق $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ وتباينها $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بمعالم المجتمعين المدروسين μ_1، μ_2، σ_1^2، σ_2^2؟

أ- حالة السحب بالإرجاع:

نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا مجتمعين، يضم الأول القيم: 10، 12، 14، ويضم الثاني القيمتين: 11 و15، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1 = 2$، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2 = 3$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، وأن السحب تم بالإرجاع.

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الأول μ_1 وتباينه σ_1^2:

$$\mu_1 = \frac{\sum x_{i1}}{N_1} = \frac{10+12+14}{3} = 12$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_{i1}-\mu_1)^2}{N_1} = \frac{(10-12)^2+(12-12)^2+(14-12)^2}{3} = 2{,}67$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الإرجاع من المجتمع الأول، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثنائيات)	المتوسط $\bar{X}_1$
10,10	10
10,12	11
10,14	12
12,10	11
12,12	12
12,14	13
14,10	12
14,12	13
14,14	14

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_1$)

$\bar{X}_1$	10	11	12	13	14	$\sum P_i$
P_i	$1/9$	$2/9$	$3/9$	$2/9$	$1/9$	1

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2:

$$\mu_2 = \frac{\sum x_{i2}}{N_2} = \frac{11+15}{2} = 13 \quad . \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum(x_{i2}-\mu_2)^2}{N_2} = \frac{(11-13)^2+(15-13)^2}{2} = 4$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 3$ الممكن سحبها مع الإرجاع من المجتمع الثاني، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}_2$
11,11,11	11
11,11,15	12,33
11,15,11	12,33
11,15,15	13,67
15,11,11	12,33
15,11,15	13,67
15,15,11	13,67
15,15,15	15

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_2$)

$\bar{X}_2$	11	12,33	13,67	15	$\sum P_i$
P_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

- جدول الفروق $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	10	11	12	13	14
11	-1	0	1	2	3
12,33	-2,33	-1,33	-0,33	0,67	1,67
13,67	-3,67	-2,67	-1,67	-0,67	0,33
15	-5	-4	-3	-2	-1

- جدول احتمالات الفروق $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

بما أن العينتين مستقلتين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\big((\bar{X}_1 = 10) - (\bar{X}_2 = 11)\big) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = -1) = P\big((\bar{X}_1 = 10)\big) \times P\big((\bar{X}_2 = 11)\big) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{72}$$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	10	11	12	13	14	$\sum P_i$
11	$1/72$	$2/72$	$3/72$	$2/72$	$1/72$	$9/72$
12,33	$3/72$	$6/72$	$9/72$	$6/72$	$3/72$	$27/72$
13,67	$3/72$	$6/72$	$9/72$	$6/72$	$3/72$	$27/72$
15	$1/72$	$2/72$	$3/72$	$2/72$	$1/72$	$9/72$
$\sum P_i$	$8/72$	$1/72$	$1/72$	$1/72$	$1/72$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، كما يلي:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	الاحتمال P_i	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \times P_i$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i$
-5	$1/72$	$-5/72$	$25/72$
-4	$2/72$	$-8/72$	$32/72$
-3,67	$3/72$	$-11{,}01/72$	$40{,}4067/72$
-3	$3/72$	$-9/72$	$27/72$
-2,67	$6/72$	$-16{,}02/72$	$42{,}7734/72$
-2.33	$3/72$	$-6{,}99/72$	$16{,}2867/72$
-2	$2/72$	$-4/72$	$8/72$
-1,67	$9/72$	$-15{,}03/72$	$25{,}1001/72$
-1,33	$6/72$	$-7{,}98/72$	$10{,}6134/72$
-0,67	$6/72$	$-4{,}02/72$	$2{,}6934/72$
-1	$2/72$	$-2/72$	$2/72$
-0,33	$9/72$	$-2{,}97/72$	$0{,}9801/72$
0	$2/72$	0	0
0,33	$3/72$	$0{,}99/72$	$0{,}3267/72$
0,67	$6/72$	$4{,}02/72$	$2{,}6934/72$
1	$3/72$	$3/72$	$3/72$
1,67	$3/72$	$5{,}01/72$	$8{,}3667/72$
2	$2/72$	$4/72$	$8/72$
3	$1/72$	$3/72$	$9/72$
$\sum P_i$	**1**	$\frac{-72}{72} = \mathbf{-1}$	$264{,}2406/72$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sum(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \times P_i = \frac{-72}{72} = -1$$

نقوم بحساب المقدار $\mu_1 - \mu_2$، فنجد: $\mu_1 - \mu_2 = 12 - 13 = -1$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين يساوي الفرق ما بين متوسطي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \left(\sum(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i\right) - \mu^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{264{,}2406}{72} - (-1)^2 = 2{,}67$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{2{,}67}{2} + \frac{4}{3} = 2{,}67 = \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب- حالة السحب بدون إرجاع:

نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا مجتمعين، يضم الأول القيم: 10، 12، 14، 16 ويضم الثاني القيم: 9، 11، 13، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1 = 3$، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع

العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2 = 2$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، وأن السحب دون إرجاع.

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الأول μ_1 وتباينه σ_1^2:

$$\mu_1 = \frac{\sum x_{i1}}{N_1} = \frac{10+12+14+16}{2} = 13$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_{i1}-\mu_1)^2}{N_1} = \frac{(10-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2}{4} = 5$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون إرجاع من المجتمع الأول، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}_1$	العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}_1$
10,12,14	12	14,10,12	12
10,12,16	12,67	14,10,16	13,33
10,14,12	12	14,12,10	12
10,14,16	13,33	14,12,16	14
10,16,12	12,67	14,16,10	13,33
10,16,14	13,33	14,16,12	14
12,10,14	12	16,10,12	12,67
12,10,16	12,67	16,10,14	13,33
12,14,10	12	16,12,10	12,67
12,14,16	14	16,12,14	14
12,16,10	12,67	16,14,10	13,33
12,16,14	14	16,14,12	14

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}_1$)

$\bar{X}_1$	12	12,67	13,33	14	$\sum P_i$
P_i	$6/24$	$6/24$	$6/24$	$6/24$	1

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2:

$$\mu_2 = \frac{\sum x_{i2}}{N_2} = \frac{9+11+13}{3} = 11$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum(x_{i2}-\mu_2)^2}{N_2} = \frac{(9-11)^2+(11-11)^2+(13-11)^2}{3} = 2{,}67$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون إرجاع من المجتمع الثاني، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثنائيات)	المتوسط $\bar{X}_2$
9,11	10
9,13	11
11,9	10
11,13	12
13,9	11
13,11	12

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}_2$)

$\bar{X}_2$	10	11	12	$\sum P_i$
P_i	$2/6$	$2/6$	$2/6$	1

- جدول الفروق $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	12	12,67	13,33	14
10	2	2,67	3,33	4
11	1	1,67	2,33	3
12	0	0,67	1,33	2

- جدول احتمال الفروق $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

بما أن العينتين مستقلين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\big((\bar{X}_1 = 12) - (\bar{X}_2 = 10)\big) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 2) = P\big((\bar{X}_1 = 12)\big) \times P\big((\bar{X}_2 = 10)\big) = \frac{6}{24} \times \frac{2}{6} = \frac{12}{144}$$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	12	12,67	13,33	14	$\sum P_i$
10	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$48/144$
11	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$48/144$
12	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$48/144$
$\sum P_i$	$36/144$	$36/144$	$36/144$	$36/144$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، كما يلي:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	الاحتمال P_i	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \times P_i$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i$
0	$12/144$	0	0
0,67	$12/144$	$8{,}04/144$	$5{,}3868/144$
1	$12/144$	$12/144$	$12/144$
1,33	$12/144$	$15{,}96/144$	$21{,}2268/144$
1,67	$12/144$	$20{,}04/144$	$33{,}4668/144$
2	$24/144$	$48/144$	$96/144$
2,33	$12/144$	$27{,}96/144$	$65{,}1468/144$
2,67	$12/144$	$32{,}04/144$	$85{,}5468/144$
3	$12/144$	$36/144$	$108/144$
3,33	$12/144$	$39{,}96/144$	$133{,}0668/144$
4	$12/144$	$48/144$	$192/144$
$\sum P_i$	1	$\frac{288}{144} = 2$	$751{,}8408/144$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sum(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \times P_i = \frac{288}{144} = 2$$

نقوم بحساب المقدار $\mu_1 - \mu_2$، فنجد: $\mu_1 - \mu_2 = 13 - 11 = 2$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين يساوي الفرق ما بين متوسطي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \left(\sum(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i\right) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{751{,}8408}{144} - (2)^2 = 1{,}22$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}=\frac{5}{3}+\frac{2,67}{2}=3\neq\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}$، فنجد:

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}=\frac{5}{3}\times\frac{4-3}{4-1}+\frac{2,67}{2}\times\frac{3-2}{3-1}=0,55+0,67=1,22=\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$$

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، وتم سحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n_1 سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من المجتمع الأول حجمه N_1، وسحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n_2 سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من المجتمع الثاني حجمه N_2، فإن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين يساوي الفرق ما بين متوسطي المجتمعين، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2}$

- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}\leq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}\leq 0,05$ فإن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، أي: $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}>0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}>0,05$ فإن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، أي: $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\Rightarrow\sigma_{\bar{X}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\Rightarrow\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

3-3- طبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

3-3-1- إذا كان المجتمعين مستقلين (العينتين المسحوبتين غير مرتبطتين):

أ- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بانحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين، حجمهما على التوالي n_1 و n_2، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، أي:

$$X_1 \to N(\mu_1\ ;\ \sigma_1) \quad et \quad X_2 \to N(\mu_2\ ;\ \sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ; \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \le 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} \le 0,05$، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}، \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0,05$ فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}، \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

مثال11: إذا كانت الأجور الشهرية لـ 600 عاملا في الشركة A تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي يساوي 29400 دج، وانحراف معياري 4500 دج، والأجور الشهرية لـ 800 عاملا في الشركة B تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي يساوي 30000 دج، وانحراف معياري 4200 دج، وسحبنا عينتين مستقلتين بدون إرجاع، العينة الأولى من الشركة A، حجمها 25 عاملا، والعينة الثانية من الشركة B حجمها 36 عاملا.

1- ما احتمال أن يكون متوسط الأجور الشهرية للعينة الأولى يقل بـ 200 دج عن متوسط الأجور الشهرية للعينة الثانية؟

2- أجب على السؤال 1، إذا كان حجم العينتين: $n_A = 64$ و $n_B = 81$؟

الحل:

لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل الأجور الشهرية للعمال.

