نتطرق من خلال هذ الفصل إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: التقدير بنقطة

ثانيا: التقدير بمجال

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

إن إجراء أي دراسة إحصائية حول متغير عشوائي X متعلق بظاهرة ما (دخل الأسرة، أجر العمال، عدد الأطفال في الأسرة، ...إلخ)، يعني حساب مقاييس تعبر عن سلوك الظاهرة المدروسة، أهمها:

- مقاييس النزعة المركزية، التي تعبر عن مستوى الظاهرة (حيث يعتبر المتوسط الحسابي أحسنها)؛
- مقاييس التشتت، التي تعبر عن مدى تقارب أو تباعد بيانات الظاهرة عن بعضها (حيث يعتبر الانحراف المعياري أحسنها)؛
- نسبة انتشار ظاهرة معينة في المجتمع.

هذه المقاييس تتعلق بالمجتمع الإحصائي، فهي غالبا ما تكون مجهولة، لأنها تتطلب دراسة إحصائية شاملة، والتي يمكن أن تكون مكلفة أو مستحيلة، وعليه فإن علم الإحصاء يعطينا الحل، الذي يتمثل في **تقدير** قيم هذه المقاييس انطلاقا من بيانات عينة عشوائية تسحب بدقة من المجتمع الإحصائي المدروس.

تتمثل مهمة **نظرية التقدير** في البحث عن أحسن وأدق **المقدِّرات** للمقاييس الحقيقية للمجتمع انطلاقا من نتائج العينة العشوائية، رياضيا، عملية التقدير تعني السعي إلى بناء إحصائية عينة تعبر بأكبر قدر ممكن من الدقة على مقاييس المجتمع، باستعمال معطيات العينة، حيث تقدم لنا هذه النظرية نوعان من التقدير، التقدير بنقطة والتقدير بمجال.

أولا: التقدير بنقطة

1. تعريف التقدير بنقطة:

التقدير بنقطة يعني تقدير معالم المجتمع المجهولة بقيمة واحدة (قيمة نقطية)، حيث يمكن إعطاء العديد من التقديرات النقطية للمعالم الحقيقية للمجتمع، انطلاقا من معطيات العينة، لكن نظرية التقدير تسعى إلى البحث على أحسن وأدق المقدِّرات، لأنها في كل الأحوال تحتوي على هامش من الخطأ، نظرا لكونها محسوبة من بيانات عينة وليس من بيانات المجتمع، حيث يدعى هذا الخطأ بالخطأ العشوائي، رياضيا وإحصائيا، البحث على أدق مقدِّر يعني توفر جملة من المواصفات الرياضية والإحصائية في هذا المقدِّر.

2. مواصفات المقدِّر النقطي الجيد:

أ- **عدم التحيز:** نقول أن مقدِّرا عشوائيا $\hat{\theta}$ غير متحيز للمعلمة المجهولة θ، إذا كان التوقع الرياضي لهذا المقدِّر يساوي تماما قيمة المعلمة المقدَّرة، أي: $E(\hat{\theta}) = \theta$

إن اعتبار عدم التحيز من مواصفات المقدِّر الجيد، يعود لكون أن التوقع الرياضي أو المتوسط الحسابي للتوزيع يقع في مركز البيانات وأنه الأقرب من كل القيم من أي متوسط آخر، وبالتالي عندما يكون المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للإحصائية $\hat{\theta}$ هو المعلمة θ فإننا سنكون متأكدين ومطمئنين أن القيمة المحسوبة من أي عينة لتقدير المعلمة θ ستكون قريبة من القيمة الحقيقية للمعلمة.

إذا كان المقدِّر متحيِّزا فإن: $E(\hat{\theta}) = \theta + Bias(\hat{\theta})$، حيث: $Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ تمثل مقدار التحيز، أما إذا كان المقدِّر غير متحيِّز فإن مقدار التحيز يكون معدوما، أي: $Bias(\hat{\theta}) = 0$.

مثال1: هل يمكن اعتبار أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$، النسبة $\hat{p}$، والتباين S^2 مقاييس غير متحيزة؟

الحل:

1- المتوسط الحسابي $\bar{X}$:

أثبتنا في الفصل الأول، رياضيا وحسابيا، أن متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$ يساوي دائما المتوسط الحسابي للمجتمع μ ، سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي : $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$، وبالتالي فإن المتوسط الحسابي الذي صيغته: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$ يعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

2- النسبة $\hat{p}$:

أثبتنا في الفصل الأول، رياضيا وحسابيا، أن متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$ يساوي دائما نسبة المجتمع P، سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي : $E(\hat{p}) = P$، وبالتالي فإن النسبة الذي صيغتها: $\hat{p} = \frac{x}{n}$ تعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة لنسبة للمجتمع P.