الشركة A: X: يتوزع طبيعيا، $N_A = 600$ ، $\mu_A = 29400\ DA$ ، $\sigma_A = 4500\ DA$ ، $n_A = 25$

الشركة B: X: يتوزع طبيعيا، $N_B = 800$ ، $\mu_B = 30000\ DA$ ، $\sigma_B = 4200\ DA$ ، $n_B = 36$

1- احتمال أن يكون متوسط الأجور الشهرية للعينة الأولى يقل بـ 200 دج عن متوسط الأجور الشهرية للعينة الثانية:

نقوم بحساب الاحتمال: $P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 200) = ?$

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (الأجور الشهرية للعمال) يتوزع طبيعيا في كلا الشركتين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، أي:

$$X_A \to N(29400\,;\,4500) \quad et \quad X_B \to N(30000\,;\,4200) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\,;\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$$

وبما أن حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع،

و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{25}{600} = 0{,}042 < 0{,}05$ و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$ ، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 29400 - 30000 = -600\ DA$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{25} + \frac{(4200)^2}{36}} = 1140{,}175\ DA$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(-600\ ;\ 1140{,}175)$

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 200) = P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}} < \frac{200-(-600)}{1140{,}175}\right) = P(Z < 0{,}70) = 0{,}7580$$

2- الإجابة على السؤال 1، إذا كان حجم العينتين: $n_A = 64$ و $n_B = 81$:

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (الأجور الشهرية للعمال) يتوزع طبيعيا في كلا الشركتين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، أي:

$$X_A \to N(29400\,;\,4500) \quad et \quad X_B \to N(30000\,;\,4200) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\,;\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$$

وبما أن حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع،

و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{64}{600} = 0{,}11 > 0{,}05$ و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{81}{800} = 0{,}10 > 0{,}05$ ، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 29400 - 30000 = -600\ DA$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}\left(\frac{N_A-n_A}{N_A-1}\right) + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\left(\frac{N_B-n_B}{N_B-1}\right)} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{64}\left(\frac{600-64}{600-1}\right) + \frac{(4200)^2}{81}\left(\frac{800-81}{800-1}\right)} = 692{,}17$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(-600\ ;\ 692{,}17)$

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 200) = P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}\left(\frac{N_A-n_A}{N_A-1}\right)+\frac{\sigma_B^2}{n_B}\left(\frac{N_B-n_B}{N_B-1}\right)}} < \frac{200-(-600)}{692{,}17}\right) = P(Z < 1{,}16) = 0{,}8770$$

ب- إذا كان المتغير العشوائي المدروس لا يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين، بانحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما لا يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، أي: $X_1 \rightarrow N(\mu_1\ ;\ \sigma_1)\ \ et\ \ X_2 \rightarrow N(\mu_2\ ;\ \sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ;\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التي تم ذكرها في الحالة أ.

مثال12: متوسط مدة الحياة لمصابيح كهربائية تنتجها المؤسسة A هو 1100 ساعة وتباينها هو 40000، بينما التي تنتجها المؤسسة B فمتوسط مدة حياتها هو 900 ساعة وانحرافها المعياري هو 100 ساعة. سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين، الأولى حجمها 100 مصباح من منتجات المؤسسة A، والثانية حجمها 121 مصباح من منتجات المؤسسة B. فإذا علمت أن مدة حياة المصابيح في المجتمعين لا تتوزع طبيعيا. أوجد احتمال أن يزيد متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة A عن متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة B بمقدار 180 ساعة؟

الحل: لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل مدة حياة المصابيح.

المؤسسة A: X: توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا ، $\mu_A = 1100\ h$ ، $\sigma_A^2 = 40000$ ، $n_A = 100$

المؤسسة B: X: توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا ، $\mu_B = 900\ h$ ، $\sigma_B = 100\ h$ ، $n_B = 121$

- احتمال أن يزيد متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة A عن متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة B بمقدار 180 ساعة: نقوم بحساب الاحتمال: $P(\bar{X}_A - \bar{X}_B > 180) = ?$

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (مدة الحياة للمصابيح) توزيعه الاحتمالي غير طبيعي في كلا المؤسستين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، وحجم العينتين يفوق 30، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$ ، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، أي: $X_A \rightarrow N(1100\ ;\ 200)\ \ et\ \ X_B \rightarrow N(900\ ;\ 100) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \rightarrow N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\ ;\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$

وبما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 1100 - 900 = 200\ h$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{40000}{100} + \frac{(100)^2}{121}} = 21{,}97\ h$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \rightarrow N(200\ ;\ 21{,}97)$

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B > 180) = P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}} > \frac{180-200}{21{,}97}\right) = P(Z > -0{,}91) = P(Z < 0{,}91) = 0{,}8186$$

ج- إذا كان الانحرافين المعياريين σ_1 و σ_2 مجهولين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، أي: $X_1 \to N(\mu_1\,;\,\sigma_1) \quad et \quad X_2 \to N(\mu_2\,;\,\sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\,;\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات السابقة، مع تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2، كما يلي:

- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0{,}05$، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\text{،} \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

حيث أن: $S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع و $S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$ فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}\text{،} \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

ملاحظة: بالنسبة لطبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين في هذه الحالة، فهي تصلح بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمعين سواء أكانا طبيعيين أو غير طبيعيين.

مثال13: ينتج مصنع A للمشروبات الغازية في المتوسط 600 لتر يوميا، وينتج مصنع آخر B، 700 لتر كمعدل يومي من المنتوج نفسه، سحبت عينة عشوائية من المصنع الأول، تمثل إنتاج 49 يوما، فوجد أن متوسطها يساوي 590 لتر وانحرافها المعياري يساوي 30 لتر، كما سحبت عينة عشوائية أخرى من المصنع الثاني مستقلة عن العينة الأولى، تمثل إنتاج 36 يوما، فوجد أن متوسطها يساوي 720 لتر وانحرافها المعياري يساوي 20 لتر. أحسب الاحتمال: $P(90 \leq \bar{X}_B - \bar{X}_A \leq 110)$

الحل: لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل الكمية المنتجة يوميا من المشروبات الغازية باللتر.

المصنع A: X : توزيعه الاحتمالي غير معروف، $\mu_A = 600\ l$ ، $\bar{X}_A = 590\ l$ ، $S_A = 30\ l$ ، $n_A = 49$

المصنع B: X : توزيعه الاحتمالي غير معروف، $\mu_B = 700\ l$ ، $\bar{X}_B = 720\ l$ ، $S_B = 20\ l$ ، $n_B = 36$

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (الكمية المنتجة يوميا من المشروبات الغازية باللتر) توزيعه الاحتمالي غير معروف في كلا المصنعين، بانحرافين معياريين مجهولين، والعينتين مستقلتين، وحجم العينتين يفوق 30، فحسب نظرية النهاية

المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_B - \bar{X}_A$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_B - \bar{X}_A}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_B - \bar{X}_A}$، أي:

$$X_A \to N(600\,;\,\sigma_A) \;\; et \;\; X_B \to N(700\,;\,\sigma_B) \Rightarrow \bar{X}_B - \bar{X}_A \to N\left(\mu_{\bar{X}_B - \bar{X}_A}\,;\sigma_{\bar{X}_B - \bar{X}_A}\right)$$

وبما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن:
$$\mu_{\bar{X}_B - \bar{X}_A} = \mu_B - \mu_A = 700 - 600 = 100\ l$$

$$\sigma_{\bar{X}_B - \bar{X}_A} = \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(30)^2}{49} + \frac{(20)^2}{36}} = 5{,}43\ l$$

أي أن:
$$\bar{X}_B - \bar{X}_A \to N(100\ ;\ \ 5{,}43)$$

$$P(90 \le \bar{X}_B - \bar{X}_A \le 110) = P\left(\frac{90-100}{5{,}43} \le \frac{(\bar{X}_B - \bar{X}_A)-(\mu_B-\mu_A)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \le \frac{110-100}{5{,}43}\right)$$

$$\begin{aligned} P(90 \le \bar{X}_B - \bar{X}_A \le 110) &= P(-1{,}84 \le Z \le 1{,}84) = P(Z \le 1{,}84) - P(Z \le -1{,}84) \\ &= P(Z \le 1{,}84) - \left(1 - P(Z \le 1{,}84)\right) \\ &= 2P(Z \le 1{,}84) - 1 = 2(0{,}9671) - 1 = 0{,}9342 \end{aligned}$$

د- إذا كان المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا بانحرافين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير:

د-1- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما موزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وكان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، وسحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين حجم إحداهما على الأقل صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n_1 + n_2 - 2$، أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to T_{v=n_1+n_2-2}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2.
- بما أن الانحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين، فسنقوم بتقديرهما بنفس المقدِّر، بالاعتماد على التباين المشترك، الذي يرمز له بالرمز S_p^2، حيث: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$
- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \le 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \le 0{,}05$، فإن:

$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ و $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$، أي أن: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$ فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}$$

أي أن: $T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}}$ ، ودرجة الحرية هي: $v=n_1+n_2-2$

د-2- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، أي $\sigma_1\neq\sigma_2$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما موزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وكان الانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، أي: $\sigma_1\neq\sigma_2$، وسحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين حجم إحداهما على الأقل صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية v، حيث: $v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$ ، أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\rightarrow T_v$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2.
- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}\leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2}\leq 0{,}05$ ، فإن: $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$ و $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$، أي أن: $T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$
- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}>0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2}>0{,}05$ فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$$

أي أن: $T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$ ، ودرجة الحرية هي: $v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

مثال14: استخدمت طريقتان لإنتاج سلعة معينة، حيث توضح البيانات التالية الوقت بالدقائق المستغرق في إنتاج الوحدة بالنسبة لـ 6 وحدات أنتجت بالطريقة الأولى، و5 وحدات أنتجت بالطريقة الثانية، حيث X_1 يمثل الوقت المستغرق عند إستعمال الطريقة الأولى، وX_2 يمثل الوقت المستغرق عند إستعمال الطريقة الثانية:

X_1: 40 ,40 ,50 ,60 ,60 ,50 . X_2: 40, 45, 55, 58, 62

إذا علمت أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 51 دقيقة بالطريقة

الأولى، و53 دقيقة بالطريقة الثانية. أحسب الاحتمال $P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7)$، في الحالتين التاليتين:

أ- إذا كان الانحرافين المعياريين متساويين.　　ب- إذا كان الانحرافين المعياريين غير متساويين.

الحل:

أ- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين متساويين:

بما أن الانحرافين المعيارين مجهولين ومتساويين، أي: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، وحجم العينتين صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$v = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2 = 9$، أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to T_{v=9}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$،

- نقوم تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2:

- الطريقة الأولى:
$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_{1i}}{n_1} = \frac{40+40+50+60+60+50}{6} = \frac{300}{6} = 50$$
$$S_1^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{(40-50)^2 + \cdots + (50-50)^2}{6-1} = \frac{100+100+0+100+100+0}{5} = \frac{400}{5} = 80$$

- الطريقة الثانية:
$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_{2i}}{n_2} = \frac{40+45+55+58+62}{5} = \frac{260}{5} = 52$$
$$S_2^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{(40-52)^2 + \cdots + (62-52)^2}{5-1} = \frac{144+49+9+36+100}{4} = \frac{338}{4} = 84{,}5$$

- بما أن الانحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين، فسنقوم بتقديرهما بنفس المقدِّر، بالاعتماد على التباين المشترك، الذي يرمز له بالرمز S_p^2، حيث:
$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(6-1)\times 80 + (5-1)\times 84{,}5}{6+5-2} = \frac{400+338}{9} = 82$$

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 51 - 53 = -2$

و $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{82\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = 5{,}48$، أي أن: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (-2)}{5{,}48}$ و $v = 9$

$$P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 7) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{sp^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} < \frac{7-(-2)}{5{,}48}\right) = P(T < 1{,}64)$$
$$= 1 - P(T > 1{,}64) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

ب- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين غير متساويين:

بما أن الانحرافين المعيارين مجهولين وغير متساويين، أي: $\sigma_1 \neq \sigma_2$، وحجم العينتين صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{80}{6} + \frac{84{,}5}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{80}{6}\right)^2}{6-1} + \frac{\left(\frac{84{,}5}{5}\right)^2}{5-1}} = \frac{914{,}05}{35{,}55+71{,}40} = 8{,}54 \approx 9$$
أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to T_{v=9}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$،

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 51 - 53 = -2$

و $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{80}{6}+\frac{84,5}{5}} = 5,50$، أي أن: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(-2)}{5,50}$ و $v = 9$

$$P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 7) = P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} < \frac{7-(-2)}{5,50}\right) = P(T < 1,64)$$

$$= 1 - P(T > 1,64) = 1 - 0,05 = 0,95$$

3-3-2- إذا كان المجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين):

أحيانا، وأثناء المقارنة بين متوسطي مجتمعين، نجد أن العينتين المسحوبتين غير مستقلتين، أي أنهما مرتبطتين، حيث تكون القيمة الأولى في العينة الأولى والقيمة الأولى في العينة الثانية تابعتين لنفس الوحدة الإحصائية أو المفردة، وهكذا بالنسبة لباقي قيم العينتين، فمثلا لقياس فاعلية نظام غذائي معين على وزن الفرد، يتم قياس وزن عينة عشوائية من الأفراد قبل اتباعهم لذلك النظام الغذائي وقياس وزن العينة نفسها بعد اتباعهم له، وبالتالي نكون أمام وزنين مرتبطين للفرد نفسه، أحدهما في العينة الأولى والآخر في العينة الثانية.