3- التباين S^2:

- **حالة السحب مع الإرجاع:** لدينا: $S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$$E(S^2) = E\left(\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E(\sum(X_i - \bar{X})^2) = \frac{1}{n-1}E(\sum(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2))$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left((\sum X_i^2) - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left((\sum X_i^2) - n\bar{X}^2\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

تباين المجتمع يمكن حسابه كما يلي: $\sigma^2 = E(X_i^2) - \mu^2$

تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يمكن حسابه كما يلي: $\sigma_{\bar{X}}^2 = E(\bar{X}^2) - \mu^2$

بالتعويض عن $E(X_i^2)$ و $E(\bar{X}^2)$ نجد:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\sigma_{\bar{X}}^2 + \mu^2\right)\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 + n\mu^2 - n\sigma_{\bar{X}}^2 - n\mu^2\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\sigma_{\bar{X}}^2\right)$$

بما أن السحب تم بالإرجاع، فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$، وبالتالي:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}((n-1)\sigma^2)$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

وبالتالي فإن: متوسط توزيع المعاينة لتباين العينة $E(S^2)$ يساوي دائما تباين المجتمع σ^2 ، وهذا في حالة السحب بالإرجاع، أي : $E(S^2) = \sigma^2$، وبالتالي فإن التباين الذي صيغته: $S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ يعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة لتباين للمجتمع σ^2، وذلك في حالة السحب بالإرجاع.

- **حالة السحب دون إرجاع:** لدينا: $S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$

$$E(S^2) = E\left(\frac{N-1}{N} \times \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1} E(\sum(X_i - \bar{X})^2)$$

$$E(S^2) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1}\left(\sum E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

تباين المجتمع يمكن حسابه كما يلي: $\sigma^2 = E(X_i^2) - \mu^2$

تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يمكن حسابه كما يلي: $\sigma_{\bar{X}}^2 = E(\bar{X}^2) - \mu^2$

بالتعويض عن $E(X_i^2)$ و $E(\bar{X}^2)$ نجد: $E(S^{2*}) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\sigma_{\bar{X}}^2\right)$

بما أن السحب تم دون إرجاع، فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$، وبالتالي:

$$E(S^{2*}) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$E(S^{2*}) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - \sigma^2 \times \frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$E(S^{2*}) = \left(\frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1}\left(n - \frac{N-n}{N-1}\right)\right)\sigma^2$$

لاحظ أن المقدار: $\frac{N-1}{N} \times \frac{1}{n-1}\left(n - \frac{N-n}{N-1}\right) = 1$ ، وبالتالي: $E(S^2) = \sigma^2$

وبالتالي فإن: متوسط توزيع المعاينة لتباين العينة $E(S^2)$ لا يساوي تباين المجتمع σ^2 ، وهذا في حالة السحب دون إرجاع، أي : $E(S^2) \neq \sigma^2$، وبالتالي فإن التباين الذي صيغته: $S^2 = \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ يعتبر مقدِّر متحيِّز بالنسبة لتباين للمجتمع σ^2، وذلك في حالة السحب دون إرجاع. أما التباين الذي صيغته: $S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ فيعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة لتباين للمجتمع σ^2، وذلك في حالة السحب دون إرجاع.

ب- الكفاءة:

إذا كان المقدِّرين $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ غير متحيزين للمعلمة θ، فإننا نختار المقدِّر الذي له أقل تباين لأنه يعتبر مقدِّراً ذو كفاءة، فعندما يكون تباين توزيع المعاينة للمقدِّر $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين توزيع المعاينة للمقدِّر $\hat{\theta}_2$، أي: $\sigma_{\hat{\theta}_1}^2 < \sigma_{\hat{\theta}_2}^2$، فإننا نكون أكثر ثقة في المقدِّر $\hat{\theta}_1$، لأن قيمه ستكون أقرب لوسطها الحسابي وهو المعلمة المجهولة θ.

المقدِّر غير المتحيز والذي له أقل تباين من بين جميع المقدِّرات غير المتحيزة، يسمى أفضل المقدِّرات غير المتحيزة.

مثال2: إذا كان لدينا مجتمع يضم القيم: 10، 12، 14، 16، وسحبنا منه بدون إرجاع جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n = 3$. من بين المقدِّرين، المتوسط الحسابي $\bar{X}$ والوسيط M_e أيهما يعتبر أفضل مقدِّر غير متحيز بالنسبة للمتوسط الحقيقي المجهول μ.

الحل:

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع μ وتباينه σ^2:

$$\mu = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{10+12+14+16}{4} = 13 \quad . \quad \sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{(10-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2}{4} = 5$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 3$ الممكن سحبها مع الإرجاع من المجتمع ، وحساب متوسطاتها ووسيطاتها:

العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}$	الوسيط M_e
10,12,14	12	12
10,12,16	12.67	12
10,14,12	12	12
10,14,16	13.33	14
10,16,12	12.67	12
10,16,14	13.33	14
12,10,14	12	12
12,10,16	12.67	12
12,14,10	12	12
12,14,16	14	14
12,16,10	12.67	12
12,16,14	14	14
14,10,12	12	12
14,10,16	13.33	14
14,12,10	12	12
14,12,16	14	14
14,16,10	13.33	14
14,16,12	14	14
16,10,14	13.33	14
16,10,12	12.67	12
16,12,10	12.67	12
16,12,14	14	14
16,14,10	13.33	14
16,14,12	14	14

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}$)

$\bar{X}$	12	12,67	13,33	14	$\sum P_i$
P_i	6/24	6/24	6/24	6/24	1

- نقوم بحساب $\mu_{\bar{X}}$ و $\sigma^2_{\bar{X}}$ كمايلي:

$\bar{X}$	12	12,67	13,33	14	$\sum$
P_i	6/24	6/24	6/24	6/24	1
$\bar{X}_i \times P_i$	72/24	76,02/24	79,98/24	84/24	312/24
$\bar{X}_i^2 \times P_i$	864/24	963,1734/24	1066,1334/24	1176/24	4069,3068/24

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \sum \bar{X}_i \times P_i = \frac{312}{24} = 13 = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = (\sum \bar{X}_i^2 \times P_i) - \mu^2_{\bar{X}} = \frac{4069,3068}{24} - (13)^2 = 0,55$$

- إيجاد توزيع المعاينة لوسيط للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ M_e)

M_e	12	14	$\sum P_i$
P_i	12/24	12/24	1

- نقوم بحساب μ_{M_e} و $\sigma^2_{M_e}$، كمايلي:

M_e	12	14	$\sum$
P_i	12/24	12/24	1
$M_e \times P_i$	144/24	168/24	312/24
$M_e^2 \times P_i$	1728/24	2352/24	4080/24

$$\mu_{M_e} = E(M_e) = \sum M_e \times P_i = \frac{312}{24} = 13 = \mu$$
$$\sigma^2_{M_e} = (\sum M_e^2 \times P_i) - \mu^2_{M_e} = \frac{4080}{24} - (13)^2 = 1$$

بما أن: $\mu_{\bar{X}} = \mu_{M_e} = \mu = 13$، فإن كلا من المتوسط الحسابي والوسيط يعتبران مقدِّران غير متحيِّزان بالنسبة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

بما أن: $\sigma^2_{\bar{X}} < \sigma^2_{M_e}$، فإن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ يعتبر مقدِّر ذو كفاءة، لأنه تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة أقل من تباين توزيع المعاينة لوسيط العينة.

وبالتالي: يعتبر المتوسط الحسابي أفضل مقدِّر غير متحيز لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ، لأنه غير متحيز وله أقل تباين مقارنة بالوسيط.

ج-**الإتساق:** نقول أن مقدِّرا عشوائيا $\hat{\theta}$ متسقا أو تقاربيا للمعلمة المجهولة θ، إذا حقق الشرط التالي:

$$lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right] = 1$$

حيث تقرأ هذه العبارة إحصائيا، كما يلي: "نحن متأكدون أنه كلما كان حجم العينة كبيرا $(n \to \infty)$، فإن الفرق بين المقياس الحقيقي للمجتمع θ ومقدِّره على العينة $\hat{\theta}$ يساوي مقدار متناهي الصغر ε".

يمكن أن نبرهن رياضيا على خاصية الإتساق بواسطة شرطان لازمان كافيان، إذا تحققا معا، نستنتج أن المقدِّر $\hat{\theta}$ متسقا، هذان الشرطان هما:

$$\begin{cases} lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta \\ lim_{n\to\infty} \sigma^2_{\hat{\theta}} = 0 \end{cases}$$

مثال3: إذا كان لدينا مجتمع يضم علامات 10 طلبة، تباين علاماتهم يساوي5، وسحبنا منه بالإرجاع جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n = 3$. هل يمكن أن نعتبر أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ مقدِّرا متسقا للمتوسط الحقيقي μ.

الحل:

- الشرط الأول محقق دوما، لأنه مهما كان حجم العينة التي يتم سحبها فإن: $lim_{n\to\infty} E(\bar{X}) = \mu$.

- الشرط الثاني محقق دوما، لأنه عند السحب مع الإرجاع فإن: $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$، أي كلما زاد حجم العينة المسحوبة واقترب من ما لانهاية فإن المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$ يقترب من الصفر، وبالتالي: $lim_{n\to\infty} \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = 0$.

بما أن الشرطان محققان فإننا يمكن أن نعتبر أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ مقدِّرا متسقا للمتوسط الحقيقي μ.