إذا كان لدينا مجتمعين، المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في كليهما، أي: $X_1 \to N(\mu_1\ ;\ \sigma_1)$ و $X_2 \to N(\mu_2\ ;\ \sigma_2)$، وسحبنا كل العينات المتناظرة في المجتمعين، حيث أن كل قيمة X_{1i} من العينة الأولى بالمجتمع الأول تناظرها قيمة X_{2i} من العينة الثانية بالمجتمع الثاني، أي، نحصل على الأزواج التالية في كل عينتين: $(X_{11}\ ;\ X_{21}), (X_{12}\ ;\ X_{22}), (X_{13}\ ;\ X_{23}), \dots\dots, (X_{1n}\ ;\ X_{2n})$، وقمنا بحساب الفروق بين القيم D_i في كل عينتين متناظرتين، حيث: $D_i = X_{1i} - X_{2i}$، أي نحصل على عينات جديدة تمثل عينات الفروق بين القيم المتناظرة، متوسطها الحسابي في كل عينة جديدة هو $\bar{D}$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط هذه الفروق $\bar{D}$ يكون كما يلي:

1- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n \geq 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط $\mu_{\bar{D}}$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{D}}$، أي: $\bar{D} \to N(\mu_{\bar{D}}\ ;\ \sigma_{\bar{D}})$، وبما أن المتوسط الحسابي لمتوسط الفروق $\mu_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة متوسط الفروق للعينتين المسحوبتين $\hat{\mu}_{\bar{D}}$، حيث: $\hat{\mu}_{\bar{D}} = \frac{\sum D_i}{n}$، وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$.

حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}$، و $S_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{D}-\hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

2- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{\bar{D}-\hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

حيث: $\hat{\mu}_{\bar{D}} = \frac{\sum D_i}{n}$ و $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{S_{D_i}}{\sqrt{n-1}}$ و $S_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$

مثال15: البيانات التالية تمثل الكميات المباعة من سلعة معينة من طرف 7 محلات تجارية اختيروا عشوائيا، وذلك قبل القيام بحملة إعلانية عن هذه السلعة وبعدها.

المحلات	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات قبل الحملة الإعلانية X_1	60	55	45	65	45	50	51
المبيعات قبل الحملة الإعلانية X_2	62	58	42	60	60	55	58

المطلوب: بافتراض أن المجتمعين موزعين طبيعيا، أوجد احتمال أن يكون متوسط الفرق ما بين المبيعات قبل وبعد الحملة الإعلانية يفوق عن 9 وحدات؟

الحل:

المحل	X_1	X_2	$D_i = X_2 - X_1$	$D_i - \bar{D}$	$(D_i - \bar{D})^2$
1	60	62	2	-1	1
2	55	58	3	0	0
3	45	42	-3	-6	36
4	65	60	-5	-8	64
5	48	60	12	9	81
6	50	55	5	2	4
7	51	58	7	4	16
المجموع	/	/	**21**	/	**202**

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{21}{7} = 3$$

$$s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i - \bar{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{202}{7-1}} = 5,8$$

بما أن المجتمعين موزعين طبيعيين والعينتين مرتبطتين وحجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1 = 7 - 1 = 6$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{\bar{D} - \hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

حيث: $\hat{\mu}_{\bar{D}} = \frac{\sum D_i}{n} = 3$ و $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} = \frac{5,8}{\sqrt{7-1}} = 2,37$

$$P(\bar{D} > 9) = P\left(\frac{\bar{D} - \hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} > \frac{9-3}{2,37}\right) = P(T > 2,53) = 0,025 = 2,5\%$$

4. توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

4-1- تعريف توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

توزيع المعاينة لنسبة العينة هو التوزيع الاحتمالي للنسب حول ظاهرة معينة، المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة ذات الحجم المتساوي n، والممكن سحبها من المجتمع.

4-2- متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$ وتباينه $\sigma^2_{\hat{p}}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X في مجتمع، وسحبنا منه جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n، وحسبنا نسبة ظاهرة معينة $\hat{p}$ لكل عينة عشوائية، حيث: $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{عدد المفردات التي تتوفر فيهم الظاهرة المدروسة في العينة}}{\text{حجم العينة}}$، ثم حسبنا متوسط تلك النسب $\mu_{\hat{p}}$ وتباينها $\sigma^2_{\hat{p}}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بالنسبة الحقيقية للمجتمع المدروس P؟

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالمثال التالي: شركة يشتغل بها 4 موظفين، سألنا كل واحد منهم، هل يحمل شهادة جامعية أم لا، فكانت الإجابات كما يلي:

محمد	أحمد	سعيد	علي
نعم	لا	نعم	نعم

نقوم باستخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها من هذا المجتمع، لكن هنا يجب أن نعرف طريقة السحب، هل تمت بالإرجاع أم لا؟ لذا سنفرق بين الحالتين، كما يلي:

أ- حالة السحب بالإرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الموظفين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى ثم نعيدها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه يمكننا سحب الموظف الواحد مرتين.

- حساب كلا من نسبة الموظفين الذين يحملون شهادة جامعية في الشركة P والتباين σ^2:

$$P = \frac{\text{عدد الموظفين الذين يحملون شهادة جامعية}}{\text{العدد الإجمالي للموظفين}} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow q = 1 - P = 0{,}25$$

P: نسبة الموظفين الذين يحملون شهادة جامعية في الشركة. q: نسبة الموظفين الذين لا يحملون شهادة جامعية في الشركة

$$\sigma^2 = Pq = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب نسبة الموظفين الذين يملكون شهادة جامعية في كل منها:

النسبة $\hat{p}$	الإجابات	العينات	النسبة $\hat{p}$	الإجابات	العينات
1	نعم ، نعم	سعيد ، محمد	1	نعم ، نعم	محمد ، محمد
0,5	نعم ، لا	سعيد ، أحمد	0,5	نعم ، لا	محمد ، أحمد
1	نعم ، نعم	سعيد ، سعيد	1	نعم ، نعم	محمد ، سعيد
1	نعم ، نعم	سعيد ، علي	1	نعم ، نعم	محمد ، علي
1	نعم ، نعم	علي ، محمد	0,5	لا ، نعم	أحمد ، محمد
0,5	نعم ، لا	علي ، أحمد	0	لا ، لا	أحمد ، أحمد
1	نعم ، نعم	علي ، سعيد	0,5	لا ، نعم	أحمد ، سعيد
1	نعم ، نعم	علي ، علي	0,5	لا ، نعم	أحمد ، علي

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}$)

$\hat{p}$	0	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	1/16	6/16	9/16	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة:

$\hat{p}$	الاحتمال P_i	$\hat{p}_i \times P_i$	$\hat{p}_i^2 \times P_i$
0	1/16	0	0
0,5	6/16	3/16	1,5/16
1	9/16	9/16	9/16
$\sum P_i$	1	$\frac{12}{16} = 0{,}75$	$\frac{10{,}5}{16} = 0{,}65625$

$$\mu_{\hat{p}} = \sum \hat{p}_i \times P_i = 0{,}75 = P$$

نلاحظ أن: نسبة المجتمع P تساوي متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\hat{p}} = P}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة: $\sigma_{\hat{p}}^2 = \sum \hat{p}_i^2 \times P_i - (\mu_{\hat{p}})^2 = 0{,}65625 - (0{,}75)^2 = 0{,}09375 \neq \sigma^2$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{0{,}1875}{2} = 0{,}09375 = \sigma_{\bar{X}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma_{\hat{p}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$

ب- حالة السحب بدون إرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الموظفين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى دون إعادتها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه لا يمكننا سحب الموظف الواحد مرتين.

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون إرجاع، وحساب نسبة الموظفين الذين يملكون شهادة جامعية في كل منها:

النسبة $\hat{p}$	الإجابات	العينات	النسبة $\hat{p}$	الإجابات	العينات
1	نعم ، نعم	سعيد ، محمد	0,5	نعم ، لا	محمد ، أحمد
0,5	نعم ، لا	سعيد ، أحمد	1	نعم ، نعم	محمد ، سعيد
1	نعم ، نعم	سعيد ، علي	1	نعم ، نعم	محمد ، علي
1	نعم ، نعم	علي ، محمد	0,5	لا ، نعم	أحمد ، محمد
0,5	نعم ، لا	علي ، أحمد	0,5	لا ، نعم	أحمد ، سعيد
1	نعم ، نعم	علي ، سعيد	0,5	لا ، نعم	أحمد ، علي

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}$)

$\hat{p}$	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	$6/12$	$6/12$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة:

$\hat{p}$	الاحتمال P_i	$\hat{p}_i \times P_i$	$\hat{p}_i^2 \times P_i$
0,5	$6/12$	$3/12$	$1{,}5/12$
1	$6/12$	$6/12$	$6/12$
$\sum P_i$	1	$\frac{9}{12} = 0{,}75$	$\frac{7{,}5}{12} = 0{,}625$

$$\mu_{\hat{p}} = \sum \hat{p}_i \times P_i = 0{,}75 = P$$

نلاحظ أن: نسبة المجتمع P تساوي متوسط توزيع المعاينة لنسبة للعينة $\mu_{\hat{p}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\hat{p}} = P}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة:

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \sum \hat{p}_i^2 \times p_i - (\mu_{\hat{p}})^2 = 0{,}625 - (0{,}75)^2 = 0{,}0625 \neq \sigma^2 \neq \frac{\sigma^2}{n}$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{0{,}1875}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = 0{,}0625 = \sigma_{\hat{p}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma_{\hat{p}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة مضروبا في المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

- إذا تم سحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من مجتمع حجمه N، فإن: نسبة المجتمع P يساوي متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\hat{p}} = P}$

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فإن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma^2_{\hat{p}}$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n ، أي: $\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sigma^2}{n}}$، وبما أن: $\sigma^2 = Pq$، فإن: $\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{Pq}{n}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma^2_{\hat{p}}$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي: $\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، وبما أن: $\sigma^2 = Pq$، فإن: $\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

رياضيا يمكن أن نثبت أن: $\mu_{\hat{p}} = P$

$$\mu_{\hat{p}} = E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}nP = P$$