3. استخدام طريقة المعقولية العظمى في إنشاء المقدِّر الجيد:

رأينا مما سبق أنه لكي يكون $\hat{\theta}$ المحسوب على العينة مقدِّرا جيدا لـ θ (مقياس المجتمع المجهول)، لا بد أن يكون أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسقا، ولكي ننشئ هذه التقديرات الجيدة توجد العديد من الطرق الرياضية الإحصائية، نذكر منها، طريقة المعقولية العظمى (الاحتمال الأكبر)، طريقة العزوم، وطريقة المسافة الصغرى، حيث سنكتفي بعرض طريقة المعقولية العظمى فقط، باعتبارها إحدى أهم وأكثر الطرق انتشارا في مجال التقدير.

طريقة المعقولية العظمى هي طريقة رياضية إحصائية، تهدف للحصول على مقدِّرات جيدة لمعالم المجتمع على أساس بيانات عينة عشوائية، حيث يمكن عرض الخطوات المنهجية لهذه الطريقة كما يلي:

- لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$، التي حجمها n، ولنفرض أن $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$ متغيرات عشوائية مستقلة، لكل متغير عشوائي X_i دالة كثافة احتمالية تعبر على توزيعه الاحتمالي، نرمز لها بـ $f(x_i)$، هذه الدالة تشتمل على متغير واحد مجهول، وهو X_i، بالإضافة إلى المعلمة المجهولة للمجتمع θ، والذي نسعى إلى تقديره، فتصبح $f(x_i)$ من الصيغة $f(x_i,\theta)$.

- تحديد صيغة دالة المعقولية $L(x,\theta)$: وهي عبارة عن حاصل ضرب دوال الكثافة الاحتمالية لكل المتغيرات العشوائية المشكلة للعينة، لأننا اعتبرنا أن $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$ متغيرات عشوائية مستقلة، وعليه يكون:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x,\theta)$$

- حساب المشتقة الأولى للدالة $L(x,\theta)$ بالنسبة لـ θ ومساواتها للصفر، فنحصل على معادلة ذات مجهول واحد هو θ، بحلها نحصل على صيغة θ، وللتأكد من أن $L(x,\theta)$ بلغت نهايتها العظمى عند θ، يجب ان يكون المشتق الثاني سالبا.

نلخص ذلك في ما يلي:
$$\begin{cases} \frac{\delta L(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \\ \frac{\delta^2 L(x,\theta)}{\delta\theta} < 0 \end{cases}$$

كما بينت التجربة أنه من الأفضل تحويل $L(X_i,\theta)$ إلى صيغة لوغاريتمية لكي نسهل عملية الاشتقاق، وعليه يمكن صياغة الشرطين السابقين كما يلي:
$$\begin{cases} \frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \\ \frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} < 0 \end{cases}$$

مثال4: لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \qquad x_i > 0 \qquad \theta > 0$$

المطلوب: أوجد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

الحل: نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$
$$L(x,\theta) = \theta e^{-\theta x_1} \times \theta e^{-\theta x_2} \times \dots\dots \times \theta e^{-\theta x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{1+1+\cdots+1} e^{-\theta x_1 - \theta x_2 - \cdots - \theta x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum x_i}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = ln\theta^n e^{-\theta\sum x_i} = ln\theta^n + lne^{-\theta\sum x_i} = nln\theta - \theta\sum x_i$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum x_i$$

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \sum x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$

نقوم بحساب المشتقة الثانية لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، للتأكد من أنها أقل من الصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} = \frac{-n}{\theta^2} < 0$$

مثال5: لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2}$$

المطلوب: أوجد مقدِّر المعلمة θ^2 باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

الحل: نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$

$$L(x,\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1-\mu)^2} \times \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_2-\mu)^2} \times \dots\dots \times \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_n-\mu)^2}$$

$$L(x,\theta) = \left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1-\mu)^2 - \frac{1}{2\theta^2}(x_2-\mu)^2 - \dots - \frac{1}{2\theta^2}(x_n-\mu)^2}$$

$$L(x,\theta) = \frac{1}{(\theta\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = ln\frac{1}{(\theta\sqrt{2\pi})^n} + lne^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2} = ln1 - ln\left(\theta\sqrt{2\pi}\right)^n - \frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$lnL(x,\theta) = 0 - nln\theta\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$lnL(x,\theta) = -nln\theta\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = -n\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\theta\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{4\theta}{(2\theta^2)^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\delta lnL(x_i,\theta)}{\delta\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\theta} = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^3}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^2}$$

$$\Leftrightarrow \theta^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ^2 هو: $\hat{\theta}^2 = \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{n}$

نقوم بحساب المشتقة الثانية لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، للتأكد من أنها أقل من الصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{3\theta^2}{\theta^6}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{n\theta^2}{\theta^4} - \frac{3}{\theta^4}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{n\theta^2-3\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^4}$$

كما نعلم أن: $\theta^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n} \Leftrightarrow n\theta^2 = \sum(X_i-\mu)^2$

وبالتعويض في المشتقة الثانية، نجد: $\frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} = \frac{n\theta^2-3\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^4} = \frac{n\theta^2-3n\theta^2}{\theta^4} = \frac{-2n\theta^2}{\theta^4} < 0$

خلاصة عامة:

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للمتوسط الحسابي للمجتمع μ بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هو المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\boldsymbol{\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}}$

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للنسبة الحقيقية للمجتمع P بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هي النسبة $\hat{p}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\boldsymbol{\hat{P} = \hat{p} = \frac{x}{n}}$

- المقدِّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع الإرجاع هو $\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$

- المقدِّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع عدم الإرجاع هو: $\boldsymbol{S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$

ثانيا: التقدير بمجال

يعتبر التقدير بنقطة أحد الطرق الإحصائية المستخدمة في تقدير أي معلمة مجهولة، لكن مهما كان المقدِّر المستخدم يتمتع بالمواصفات الجيدة فإننا لا نتوقع أن تكون قيمته مساوية تماما للقيمة الحقيقية المجهولة، لذلك نلجأ إلى طريقة أخرى، وهي تقدير المعالم الحقيقية للمجتمع بواسطة مجموعة من القيم، تعرض على شكل مجال.

1- تعريف التقدير بمجال:

التقدير بمجال هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة بمجموعة من القيم تعرض على شكل مجال نرمز له بـ I_n، حيث أن هذا المجال عشوائي لأنه يبنى على أساس عينة عشوائية، وبالتالي فهو مرتبط باحتمال P، يدعى درجة الثقة، التي يعبر على نسبة الحظوظ أن يكون مجال الثقة I_n يحوي معلمة المجتمع المجهولة θ، وأما الاحتمال المكمل لـ P (احتمال عدم احتواء مجال الثقة عن المعلمة المجهولة) نرمز له بالرمز α، ونسميه درجة المخاطرة.

نعبر على مجال الثقة بالعلاقة التالية: $P(\theta \in I_n) = P = 1-\alpha$، عادة ما تكون درجة الثقة P أو درجة المخاطرة α من اختيار الباحث، حسب درجة الدقة التي يبحث عليها.

نعتمد في حساب الحد الأعلى والحد الأدنى لمجال الثقة على الإحصائية المستخدمة كأفضل مقدِّر للمعلمة المجهولة، وعلى توزيع المعاينة لهذا المقدِّر وعلى خطئه المعياري، وعلى حجم العينة، وعلى معامل الثقة المرغوب فيه، حيث نقصد بمعامل الثقة احتمال احتواء مجال الثقة على المعلمة المجهولة.

فإذا رمزنا للمعلمة المجهولة بالرمز θ فإن مجال الثقة لها هو: $\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U$ ، حيث: $\hat{\theta}_L$: تمثل الحد الأدنى

لمجال الثقة، و$\hat{\theta}_U$: تمثل الحد الأقصى لمجال الثقة. وإذا رمزنا لمعامل الثقة بـ: $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$ فيعني ذلك: $P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1-\alpha$ ، أي إذا سحبنا من المجتمع كل العينات العشوائية الممكنة، ولكل عينة حسبنا مجال الثقة $[\hat{\theta}_L - \hat{\theta}_U]$ فإن نسبة الفترات التي تحتوي على المعلمة المجهولة θ تساوي $100(1-\alpha)\%$.

فمثلا: إذا كان $1-\alpha = 0,95$، فيعني ذلك: $P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 0,95$ ، أي إذا سحبنا من المجتمع كل العينات العشوائية الممكنة، ولكل عينة حسبنا مجال الثقة $[\hat{\theta}_L - \hat{\theta}_U]$ سنجد 95% من الفترات تحتوي على المعلمة المجهولة θ و5% من الفترات لا تحتوي على θ. تسمى النسبة 95% بمستوى الثقة والنسبة 5% تسمى مستوى المخاطرة.

2- التقدير بمجال للمتوسط الحسابي للمجتمع μ:

أ- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة μ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، كما يلي:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \leq \bar{X}-\mu \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \geq \mu \geq \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو: $\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$.