كما يمكن أن نثبت رياضيا أن: $\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{Pq}{n}$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = V(\hat{p}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{n^2}nPq = \frac{Pq}{n}$$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{Pq}{n} \Rightarrow \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \Rightarrow \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

3-4- طبيعة توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

وفقا لنظرية النهاية المركزية، إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n. فتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما يكون: $nP \geq 5$ و $nq \geq 5$ أي: $X \to N(\mu\,;\,\sigma) \Rightarrow \hat{p} \to N(\mu_{\hat{p}}\,;\sigma_{\hat{p}})$

بما أن طبيعة توزيع $\hat{p}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\hat{p}-\mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فإن: $\mu_{\hat{p}} = P$ و $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}}$، أي أن: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن:

$\mu_{\hat{p}} = P$ و $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، أي أن: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

مثال15:

1- يبلغ عدد عمال إحدى الشركات 800 عاملا، منهم 240 عاملا أعمارهم تقل عن 30 سنة، فإذا سحبنا عينة عشوائية من عمال هذه الشركة تشمل 81 عاملا، ما هو احتمال أن تكون نسبة العمال في العينة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة هو 40%؟

2- أجب عن نفس السؤال إذا كان حجم العينة 36؟

الحل:

- نسبة العمال الذين أعمارهم تقل عن 30 سنة: $P = \frac{240}{800} = 0{,}30 = 30\%$

- نسبة العمال الذين أعمارهم تساوي أوتفوق 30 سنة: $q = \frac{560}{800} = 0{,}70 = 70\%$

1 – احتمال أن تكون نسبة العمال في العينة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة هو 45% إذا كان حجم العينة 81:

لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{81}{800} = 0{,}10125 > 0{,}05$

ولدينا: $nP = 81 \times 0{,}3 = 24{,}3$ و $nq = 81 \times 0{,}7 = 56{,}7$

بما أن: $nP > 5$ و $nq > 5$ فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$\hat{p} \to N(\mu_{\hat{p}}\,;\sigma_{\hat{p}}) \quad => \hat{p} \to N\left(P\,;\sqrt{\frac{Pq}{n}}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right) => \hat{p} \to N\left(0{,}3\ \ ;\sqrt{\frac{0{,}30\times0{,}70}{81}}\left(\frac{800-81}{800-1}\right)\right)$$

$$=> \hat{p} \to N(0{,}3\ \ ;0{,}048)$$

$$P(\hat{p} < 0{,}40) = P\left(\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{0{,}4-0{,}30}{0{,}048}\right) = P(Z < 2{,}08) = 0{,}9812 = 98{,}12\%$$

2- احتمال أن تكون نسبة العمال في العينة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة هو 45% إذا كان حجم العينة 36:

لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$

ولدينا: $nP = 36 \times 0{,}3 = 10{,}8$ و $nq = 36 \times 0{,}7 = 25{,}2$

بما أن: $nP > 5$ و $nq > 5$ فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$\hat{p} \to N(\mu_{\hat{p}}\,;\sigma_{\hat{p}}) \quad => \hat{p} \to N\left(P\,;\sqrt{\frac{Pq}{n}}\right) => \hat{p} \to N\left(0{,}3\ \ ;\sqrt{\frac{0{,}30\times0{,}70}{36}}\right)$$

$$=> \hat{p} \to N(0{,}4\ \ ;0{,}076)$$

$$P(\hat{p} < 0{,}40) = P\left(\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{0{,}40-0{,}30}{0{,}076}\right) = P(Z < 1{,}32) = 0{,}9066 = 90{,}66\%$$

5. توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2$:

5-1- تعريف توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2$:

توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين هو التوزيع الاحتمالي للفروق ما بين جميع النسب المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول ذات الحجم المتساوي n_1، وجميع النسب المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني ذات الحجم المتساوي n_2.

2-5- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ وتباينه $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_1. وحسبنا نسبة ظاهرة معينة $\hat{p}_1$ لكل عينة عشوائية، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_2. وحسبنا نسبة نفس الظاهرة $\hat{p}_2$ لكل عينة عشوائية، ثم حسبنا كل الفروق الممكنة بين جميع نسب العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول، وجميع نسب العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، $\hat{p}_1-\hat{p}_2$، ثم حسبنا متوسط تلك الفروق $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ وتباينها $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بمعالم المجتمعين المدروسين P_1 و P_2؟

أ- السحب بالإرجاع:

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا معمل يشتغل به رجل (A)، وثلاث نساء $(B$ و C و $D)$، ومعمل آخر يشتغل به رجل (E)، وامرأة (F). وسحبنا من المعمل الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1=2$، وسحبنا من المعمل الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2=3$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الثاني، وأن السحب تم بالإرجاع. وليكن المتغير العشوائي المدروس في المعملين هو عدد الذكور.

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الأول P_1 وتباينه σ_1^2:

$$P_1=\frac{\text{عدد الذكور في المعمل الأول}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}}=\frac{1}{4}=0{,}25\Rightarrow q_1=1-P_1=0{,}75$$

P_1: نسبة الذكور في المعمل الأول.

q_1: نسبة الإناث في المعمل الأول.

$$\sigma_1^2=P_1q_1=0{,}25\times0{,}75=0{,}1875$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n=2$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات	النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات
0,5	ذكر ، أنثى	A ، C	1	ذكر ، ذكر	A ، A
0	أنثى ، أنثى	B، C	0,5	أنثى ، ذكر	B، A
0	أنثى ، أنثى	C ، C	0,5	أنثى ، ذكر	C ، A
0	أنثى ، أنثى	D، C	0,5	أنثى ، ذكر	D، A
0,5	ذكر ، أنثى	A ، D	0,5	ذكر ، أنثى	A ، B
0	أنثى ، أنثى	B، D	0	أنثى ، أنثى	B، B
0	أنثى ، أنثى	C ، D	0	أنثى ، أنثى	C ، B
0	أنثى ، أنثى	D، D	0	أنثى ، أنثى	D، B

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1$)

$\hat{p}_1$	0	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	9/16	6/16	1/16	1

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الثاني P_2 وتباينه σ_2^2:

$$P_2 = \frac{\text{عدد الذكور في المعمل الثاني}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \Rightarrow q_2 = 1 - P_2 = 0{,}5$$

P_2: نسبة الذكور في المعمل الثاني. q_2 : نسبة الإناث في المعمل الثاني.

$$\sigma_2^2 = P_2 q_2 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 3$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}_1$
E, E, E	ذكر، ذكر، ذكر	1
E, E, F	أنثى، ذكر، ذكر	0,67
E, F, E	ذكر، أنثى، ذكر	0,67
E, F, F	أنثى، أنثى، ذكر	0,33
F, E, E	ذكر، ذكر، أنثى	0,67
F, E, F	أنثى، ذكر، أنثى	0,33
F, F, E	ذكر، أنثى ، أنثى	0,33
F, F, F	أنثى ، أنثى ، أنثى	0

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_2$)

$\hat{p}_2$	0	0,33	0,67	1	$\sum P_i$
P_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

- جدول الفروق $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5	1
0	0	0,5	1
0,33	-0,33	0,17	0,67
0,67	-0,67	-0,17	0,33
1	-1	-0,5	0

- جدول احتمالات الفروق $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$:

بما أن العينتين مستقلتين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\left((\hat{p}_1 = 0) - (\hat{p}_2 = 0)\right) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0) = P\left((\hat{p}_1 = 0)\right) \times P\left((\hat{p}_2 = 0)\right) = \frac{9}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{19}{128}$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5	1	$\sum P_i$
0	$9/128$	$6/128$	$1/128$	$16/128$
0,33	$27/128$	$18/128$	$3/128$	$48/128$
0,67	$27/128$	$18/128$	$3/128$	$48/128$
1	$9/128$	$6/128$	$1/128$	$16/128$
$\sum P_i$	$72/128$	$48/128$	$8/128$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$، كما يلي:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	الاحتمال P_i	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \times P_i$	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_i^2 \times P_i$
-1	$9/128$	$-9/128$	$9/128$
-0,67	$27/128$	$-18,09/128$	$12/128$
-0,5	$6/128$	$-3/128$	$1,5/128$
-0.33	$27/128$	$-8,91/128$	$3/128$
-0,17	$18/128$	$-3,06/128$	$0,5/128$
0	$10/128$	0	0
0,17	$18/128$	$3,06/128$	$0,5/128$
0,33	$3/128$	$0,99/128$	$0,33/128$
0,5	$6/128$	$3/128$	$1,5/128$
0,67	$3/128$	$2,01/128$	$1,33/128$
1	$1/128$	$1/128$	$1/128$
$\sum P_i$	**1**	$\frac{-32}{128} = -0,25$	$30,6667/128$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sum(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \times P_i = \frac{-32}{128} = -0,25$$

نقوم بحساب المقدار $P_1 - P_2$، فنجد: $P_1 - P_2 = 0,25 - 0,5 = -0,25$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين يساوي الفرق ما بين نسبتي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = P_1 - P_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \left(\sum(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_i^2 \times P_i\right) - \mu^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \frac{30,6667}{128} - (-0,25)^2 = 0,177083$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0,1875}{2} + \frac{0,25}{3} = 0,177083 = \sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب- السحب بدون الإرجاع:

نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا معمل يشتغل به رجل (A)، وثلاث نساء $(B$ و C و $D)$، ومعمل آخر يشتغل به رجلين $(E$ و $F)$، وامرأة (G). وسحبنا من المعمل الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1 = 2$، وسحبنا من المعمل الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2 = 2$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الثاني، وأن السحب تم بدون إرجاع. وليكن المتغير العشوائي المدروس في المعملين هو عدد الذكور.

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الأول P_1 وتباينه σ_1^2:

$$P_1 = \frac{\text{عدد الذكور في المعمل الأول}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}} = \frac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow q_1 = 1 - P_1 = 0,75$$

$$\sigma_1^2 = P_1 q_1 = 0,25 \times 0,75 = 0,1875$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون ارجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات	النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات
0,5	ذكر ، أنثى	C ، A	0,5	أنثى ، ذكر	A ،B
0	أنثى ، أنثى	C ،B	0,5	أنثى ، ذكر	A ، C
0	أنثى ، أنثى	C ،D	0,5	أنثى ، ذكر	A ،D
0,5	ذكر ، أنثى	D ، A	0,5	ذكر ، أنثى	B ، A
0	أنثى ، أنثى	D ،B	0	أنثى ، أنثى	B ، C
0	أنثى ، أنثى	D ، C	0	أنثى ، أنثى	B ،D

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1$)

$\hat{p}_1$	0	0,5	$\sum P_i$
P_i	$6/12$	$6/12$	1

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الثاني P_2 وتباينه σ_2^2:

$$P_2 = \frac{\text{عدد الذكور في المعمل الثاني}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}} = \frac{2}{3} = 0,67 \Rightarrow q_2 = 1 - P_2 = 0,33$$

$$\sigma_2^2 = P_2 q_2 = 0,67 \times 0,33 = 0,22$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون الإرجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات
1	ذكر، ذكر	E, F
0,5	أنثى، ذكر	E, G
1	ذكر، ذكر	F, E
0,5	أنثى، ذكر	F, G
0,5	ذكر، أنثى	G, E
0,5	ذكر، أنثى	G, F

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_2$)

$\hat{p}_2$	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	$4/6$	$2/6$	1

- جدول الفروق $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5
0,5	-0,5	0
1	-1	-0,5

- جدول احتمالات الفروق $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$:

بما أن العينتين مستقلتين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\left((\hat{p}_1 = 0) - (\hat{p}_2 = 0,5)\right) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = -0,5) = P\left((\hat{p}_1 = 0)\right) \times P\left((\hat{p}_2 = 0,5)\right) = \frac{6}{12} \times \frac{4}{6} = \frac{24}{72}$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5	$\sum P_i$
0,5	$24/72$	$24/72$	$48/72$
1	$12/72$	$12/72$	$24/72$
$\sum P_i$	$36/72$	$36/72$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$، كما يلي:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	الاحتمال P_i	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \times P_i$	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_i^2 \times P_i$
-1	$12/72$	$-12/72$	$12/72$
-0,5	$36/72$	$-18/72$	$9/72$
0	$24/72$	0	0
$\sum P_i$	1	$\frac{-30}{72} = -0,42$	$21/72$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sum(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \times P_i = \frac{-30}{72} = -0{,}42$$

نقوم بحساب المقدار $P_1 - P_2$، فنجد: $P_1 - P_2 = 0{,}25 - 0{,}67 = -0{,}42$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين يساوي الفرق ما بين نسبتي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = P_1 - P_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \left(\sum(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_i^2 \times P_i\right) - \mu^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \frac{21}{72} - (-0{,}42)^2 = 0{,}12$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0{,}1875}{2} + \frac{0{,}22}{2} = 0{,}20 \neq \sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1} \times \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \times \frac{N_2-n_2}{N_2-1}$، فنجد:

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} \times \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \times \frac{N_2-n_2}{N_2-1} = \frac{0{,}1875}{2} \times \frac{4-2}{4-1} + \frac{0{,}22}{2} \times \frac{3-2}{3-1} = 0{,}0625 + 0{,}055 = 0{,}12 = \sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} \times \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \times \frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \times \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \times \frac{N_2-n_2}{N_2-1}}}$$

3-5- طبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا منهما عينتين كبيرتي الحجم، أي: $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فوفقا لنظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \rightarrow N\left(\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\,; \sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right)$

بما أن طبيعة توزيع $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N} \leq 0,05$ و $\frac{n_2}{N} \leq 0,05$ فإن: $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = P_1 - P_2$ و $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1} + \frac{P_2q_2}{n_2}}$،

أي أن: $$Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N}$ ، $\frac{n_2}{N}$ أحدهما أو كلهما أكبر من 0,05 فإن:

$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = P_1 - P_2$ و $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{P_2q_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$،

أي أن: $$Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{P_2q_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

مثال16: إذا كانت نسبة الناجحات من الطالبات في مقياس الإحصاء3 هو 60%، ونسبة الناجحين من الطلبة في نفس المقياس هو 55%. فإذا اخترنا عينتين مستقلتين، الأولى تشمل 100 طالبة، والثانية تشمل 150 طالبا، من الطلبة والطالبات الذين اشتركوا في هذا المقياس. ما احتمال أن تكون نسبة الناجحات في عينة الطالبات أكبر من نسبة الناجحين في عينة الطلبة بمقدار 8%.

الحل:

مجتمع الطالبات: $P_1 = 0,6$ ، $q_1 = 0,4$ ، $n_1 = 100$

مجتمع الطلبة: $P_2 = 0,55$ ، $q_2 = 0,45$ ، $n_2 = 150$

- احتمال أن تكون نسبة الناجحات في عينة الطالبات أكبر من نسبة الناجحين في عينة الطلبة بمقدار 8%:

بما أن حجم العينتين كبير، أي: $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فإن: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ تتوزع طبيعيا.

أي: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \rightarrow N\left(\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}, \sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\right)$

حيث: $$\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = P_1 - P_2 = 0,6 - 0,55 = 0,05$$

$$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1 \times q_1}{n_1} + \frac{P_2 \times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,6\times0,4}{100} + \frac{0,55\times0,45}{150}} = 0,064$$

$$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0,08) = P\left(\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}} > \frac{0,08-0,05}{0,064}\right) = P(Z > 0,47) = P(Z < -0,47) = 0,3192$$

6. توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

6-1- تعريف توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

توزيع المعاينة لتباين العينة هو التوزيع الاحتمالي للتباينات، المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة ذات الحجم المتساوي n، والممكن سحبها من المجتمع.

6-2- طبيعة توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X موزع طبيعيا في مجتمع ما، تباينه σ^2 معلوم، وسحبنا منه جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n. وحسبنا التباين S^2 لكل عينة عشوائية، فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1$. أي: $S^2 \rightarrow \chi^2_{v=n-1}$

بما أن طبيعة توزيع S^2 هو توزيع كاي مربع، فإنه يحول إلى χ^2 كما يلي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$،

مثال17: سحبت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع يتوزع طبيعيا، انحرافه المعياري هو 4. أوجد احتمال أن يكون تباين العينة يقل عن6.

الحل: بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية:

$v = n - 1 = 10 - 1 = 9$، أي: $s^2 \rightarrow \chi^2_9$

$$P(s^2 < 6) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \frac{(10-1)\times 6}{(4)^2}\right) = P(\chi^2 < 3{,}375) = 1 - P(\chi^2 > 3{,}375) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

7. توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

7-1- تعريف توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين، هو التوزيع الاحتمالي للنسب ما بين جميع التباينات المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول ذات الحجم المتساوي n_1، وجميع التباينات المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني ذات الحجم المتساوي n_2.

7-2- طبيعة توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وموزع طبيعيا في كليهما، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_1. وحسبنا التباين S_1^2 لكل عينة عشوائية، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_2. وحسبنا التباين S_2^2 لكل عينة عشوائية، ثم حسبنا كل النسب الممكنة بين جميع تباينات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول، وجميع تباينات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني $\frac{S_1^2}{S_2^2}$، فإن توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية: $v_1 = n_1 - 1$ و $v_2 = n_2 - 1$، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F_{v_1,v_2}$

بما أن طبيعة توزيع $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو توزيع فيشر، فإنه يحول إلى F كما يلي: $F=\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$،

مثال18: أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 8 و9 من مجتمعين طبيعيين تبايناهما على التوالي 20 و36.

- أوجد احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من ضعف تباين العينة الثانية.

الحل:

- احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من ضعف تباين العينة الثانية:

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للنسبة ما بين تباينين يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية:

$v_1=n_1-1=8-1=7$ و $v_2=n_2-1=9-1=8$، أي: $\frac{s_1^2}{s_2^2}\to F_{(7\ ,\ 8)}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{s}_1^2>2\mathrm{s}_2^2)=\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{s}_1^2}{\mathrm{s}_2^2}>2\right)=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{\mathrm{s}_1^2}{\mathrm{s}_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}>\frac{2}{\frac{20}{36}}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{F}>3{,}6)=0{,}05$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

يتكون مجتمع من أربع فئات اجتماعية، حجمه $N = 10000$، وحجم كل فئة هو كالتالي:

$$N_1 = 2000 \ , \ N_2 = 3600 \ , N_3 = 3200 \ , \ N_4 = 1200$$

نريد سحب عينة عشوائية حجمها $n = 200$:

1- ما هي طبيعة المجتمع المدروس؟ ما اسم هذه العينة.

2- حدد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة.

التمرين الثاني:

1- نريد سحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 98. بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

2- نريد سحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 200. بافتراض أن مفرداته متوفرة ضمن قائمة مرتبة، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين الثالث:

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \to N(0\ ,1)$. أحسب الاحتمالات التالية:

أ- $P(-2,44 < Z < 1,54)$ ، ب- $P(|Z| \leq 1,96)$ ، ج- $P(|Z| \leq 2,58)$ ، د- $P(|Z| \leq 1,64)$

2- حدد قيمة t في كل من الحالات التالية: $t(0,05\ ;\ 3)$ ، $t(0,99\ ;\ 11)$ ، $t(0,95\ ;\ 7)$

3- حدد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية : $\chi^2(0,025\ ;\ 17)$ ، $\chi^2(0,995\ ;\ 8)$ ، $\chi^2(0,90\ ;\ 21)$

4- حدد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية: $F(0,1\ ;\ 9\ ;17)$ ، $F(0,05\ ;\ 8\ ;4)$ ، $F(0,95\ ;\ 9\ ;\ 5)$

التمرين الرابع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

في مصنع لإنتاج البطاريات تبين أن ساعات العمل للبطارية الواحدة X تتوزع كما يلي: $X \to N(500\ ,10)$

1- ما هي القراءة الإحصائية للعبارة السابقة.

2- حدد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية.

3- أحسب احتمال أن بطارية ما ستعمل:

أ- ما بين 500 ساعة و515 ساعة. ب- أقل من 480 ساعة. ج- أكثر من 510 ساعة.

4- ما هو أدنى ساعات العمل لـ 2,5% من البطاريات الأكثر جودة؟

التمرين الخامس:

1- أثبت رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

2- أثبت رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$، وترتيبتهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

3- استنتج النقطة الحدية ونقطتي الانعطاف في حالة التوزيع الطبيعي المعياري.

التمرين السادس:

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 60، أي: $X \to \chi^2_{60}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

التمرين السابع:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 4 و 12، أي: $X \to F_{4\,,12}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,90 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و 14، أي: $X \to F_{1\,,14}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 15 و $+\infty$، أي: $X \to F_{15,+\infty}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

التمرين الثامن:

متوسط الزمن اللازم لإكمال الطلبة عملية التسجيل بالجامعة هو 40 دقيقة. اقترح مدير الجامعة إجراءات جديدة لعملية التسجيل، بمقتضاها سجلت الأزمنة لـ 26 طالبا اختيروا عشوائيا، فكانت النتيجة أن متوسط زمن التسجيل في العينة 37,5 دقيقة بانحراف معياري يقدر بـ 4,5 دقيقة، بافتراض أن أزمنة التسجيل تتوزع طبيعيا. أوجد احتمال أن يكون متوسط الزمن للعينة يساوي أو يقل عن 37,5 دقيقة.

التمرين التاسع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

في مصنع لصناعة لواحق السيارات قامت إدارة الجودة بمعاينة إنتاج المصنع من أسطوانات الفرامل، فتبين أن مدة صلاحيتها تتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 36 شهرا، وانحراف معياري قدره شهرين.

1- سحبنا عشوائيا أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع:

أ- ما احتمال أن تكون مدة صلاحيتها تفوق 33 شهرا. ب- ما احتمال أن تتراوح مدة صلاحيتها ما بين 34 و 40 شهرا.

2- سحبنا عينة عشوائية حجمها 49 أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع، فوجدنا أن تباينها يساوي 6,25

- ما احتمال أن يكون متوسط مدة صلاحيتها يقل عن 37 شهرا.

التمرين العاشر: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

ليكن μ المتوسط الحقيقي للمجتمع، وليكن $\bar{X}$ المتوسط المحسوب على عينة عشوائية ممثلة لهذا المجتمع حجمها n مسحوبة بالإرجاع، ولتكن العبارتين التاليتين: $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \ldots\ldots\ldots (2)$ ، $\mu_{\bar{X}} = \mu \ldots\ldots\ldots (1)$

1- ماذا تمثل العبارتين (1) و (2)؟

2- لتكن لدينا القيم التالية: 2 ، 4 ، 6

أ- استخرج جميع العينات ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الارجاع، وأحسب متوسط كلا منها.