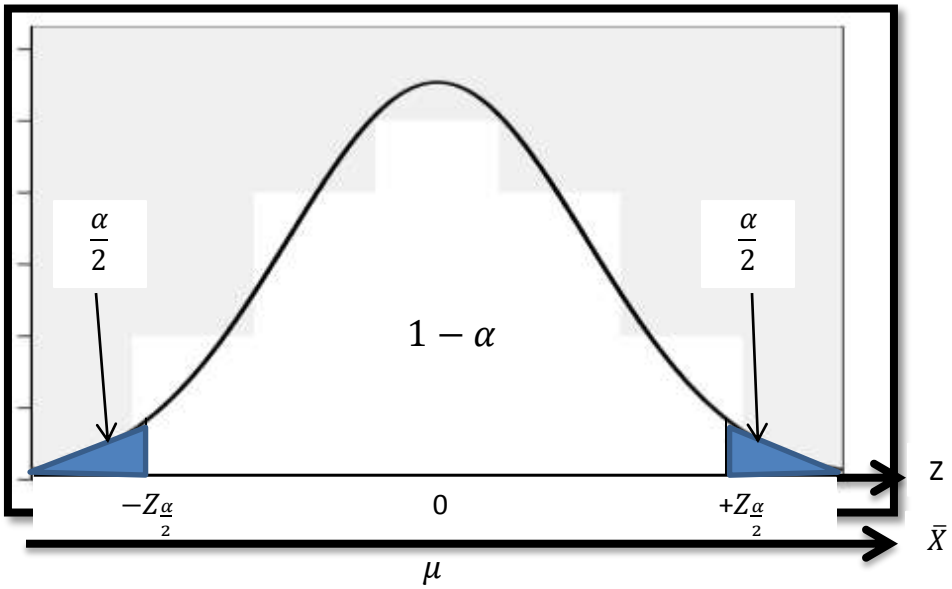
$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: قيمة نظرية تقرأ من الجدول الطبيعي المعياري بدلالة درجة المخاطرة α.

$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$: يمثل الحد الأدنى لمجال الثقة.

$\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$: يمثل الحد الأعلى لمجال الثقة.

يمكن عرض ذلك من خلال الشكل التالي:

الشكل(2-1): منحنى التوزيع الطبيعي المعياري



المصدر: إعداد الباحث

- **محور المتغير العشوائي Z:** يمثل التوزيع الطبيعي المعياري، وأن $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة المتغير Z التي يقع على يمينها $\%\left(\frac{\alpha}{2}\times 100\right)$ من المساحة، بينما $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة المتغير Z التي يقع على يسارها $\%\left(\frac{\alpha}{2}\times 100\right)$ من المساحة. كما أن المساحة ما بين $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تساوي $\%\left((1-\alpha)100\right)$، فمثلا إذا كان $\alpha = 0{,}05$ فإن قيمة المتغير Z التي يقع على يمينها $\%\left(\frac{0{,}05}{2}\times 100\right)$ أي 2,5% من المساحة هي: $+Z_{0{,}025} = +1{,}96$، وبما أن التوزيع متناظر فإن قيمة المتغير Z التي يقع على يسارها 2,5% من المساحة هي: $-Z_{0{,}025} = -1{,}96$ ، كما أن المساحة ما بين $-Z_{0{,}025}$ و $+Z_{0{,}025}$ تساوي 95%.

- **محور المتغير العشوائي $\bar{X}$:** يمثل التوزيع الطبيعي للمتوسط الحسابي للعينة. فانطلاقا من القاعدة التالية: إذا كان المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع هو μ معلوم، وقمنا باستخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي n، وحسبنا لكل عينة مجال الثقة، فإننا سنجد أن $\%\left((1-\alpha)100\right)$ من مجالات الثقة ستضم المعلمة الحقيقية للمجتمع μ. بناء على هذه القاعدة، فإذا كان μ مجهولا وأخذنا عينة عشوائية، وحسبنا مجال الثقة عند معامل الثقة $1-\alpha$ فإننا سنكون واثقين بنسبة $\%\left((1-\alpha)100\right)$ أن المجال المحصل عليه من هذه العينة سيضم المعلمة الحقيقية للمجتمع، مع مستوى مخاطرة $\%\left((\alpha)100\right)$أن يكون المجال المحصل عليه لا يضم المعلمة الحقيقية للمجتمع، لكن ونظرا لأن مستوى الثقة كبير جدا مقارنة بمستوى المخاطرة فإننا سنعتمد على هذا المجال في الدراسة.

مثال6: إذا كان لدينا متغير عشوائي X في مجتمع حجمه 500، موزع طبيعيا، وانحرافه المعياري 10، وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n بدون إرجاع. ووجدنا أن متوسطها يساوي 75. فقدِّر بمجال المتوسط الحقيقي μ للمجتمع عند مستوى ثقة 95% في الحالتين التاليتين: 1- حجم العينة: $n = 16$ 2- حجم العينة: $n = 36$

الحل:

1- حجم العينة: $n = 16$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{16}{500} = 0{,}032 < 0{,}05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2{,}5 \text{ ،} \qquad \text{وبالتالي: } \bar{X} \to N(\mu ; 2{,}5)$$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

$$\text{حيث: } 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \text{ أي: } Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$\mu \in I_n = [75 - 1{,}96(2{,}5) \;\; ; \;\; 75 + 1{,}96(2{,}5)\,] \Rightarrow \mu \in I_0 = [70{,}1 \;\; ; \;\; 79{,}9\,]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 70,1 و 79,9