ب- تأكد حسابيا من صحة العلاقتين (1) و (2)، علما أن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{4}{3}$

3- إذا كان: $n = 16$ و $X \to N(4 \; ; \; 0{,}4)$، أحسب الإحتمالين التاليين: $P(X \leq 5)$ ، $P(\bar{X} \geq 4{,}2)$

التمرين الحادي عشر: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

بغرض دراسة الأجور الشهرية لعمال إحدى المؤسسات الاقتصادية، تم سحب عينة عشوائية منتظمة، فأعطت النتائج التالية:

ترتيب العامل	4	17	30	43	56	69	82	95	108	121	134
الأجر الشهري (10^3 دج)	12,5	16,5	13,5	25,5	32,0	41,5	16,5	25,5	24,5	19,5	47,5

1- حدد كلا من: المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي ونوعه في هذه الدراسة.

2- ما هو حجم المجتمع الذي أجريت عليه هذه الدراسة؟ استخرج عينة عشوائية منتظمة أخرى ممكنة، يكون رقمها الأول هو 7.

3- أحسب قيمة متوسط الأجر الشهري لعمال هذه العينة.

4- إذا كان متوسط الأجر الشهري لعمال المؤسسة هو 28000 دج بتباين يساوي 2250000، وتم سحب جميع العينات العشوائية البسيطة الممكنة ذات الحجم 9 مع الإرجاع. أحسب كلا من متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي والخطأ المعياري.

التمرين الثاني عشر:

متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح كهربائية ينتجها المصنع A هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري هو 200 ساعة، بينما التي ينتجها المصنع B فمتوسط عمرها الإنتاجي هو 1200 ساعة وانحرافها المعياري هو 100 ساعة. سحبت عينة عشوائية حجمها 125 مصباح من كل مصنع.

أوجد احتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع A عن متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع B بمقدار يفوق 250 ساعة.

التمرين الثالث عشر:

1- أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع إحصائي موزع طبيعيا وسطه 85، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 16 من مجتمع إحصائي موزع طبيعيا وسطه 81، فإذا كان تبايني العينتين هما 5 و4 على التوالي، وكان تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين. أوجد الاحتمال التالي: $P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7)$.

2- أجب على السؤال السابق إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

التمرين الرابع عشر:

يدرس في إحدى المدارس 600 تلميذ وتلميذة، منهم 240 ذكور، فإذا سحبنا عينة عشوائية من هذه المدرسة تشمل 30 تلميذا وتلميذة. ما هو احتمال أن تكون نسبة الذكور في العينة تفوق 50%؟

التمرين الخامس عشر:

إذا كانت نسبة المعجبين ببرنامج تلفزيوني للأطفال في بلدية ما هو 60%، ونسبة المعجبات في نفس البرنامج هو 52%. فإذا اخترنا عينتين مستقلتين لإجراء استفتاء حول هذا الموضوع، الأولى تشمل 125 طفلا، والثانية تشمل 100 طفلة. أوجد احتمال أن تكون نسبة المعجبين في عينة الأولاد تفوق نسبة المعجبات في عينة البنات بـ 10%.

التمرين السادس عشر: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

أخذت عينتين عشوائيتين مستقلتين من طلبة قسمي الاقتصاد والتجارة بإحدى الجامعات للوقوف على مستوى الطلبة في مقياس الاحصاء3، بواقع $(n_1 = 25)$ طالب من قسم الاقتصاد و$(n_2 = 31)$ طالب من قسم التجارة، حيث أن علامات الطلبة بكل من قسمي الاقتصاد والتجارة يتوزعان طبيعيا تباينهما على التوالي: 16 و 25.

1- ما احتمال أن يكون تباين علامات عينة طلبة قسم الاقتصاد يقل عن 22.

2- أوجد قيمة C التي تحقق الاحتمال: $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0,01$

الحلول

حل التمرين الأول:

يتكون مجتمع من أربع فئات اجتماعية، حجمه $N = 10000$، وحجم كل فئة هو كالتالي:

$$N_1 = 2000 \;,\; N_2 = 3600 \;,\; N_3 = 3200 \;,\; N_4 = 1200$$

نريد سحب عينة عشوائية حجمها $n = 200$:

1- طبيعة المجتمع المدروس: غير متجانس لأنه يتكون من فئات اجتماعية متباينة.

- **اسم هذه العينة:** العينة الطبقية.

2- تحديد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة:

$$\boldsymbol{N \rightarrow n}$$

$$\boldsymbol{N_i \rightarrow n_i \quad \Rightarrow \quad n_i = \frac{N_i}{N} \times n}$$

$$n_1 = \frac{\mathrm{N_1}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{2000}{10000} \times 200 = 40$$

$$n_2 = \frac{\mathrm{N_2}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{3600}{10000} \times 200 = 72$$

$$n_3 = \frac{\mathrm{N_3}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{3200}{10000} \times 200 = 64$$

$$n_4 = \frac{\mathrm{N_4}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{1200}{10000} \times 200 = 24$$

حل التمرين الثاني:

1- لسحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 98، بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية نتبع الخطوات التالية:

- نعطي لكل مفردة عددا من الأعداد التالية: 01، 02، 03، ....، 98.

- من جدول الأرقام العشوائية نختار سطر أو عمود معين، ونأخذ منه جميع الأعداد المحصورة ضمن المجال المحدد (من 01 إلى غاية 98)، وفي حالة نفاذ أعداد السطر أو العمود دون الانتهاء من حجم العينة فإننا ننتقل للسطر أو العمود الموالي، وهكذا حتى يتم حصر العدد المطلوب من حجم العينة نختار مثلا السطر الثاني، فنجد العينة المطلوبة هي التي تحمل مفرداتها الأعداد التالية:

21، 59، 17، 91، 76، 83، 15، 86، 78، 87،

05، 43، 16، 93، 20، 54، 85، 36، 19، 73.

2- لسحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 200، نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب المفردات عشوائيا من 1 إلى 200

- حساب طول الفترة كما يلي: $\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}} = \frac{200}{20} = 10$

- اختيار الرقم الأول عشوائيا على أن يكون أقل من أو يساوي طول الفترة أي 10، ثم نضيف طول الفترة في كل مرة لنحصل على العينة المطلوبة، ولنختار مثلا الرقم 3 من المفردات المرتبة عشوائيا فتكون العينة المطلوبة هي:

3، 13، 23، 33، 43، 53، 63، 73، 83، 93، 103، 113، 123، 133، 143، 153، 163، 173، 183، 193.

حل التمرين الثالث:

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \to N(0\,,1)$. حساب الاحتمالات التالية:

* $P(-2{,}44 < Z < 1{,}54) = P(Z < 1{,}54) - P(Z < -2{,}44) = 0{,}9382 - 0{,}0073 = 0{,}9309$

* $P(|Z| \le 1{,}96) = P(Z \le 1{,}96\ et\ -Z \le 1{,}96\ ) = P(Z \le 1{,}96\ et\ Z \ge -1{,}96\ )$

$= P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96\ ) = P(Z < 1{,}96) - P(Z < -1{,}96) = 0{,}9750 - 0{,}0250 = 0{,}95$

* $P(|Z| \le 2{,}58) = P(Z \le 2{,}58\ et\ -Z \le 2{,}58\ ) = P(Z \le 2{,}58\ et\ Z \ge -2{,}58\ )$

$= P(-2{,}58 \le Z \le 2{,}58\ ) = P(Z < 2{,}58) - P(Z < -2{,}58) = 0{,}9951 - 0{,}0049 = 0{,}99$

* $P(|Z| \le 1{,}64) = P(Z \le 1{,}64\ et\ -Z \le 1{,}64\ ) = P(Z \le 1{,}64\ et\ Z \ge -1{,}64\ )$

$= P(-1{,}64 \le Z \le 1{,}64\ ) = P(Z < 1{,}64) - P(Z < -1{,}64) = 0{,}9495 - 0{,}0505 = 0{,}90$

2- تحديد قيمة t في كل من الحالات التالية:

* $t(0{,}05\ ;\ 3)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 3، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع ستودنت، فنجد: $t(0{,}05\ ;\ 3) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}05\ \Rightarrow t = 2{,}353$

* $t(0{,}99\ ;\ 11)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 99% من المساحة بدرجة حرية تساوي 11، أي تقع على يسارها 1% من المساحة، نستخرج قيمة t التي تقع على يمينها 1% من المساحة من جدول توزيع ستودنت ونسبقها بإشارة سالبة لأن توزيع ستودنت متناظر، فنجد: $t(0{,}99\ ;\ 11) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}99\ \Rightarrow t = -\ 2{,}718$

* $t(0{,}95\ ;\ 7)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجة حرية تساوي 7، أي تقع على يسارها 5% من المساحة، نستخرج قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة من جدول توزيع ستودنت ونسبقها بإشارة سالبة لأن توزيع ستودنت متناظر، فنجد: $t(0{,}95\ ;\ 7) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}95\ \Rightarrow t = -\ 1{,}895$

3- تحديد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية:

* $\chi^2(0{,}025\ ;\ 17)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 17، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}025\ ;\ 17) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}025\ \Rightarrow x^2 = 30{,}191$

* $\chi^2(0{,}995\ ;\ 8)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 99,5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 8، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}995\ ;\ 8) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}995 \Rightarrow \chi^2 = 1{,}344$

* $\chi^2(0{,}90\ ;\ 21)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 90% من المساحة بدرجة حرية تساوي 21، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}90\ ;\ 21) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}90 \Rightarrow \chi^2 = 13{,}240$

4- تحديد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية:

* $F(0{,}1\ ;\ 9\ ;17)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 9 و 17، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}1\ ;\ 9\ ;17) \Rightarrow P(F > f) = 0{,}1 \Rightarrow f = 2{,}03$

* $F(0{,}05\ ;8\ ;4)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 5% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 8 و 4، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}05\ ;\ 8\ ;4)) \Rightarrow P(F > f) = 0{,}1 \Rightarrow f = 6{,}04$

* $F(0,95\ ;9;\ 5)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 9 و 5، وبما أن النسبة كبيرة فإننا نستخرجها من جدول توزيع فيشر، بإيجاد قيمة f لـ 95% من المساحة عن طريق قيمة f لـ 5% من المساحة، وذلك بقسمة 1 على قيمة f لـ 5% مع تغيير درجتي الحرية. أي:

$$F(0{,}95\ ;9\ ;5)\ =\frac{1}{F(0{,}05\ ;5\ ;9)}\Rightarrow f\ =\frac{1}{3.48}=0{,}287$$

حل التمرين الرابع:

في مصنع لإنتاج البطاريات تبين أن ساعات العمل للبطارية الواحدة X تتوزع كما يلي: $X\rightarrow N(500\ ,10)$

1- القراءة الإحصائية للعبارة السابقة: المتغير العشوائي X (ساعات العمل للبطارية الواحدة) يتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 500 ساعة وإنحراف معياري قيمته 10 ساعات.