2- حجم العينة: $n = 36$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{36}{500} = 0{,}072 > 0{,}05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{10}{\sqrt{36}}\sqrt{\left(\frac{500-36}{500-1}\right)} = 1{,}61 \text{ ،} \qquad \text{وبالتالي: } \bar{X} \to N(\mu ; 1{,}61)$$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

$$\text{حيث: } 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \text{ أي: } Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$\mu \in I_n = [75 - 1{,}96(1{,}61) \;\; ; \;\; 75 + 1{,}96(1{,}61)\,] \Rightarrow \mu \in I_0 = [71{,}84 \;\; ; \;\; 78{,}15\,]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 71,84 و 78,15

ب- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو: $\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال7: إذا كانت أوزان طلبة جامعة الجزائر تتوزع طبيعيا، وسحبنا منهم عينة عشوائية حجمها 36 طالبا، ووجدنا أن متوسطها يساوي 72 كلغ، وإنحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فقدِّر بمجال المتوسط الحقيقي لأوزان طلبة جامعة الجزائر μ عند مستوى ثقة 90%.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع (أوزان الطلبة) موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع غير محدود فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{36}} = 1{,}17$، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu ; 1{,}17)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}10}{2}} = Z_{0{,}05} = 1{,}64$

$$\mu \in I_n = [72 - 1{,}64(1{,}17) \;\; ; \;\; 72 + 1{,}64(1{,}17)\;] \Rightarrow \mu \in I_0 = [70{,}08 \;\; ; \;\; 73{,}92\;]$$

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأوزان طلبة جامعة الجزائر يتراوح ما بين 70,08 كلغ و 73,92 كلغ.

ج- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أقل من 30 أي: $n < 30$، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$. ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو: $\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال8: حل المثال السابق، إذا كان حجم العينة 26 طالبا.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وحجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1 = 26 - 1 = 25$

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع غير محدود فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{7}{\sqrt{26-1}} = 1{,}4$، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow T(\mu\,;\,1{,}4)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}10}{2}} = t_{0{,}05}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول

توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0,05} = 1,708$

$$\mu \in I_n = [72 - 1,708(1,4) \;\; ; \;\; 72 + 1,708(1,4)\,] \Rightarrow \mu \in I_0 = [69,61 \;\; ; \;\; 74,39\,]$$

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأوزان طلبة جامعة الجزائر يتراوح ما بين 69,61 كلغ و 74,39 كلغ.

د- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه وفقا لنظرية النهاية المركزية، إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ، وحجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي. بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي:

$$X \to N(\mu \; ; \; \sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} \; ; \sigma_{\bar{X}})$$

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1 - \alpha$، حيث $0 < 1 - \alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو: $\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$.

مثال9: إذا كانت رواتب 540 موظف في أحد الشركات لا تتوزع طبيعيا، بانحراف معياري 4573 دج، وقمنا بسحب عينة عشوائية تشمل81 موظفا من هذه الشركة بدون إرجاع، فوجد أن وسطها الحسابي يساوي 26953 دج، فقدِّر بمجال المتوسط الحقيقي لرواتب الموظفين بالشركة μ عند مستوى ثقة 99%.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} \; ; \sigma_{\bar{X}})$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{81}{540} = 0,15 > 0,05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{4573}{\sqrt{81}}\sqrt{\left(\frac{540-81}{540-1}\right)} = 468,89 \quad \text{وبالتالي:} \quad \bar{X} \rightarrow N(\mu\,; 468,89)$$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,01}{2}} = Z_{0,005} = 2,58$

$$\mu \in I_n = [26953 - 2,58(468,89) \;\; ; \;\; 26953 + 2,58(468,89)]$$

$$\mu \in I_0 = [25743,26 \;\; ; \;\; 28162,74]$$

الشرح:

لدينا 99% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 25743,26 دج و 28162,74 دج.