2- تحديد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية:

- متوسط ساعات العمل للبطارية الواحدة هو 500 ساعة، أي: $\mu\ =\ 500$
- الانحراف المعياري يساوي 10 ساعات، أي: $\sigma\ =\ 10$
- شكل دالة كثافته الاحتمالية: $f(x)\ =\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-500}{10}\right)^2}$

3- حساب احتمال أن:

أ- بطارية ما ستعمل ما بين 500 ساعة و515 ساعة:

- $P(500<X<515)\ =P\left(\frac{500-500}{10}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{515-500}{10}\right)=P(0<Z<1{,}5)$
  $=P(Z<1{,}5)-P(Z<0)=0{,}9332-0{,}5\ =0{,}4332$

ب- بطارية ما ستعمل أقل من 480 ساعة:

- $P(X\ <480)\ =P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{480-500}{10}\right)=P(Z<-2)=0{,}0228$

ج- بطارية ما ستعمل أكثر من 510 ساعة:

- $P(X>510)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{510-500}{10}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0{,}8413=0{,}1587$

4- أدنى ساعات العمل لـ 2,5% من البطاريات الأكثر جودة:

$$P\ (X>\alpha)=0{,}025\Leftrightarrow P\ (X<\alpha)=0{,}975\Leftrightarrow\ P\left(\frac{x-500}{10}<\frac{\alpha-500}{10}\right)=0{,}975$$
$$\Leftrightarrow P\left(Z<\frac{\alpha-500}{10}\right)=0{,}975$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد: $Z\ =1{,}96$

أي أن: $\frac{\alpha-500}{10}=1{,}96$ أي: $\alpha\ =519{,}6\ \ kg$

حل التمرين الخامس:

1- إثبات رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$:

يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر، كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}2(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

بوضع المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي مساوية للصفر نجد:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-\mu)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\mu$$

بالتعويض بقيمة μ في دالة التوزيع الطبيعي نجد:

$$f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^0=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

2- إثبات رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$، وترتيبتهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$:

يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر، كما يلي:

$$f'(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$f''(x)=\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)'$$
$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\frac{1}{2\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)2(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$f''(x)=\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

بوضع المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي مساوية للصفر نجد:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (x-\mu)^2=\sigma^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\mu=\sigma \\ x-\mu=-\sigma \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\mu+\sigma \\ x=\mu-\sigma \end{cases}$$

بالتعويض بقيمتي $\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$ في دالة التوزيع الطبيعي نجد:

$$f(\mu+\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$
$$f(\mu-\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف فاصلتيهما $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$، وترتيبتيهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

3- استنتاج النقطة الحدية ونقطتي الانعطاف في حالة التوزيع الطبيعي المعياري:

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري معرفة بالصيغة التالية: $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z)^2}$

حيث: $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ و $z\in\Omega_Z=]-\infty,+\infty[$، وبالتالي: $Z\to N(0,1)$

انطلاقا من المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي، وجدنا أنها تنعدم عند الفاصلة $x=\mu$، أي:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\mu$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{\mu-\mu}{\sigma}$$
$$\Leftrightarrow z=0$$

بالتعويض بقيمة 0 في دالة التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(0)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري نقطة حدية عظمى، فاصلتها معدومة وترتيبتها تساوي $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}}$.

و انطلاقا من المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي، وجدنا أنها تنعدم عند الفاصلتين: $\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$، أي:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=\mu+\sigma \\ x=\mu-\sigma \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} \\ \frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=+1 \\ z=-1 \end{cases}$$

بالتعويض بقيمتي $+1$ و $+1$ في دالة التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$f(-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$
$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف فاصلتيهما -1 و $+1$، وترتيبتيهما تساوي $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

حل التمرين السادس:

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 60، أي: $X \to \chi^2_{60}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة:

أ- **الطريقة الأولى:** نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}975$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}025$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 3، نجد: التقاطع بين: $v = 60$ و $\alpha = 0{,}025$ وهو القيمة $x = 83{,}298$

أي أن: $P(X < 83{,}298) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq 83{,}298) = 0{,}025$

ب- **الطريقة الثانية:** بما أن: $30 \leq v < 100$: فإننا <u>نقرب</u> توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v - 1}$$

نبحث عن قيمة z التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة، فنجد أنها: $z = +1{,}96$، فنجد:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v - 1} \Leftrightarrow 1{,}96 = \sqrt{2x} - \sqrt{2(60) - 1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} = 10{,}91 + 1{,}96$$
$$\Leftrightarrow x = 82{,}83$$

مع ملاحظة أن هذه القيمة تقريبية لقيمة كاي مربع.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

أ- **الطريقة الأولى:** نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}975$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}025$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 3، نجد: التقاطع بين: $v = 100$ و $\alpha = 0{,}025$ وهو القيمة $x = 129{,}561$

أي أن: $P(X < 129{,}561) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq 129{,}561) = 0{,}025$

ب- **الطريقة الثانية:** بما أن: $v \geq 100$: فإننا <u>نقرب</u> توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \frac{x - v}{\sqrt{2v}}$$

نبحث عن قيمة z التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة، فنجد أنها: $z = +1{,}96$، فنجد:

$$z = \frac{x-v}{\sqrt{2v}} \Leftrightarrow 1{,}96 = \frac{x-100}{\sqrt{2(100)}}$$
$$\Leftrightarrow x - 100 = 1{,}96\sqrt{2(100)}$$
$$\Leftrightarrow x - 100 = 27{,}72$$
$$\Leftrightarrow x = 127{,}72$$

مع ملاحظة أن هذه القيمة تقريبية لقيمة كاي مربع.

حل التمرين السابع:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 4 و12، أي: $X \to F_{4,12}$، إيجاد قيمة x التي يقع على يمينها 0,90 من المساحة:

نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,90$. لدينا: $1 - \alpha = 0,90 \Leftrightarrow \alpha = 0,1$

ومنه: $F_{(0,90),4,12} = \frac{1}{F_{(0,1),12,4}} = \frac{1}{3,90} = 0,256$

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و14، أي: $X \to F_{1,14}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة:

أ- الطريقة الأولى: تمثل القيمة x الإحصائية التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 1 و14، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0,1\ ;\ 1\ ; 14) \Rightarrow P(F > x) = 0,1 \Rightarrow x = 3,1$

ب- الطريقة الثانية: $F_{(0,1),1,14} = t^2_{\left(1-\frac{0,1}{2}\right),14} = t^2_{(0,95),14} = (-1,761)^2 = 3,1$

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 15 و $+\infty$، أي: $X \to F_{15,+\infty}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة:

أ- الطريقة الأولى: تمثل القيمة x الإحصائية التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 15 و $+\infty$، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0,1\ ;\ 15\ ; +\infty) \Rightarrow P(F > x) = 0,1 \Rightarrow x = 1,49$

ب- الطريقة الثانية: $F_{(0,1),15,\infty} = \frac{\chi^2_{(0,1),15}}{15} = \frac{22,307}{15} = 1,49$

حل التمرين الثامن:

- إيجاد احتمال أن يكون متوسط الزمن للعينة يساوي أو يقل عن 37,5 دقيقة:

المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $\mathrm{v} = \mathrm{n} - 1 = 26 - 1 = 25$، أي: $\bar{\mathrm{X}} \to T(25)$

$$P(\bar{X} \le 37,5) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \le \frac{-2,5}{\frac{4,5}{\sqrt{25}}}\right) = P(T \le -2,78) = 0,005$$

حل التمرين التاسع:

في مصنع لصناعة لواحق السيارات قامت إدارة الجودة بمعاينة إنتاج المصنع من أسطوانات الفرامل، فتبين أن مدة صلاحيتها تتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 36 شهرا، وانحراف معياري قدره شهرين.

1- سحبنا عشوائيا أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع:

أ- احتمال أن تكون مدة صلاحيتها تفوق 33 شهرا:

$$P(X > 33) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{33-36}{2}\right) = P(Z > -1,5) = P(Z < 1,5) = 0,9332$$

ب- احتمال أن تتراوح مدة صلاحيتها ما بين 34 و 40 شهرا:

$$P(34 < X < 40) = P\left(\frac{34-36}{2} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{40-36}{2}\right) = P(-1 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0,9772 - 0,1587 = 0,8185$$

2- سحبنا عينة عشوائية حجمها 49 أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع، فوجدنا أن تباينها يساوي 6,25

- احتمال أن يكون متوسط مدة صلاحيتها يقل عن 37 شهرا:

المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$X \to N(\mu\,;\sigma) \;\; => \bar{X} \to N\left(\mu\,;\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \;\; => \;\; \bar{X} \to N\left(36\,;\frac{\sqrt{6{,}25}}{\sqrt{49}}\right) => \;\; \bar{X} \to N(36\;;\;0{,}357)$$

$$P(\bar{X} < 37) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{37-36}{0{,}357}\right) = P(Z < 2{,}8) = 0{,}9974$$

<u>**حل التمرين العاشر:**</u>

1- تمثل العبارتين:

$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$: متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يساوي متوسط المجتمع.

$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}}$: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة المسحوبة.

2- أ- إستخراج جميع العينات ذات الحجم $\boldsymbol{n = 2}$ الممكن سحبها مع الارجاع، وحساب متوسط كلا منها:

العينات	المتوسط $\bar{X}$
2,2	2
2,4	3
2,6	4
4,2	3
4,4	4
4,6	5
6,2	4
6,4	5
6,6	6

ب- التأكد حسابيا من صحة العلاقتين (1) و (2)، علما أن: $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{4}{3}}$:

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{2+4+6}{3} = 4$$

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{n} = \frac{36}{9} = 4 = \mu$$

وبالتالي فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ ، أي أن العلاقة (1) صحيحة.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{n} = \frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \sigma^2_{\bar{X}}$$

وبالتالي فإن: $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}}$ ، أي أن العلاقة (2) صحيحة.

3- إذا كان: $\boldsymbol{n = 16}$ و $\boldsymbol{X \to N(4\;;\;0,4)}$، حساب الاحتمالين التاليين: $\boldsymbol{P(X \le 5)}$ ، $\boldsymbol{P(\bar{X} \ge 4,2)}$

أ- حساب الاحتمال: $\boldsymbol{P(X \le 5)}$

$$P(X \le 5) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{5-4}{0{,}4}\right) = P(Z \le 2{,}5) = 0{,}9938$$

ب- حساب الاحتمال: $P(\bar{X} \geq 4,2)$

المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$X \to N(\mu\,;\sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N\left(\mu\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \bar{X} \to N\left(4\,;\frac{0,4}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \bar{X} \to N(4\ ;\ 0,1)$$

$$P(\bar{X} \geq 4,2) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{4,2-4}{0,1}\right) = P(Z \geq 2) = P(Z \leq -2) = 0,0228$$

<u>**حل التمرين الحادي عشر:**</u>

1- تحديد كلا من: المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي ونوعه في هذه الدراسة:

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الإحصائي	نوعه
جميع عمال المؤسسة	العامل الواحد	الأجر الشهري	متغير كمي مستمر

2-أ- حجم المجتمع الذي أجريت عليه هذه الدراسة:

بما أن العينة المسحوبة هي عينة منتظمة فإننا نبحث عن الدور الذي يساوي:

134 – 121 = 121 – 108 = 108 – 95 = ...= 30 – 17 = 17 – 4 = 13

وبالتالي: $\frac{N}{n} = 13$ أي: $N = 13n = 13 \times 11 = 143$ لأن حجم العينة $n = 11$

ب- استخراج عينة عشوائية منتظمة أخرى ممكنة، يكون رقمها الأول هو7:

نبدأ بالرقم 7 وفي كل مرة نضيف قيمة الدور الذي يساوي 13 فتكون لدينا العينة التالية:

ترتيب العامل	7	20	33	46	59	72	85	98	111	124	137

3- حساب قيمة متوسط الأجر الشهري لعمال هذه العينة:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{275}{11} = 25\ \times 10^3\ DA$$

4- حساب كلا من متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ والخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 28000\ DA$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2250000}}{3} = 500\ DA$$

<u>**حل التمرين الثاني عشر:**</u>

- احتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع A عن متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع B بمقدار يفوق 250 ساعة:

المجتمعين موزعين طبيعيا بتباينين معلومين، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$X_A \to N(\mu_A\,;\sigma_A)\ et\ X_B \to N(\mu_B\,;\sigma_B) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_A - \mu_B\,;\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(1400 - 1200\,;\sqrt{\frac{(200)^2}{125} + \frac{(100)^2}{125}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(200\,;20)$$

$$P(\bar{X}_A-\bar{X}_B>250)=P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}}>\frac{250-200}{20}\right)=P(Z>2,5)=P(Z<-2,5)=0,0062$$

حل التمرين الثالث عشر:

1- إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين، حساب الاحتمال: $P(\bar{X}_1<7+\bar{X}_2)$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين، والعينتين صغيرتا الحجم، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v=n_1+n_2-2=10+16-2=24$ أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\ \rightarrow t(24)$

التباين المشترك sp^2: $sp^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(10-1)(5)+(16-1)(4)}{24}=4,375$

$$P(\bar{X}_1<\bar{X}_2+7)=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<7)=P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{sp^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}<\frac{7-(85-81)}{\sqrt{4,375\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{16}\right)}}\right)=P\left(t<\frac{3}{0,84}\right)$$

$$=P(t<3,57)=1-P(t>3,57)=1-0,001=0,999$$

3- إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، حساب الاحتمال: $P(\bar{X}_1<7+\bar{X}_2)$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، والعينتين صغيرتا الحجم، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{16}\right)^2}{\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{4}{16}\right)^2}{16-1}}=\frac{0,5625}{0,032}=17,58\approx 18$

أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\ \rightarrow t(18)$

$$P(\bar{X}_1<\bar{X}_2+7)=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<7)=P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}<\frac{7-(85-81)}{\sqrt{\frac{5}{10}+\frac{4}{16}}}\right)=P\left(t<\frac{3}{0,866}\right)$$

$$=P(t<3,46)=1-P(t>3,46)=1-0,001=0,999$$

حل التمرين الرابع عشر:

احتمال أن تكون نسبة الذكور في العينة تفوق 50%:

نسبة الذكور: $p=\frac{240}{600}=0,40$ و نسبة التلميذات: $q=\frac{360}{600}=0,60$

وبالتالي: $np=30\times0,4=12$ و $nq=30\times0,6=18$

بما أن: $np>5$ و $nq>5$ فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$\hat{p}\rightarrow N(\mu_{\hat{p}}\,;\sigma_{\hat{p}})\ \Rightarrow\hat{p}\rightarrow N\left(p\,;\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\Rightarrow\hat{p}\rightarrow N\left(0,4\ ;\sqrt{\frac{0,4\times0,6}{30}}\right)\Rightarrow\hat{p}\rightarrow N(0,4\ ;0,089)$$

$$P(\hat{p} > 0{,}5) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} > \frac{0{,}5-0{,}4}{0{,}089}\right) = P(Z > 1{,}12) = P(Z < -1{,}12) = 0{,}1314$$

<u>حل التمرين الخامس عشر:</u>

- إيجاد احتمال أن تكون نسبة المعجبين في عينة الأولاد تفوق نسبة المعجبات في عينة البنات بـ 10%:

مجتمع الأولاد: $P_1 = 0{,}6$ ، $q_1 = 0{,}4$ ، $n_1 = 125$

مجتمع البنات: $P_2 = 0{,}52$ ، $q_2 = 0{,}48$ ، $n_2 = 100$

بما أن حجم العينتين كبير فإن: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ تتوزع طبيعيا، أي: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \to N\left(\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}, \sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\right)$

حيث: $\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = P_1 - P_2 = 0{,}6 - 0{,}52 = 0{,}08$

و $$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1 \times q_1}{n_1} + \frac{P_2 \times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}6\times0{,}4}{125} + \frac{0{,}52\times0{,}48}{100}} = 0{,}066$$

$$P\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0{,}10\right) = P\left(\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}} > \frac{0{,}10-0{,}08}{0{,}066}\right) = P(Z > 0{,}30)$$
$$= P(Z < -0{,}30) = 0{,}3821$$

<u>حل التمرين السادس عشر:</u>

قسم الاقتصاد: علامات الطلبة موزعين طبيعيا ، $n_1 = 25$ ، $\sigma_1^2 = 16$

قسم التجارة: علامات الطلبة موزعين طبيعيا ، $n_2 = 31$ ، $\sigma_2^2 = 25$

1- احتمال أن يكون تباين علامات عينة طلبة قسم الاقتصاد يقل عن 22:

بما أن مجتمع طلبة قسم الاقتصاد موزع طبيعيا، فإن توزيع المعاينة لتباين عينة قسم الاقتصاد يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 25 - 1 = 24$، أي: $s_1^2 \to \chi^2_{24}$

$$P(s_1^2 < 22) = P\left(\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} < \frac{(25-1)\times 22}{16}\right) = P(\chi^2 < 33) = 1 - P(\chi^2 > 33) = 1 - 0{,}1 = 0{,}90$$

2- ايجاد قيمة C التي تحقق الاحتمال: $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0{,}01$

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للنسبة ما بين تباينين يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية:

$v_1 = n_1 - 1 = 25 - 1 = 24$ و $v_2 = n_2 - 1 = 31 - 1 = 30$، أي: $\frac{s_1^2}{s_2^2} \to F_{(24\,;\,30)}$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} > \frac{C}{\frac{20}{36}}\right) = P\left(F > \frac{36C}{20}\right) = 0{,}01$$

من جدول توزيع فيشر نجد: $\frac{36C}{20} = 2{,}47 \Rightarrow C = 1{,}37$

تمارين مقترحة

التمرين الأول

تتكون كلية الاقتصاد بجامعة المسيلة من خمس فئات طلابية موزعة كالتالي:

- عدد طلبة السنة الأولى هو: 4200 طالب. - عدد طلبة السنة الثانية هو: 3100 طالب.

- عدد طلبة السنة الثالثة هو: 2000 طالب. - عدد طلبة الماستر 1 هو: 400 طالب. - عدد طلبة الماستر 2 هو: 300 طالب.

نريد سحب عينة عشوائية حجمها $n = 200$:

1- ماهي طبيعة المجتمع المدروس؟ ما اسم هذه العينة.

2- حدد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة.

التمرين الثاني:

إذا كانت درجات 500 موظف في إحدى اختبارات الترقية تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 70 درجة وانحراف معياري قدره 5 درجات، أحسب ما يلي:

1- عدد الموظفين الحاصلين على درجات محصورة ما بين 66 و76.

2- عدد الموظفين الحاصلين على درجات تفوق 80.

3- عدد الموظفين الحاصلين على درجات تقل عن 60.

4- ما هي أقصى درجة لأضعف 2,5% من الموظفين؟

التمرين الثالث:

1- أحسب الاحتمالات التالية علما أن $Z \to N(0,1)$:

$P(Z \geq 1{,}67)$ ، $P(Z \leq -1{,}23)$ ، $P(|Z| \leq 1{,}43)$ ، $P(|Z| \geq 2{,}67)$ ، $P(1{,}04 \leq Z \leq 1{,}67)$

2- إذا كان $X \to N(20\ ,\ 5)$. حدد قيمة a في كل حالة من الحالات التالية:

$P(X \leq a) = 0{,}975$ ، $P(X \leq a) = 0{,}025$

3- إذا كان $X \to T(12)$ ، أوجد قيمة t فيما يلي، $P(T \geq t) = 0{,}01$ ، $P(T \leq t) = 0{,}05$

4- إذا كان $X \to T(10)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(T \geq 2{,}228)$ ، $P(T \leq 1{,}372)$ ، $P(T \geq -2{,}764)$

5- إذا كان $X \to \chi^2(20)$، أوجد قيمة K فيما يلي: $P(\chi^2 \geq K) = 0{,}01$ ، $P(\chi^2 \leq K) = 0{,}05$

6- إذا كان $X \to \chi^2(14)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(\chi^2 \geq 7{,}790)$ ، $P(T \leq 5{,}629)$

7- إذا كان $X \to F(8\ ,12)$، أوجد قيمة K فيما يلي: $P(F \geq K) = 0{,}01$ ، $P(F \leq K) = 0{,}95$

8- إذا كان $X \to F(6\ ,9)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(F \geq 5{,}8)$ ، $P(F \leq 2{,}55)$

التمرين الرابع:

نريد سحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 16 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 200. بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين الخامس:

نريد سحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 400. بافتراض أن مفرداته متوفرة ضمن قائمة مرتبة، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين السادس:

تتبع أطوال كل الشباب في مدينة المسيلة توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 170 سم، وتباين 36، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية تشمل 25 شابا، فما احتمال أن يكون متوسط الطول في العينة يفوق 172سم.

التمرين السابع:

إذا كانت رواتب كل الموظفين التابعين لشركة كبيرة لها وسط حسابي يساوي 26953 دج، بانحراف معياري 4573، فإذا سحبنا من هذه الشركة عينة عشوائية تشمل 49 موظفا، فما احتمال أن يكون وسطها الحسابي أقل من 26000 دج.

التمرين الثامن:

تتبع أوزان طلبة جامعة المسيلة توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 72 كلغ، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية ووجدنا أن انحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فما احتمال أن يكون متوسط الوزن في العينة يفوق 70 كلغ في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة يساوي 36. ب- حجم العينة يساوي 26.

التمرين التاسع:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع طبيعيا وسطه 28 انحرافه 3، وعينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع آخر يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه 25 وانحرافه 4، فإذا كان حجم كل عينة من العينتين يساوي 25، فأحسب الاحتمال التالي: $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 2 \geq 0)$

التمرين العاشر:

إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان لهما نفس الوسط الحسابي، وسحبنا من كل مجتمع عينة عشوائية تشمل 10 مفردات، فوجدنا أن تباين العينة الأولى يساوي 9، وتباين العينة الثانية يساوي 6، وكانت العينتان مستقلتين، فما احتمال أن يكون الفرق بين متوسط العينة الأولى ومتوسط العينة الثانية أكبر من 2 في الحالتين التاليتين:

أ- تبايني المجتمعين متساويين. ب- تبايني المجتمعين غير متساويين.

التمرين الحادي عشر:

1- إذا كانت نسبة الأمية للأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة في مدينة ما هو 12,60%، وتم اختيار من هذه المدينة عينة عشوائية تشمل 50 شخصا من الأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة، فما احتمال أن تكون نسبة الأمية في العينة أقل من 10%.

التمرين الثاني عشر:

إذا كانت نسبة التالف من إنتاج الآلة (أ) 7%، ونسبة التالف من إنتاج الآلة (ب) 5%، وسحبنا عينتين مستقلتين، الأولى من إنتاج الآلة الأولى، وتحتوي على 36 وحدة، والثانية من إنتاج الآلة الثانية وتحتوي على 64 وحدة، فما احتمال أن تكون نسبة التالف في عينة الآلة (أ) أكبر من نسبة التالف في عينة الآلة (ب) بمقدار 1,8% فأكثر؟

التمرين الثالث عشر:

سحبت عينة عشوائية حجمها 12 من مجتمع يتوزع طبيعيا، انحرافه المعياري هو 5. أوجد احتمال أن يكون تباين العينة يقل عن9؟

التمرين الرابع عشر:

أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 10 و12 من مجتمعين طبيعيين انحرافهما على التوالي 2 و 4. أوجد احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من نصف تباين العينة الثانية؟