هـ- تحديد حجم العينة:

يمثل خطأ المعاينة أقصى انحراف ممكن أن يحصل بالزيادة أو بالنقصان بين المتوسط الحسابي المحسوب من العينة $\bar{X}$ والقيمة الحقيقية المجهولة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، وذلك انطلاقا من مستوى الثقة المحدد وحجم العينة المعتمد، فقد يكون خطأ المعاينة يساوي الصفر، وهذا في حالة تساوي كلا من المتوسط الحسابي المحسوب من العينة والقيمة الحقيقية المجهولة للمتوسط الحسابي للمجتمع، أما إذا كانا غير متساويين، فما هو أقصى انحراف ممكن أن يحصل بينهما؟

إن أقصى انحراف ممكن أن يحصل بالزيادة أو بالنقصان بين المتوسط الحسابي المحسوب من العينة $\bar{X}$ والقيمة الحقيقية المجهولة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، يكون عندما يساوي المتوسط الحسابي للمجتمع الحد الأعلى أو الحد الأدنى لمجال الثقة، أي: $\mu = \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$ أو $\mu = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$، في هذه الحالة فإن:

$$\begin{cases} \mu = \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \\ \mu = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} - \mu = +Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \\ \bar{X} - \mu = -Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - \mu = \mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{d = \mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}}$$

حيث: d: تمثل خطأ المعاينة. وأن الإشارة $\mp$ تدل الزيادة أو النقصان.

وبالتالي فإنه يمكن كتابة العبارة السابقة بالصيغة التالية: $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$، وهي تمثل أقصى انحراف ممكن بين $\bar{X}$ و μ إما بالزيادة أو بالنقصان.

كما نعلم أن طول مجال الثقة نقوم بحسابه عن طريق الفرق بن الحدين الأعلى والأدنى لمجال الثقة ، أي:

$$\Delta I_n = \left(\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) - \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} - \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = 2Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = d \Rightarrow \boldsymbol{d = \frac{\Delta I_n}{2}}$$

أي أن خطأ المعاينة يساوي نصف طول مجال الثقة. وعليه فإنه كلما كان خطأ المعاينة كبيرا كلما زاد مجال الثقة، وبالتالي تقل دقة التقدير، والعكس صحيح، ولجعل مجال الثقة صغيرا، يحدد الباحث مستوى ثقة معين ثم يتحكم في طول مجال الثقة بتغيير حجم العينة n. لأننا نعلم أنه في حالة السحب بالإرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، وبما أن n تقع في المقام فإنه

كلما زادت قيمتها أي حجم العينة، فإن ذلك يؤدي إلى تخفيض قيمة المقدار $\sigma_{\bar{X}}$، وبالتالي تصغير طول مجال الثقة، والعكس صحيح.

يمكن ايجاد حجم العينة المناسب، انطلاقا من مستوى الثقة المحدد وخطأ المعاينة المطلوب، انطلاقا من صيغة خطأ المعاينة $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$، وذلك حسب الحالات السابقة التي ذكرت في توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم:

- حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{d}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{n}\right)^2 = \left(Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{d}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2}{d^2}}$$

- حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2.N}{N.d^2 - d^2 + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2}}$$

ملاحظة: يمكن تطبيق الحالات نفسها، إذا كان المتغير X في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30.

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر أو يساوي 30:

-حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: $\quad d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}{d^2}}$

- حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2.N}{N.d^2 - d^2 + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}}$$

- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30:

-حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: $\quad d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}{d^2} + 1}$

- حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{N.d^2 - d^2 + t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2.N}{N.d^2 - d^2 + t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}}$$

مثال10: أجريت دراسة إحصائية حول أجور عمال أحد المؤسسات، بواسطة عينة حجمها $n = 26$، سحبت بدون إرجاع. بعد جمع البيانات تبين أن الأجر المتوسط الشهري يقدر بـ 12500دج، بانحراف معياري قدره 140دج.

إذا علمت أن أجور العمال بالشركة تتوزع طبيعيا، وأن عدد العمال الإجمالي بالشركة هو 400 عامل.

1- أعط تقديرا نقطيا غير منحاز للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة.

2- أعط تقديرا بمجال للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة عند مستوى ثقة 90% ثم 95% ثم 99%. ماذا تستنتج؟

3- ما هو خطأ المعاينة المرتكب في تقدير الأجر المتوسط الحقيقي عند مستوى ثقة 95%. اشرح النتيجة؟

4- إذا أردنا تحسين دقة التقدير بـ 50%، ما هو حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف عند مستوى ثقة 95%؟

الحل: $n = 26$ ، $\bar{X} = 12500\ DA$ ، $s = 140\ DA$

1- إعطاء تقديرا نقطيا غير منحاز للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 12500\ DA$$

2- إعطاء تقديرا بمجال للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة عند مستوى ثقة 90% ثم 95% ثم 99%:

- المتغير العشوائي X (أجور العمال) في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وحجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = n - 1 = 26 - 1 = 25$$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{26}{400} = 0{,}065 > 0{,}05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{140}{\sqrt{26-1}}\sqrt{\left(\frac{400-26}{400-1}\right)} = 27{,}11 \quad \text{وبالتالي:} \quad \bar{X} \rightarrow N(\mu\,;27{,}11)$$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

أ- مستوى ثقة 90%:

$$1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10 \quad \text{أي:} \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}10}{2}} = t_{0{,}05}$$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}05} = 1{,}708$

$$\mu \in I_n = [12500 - 1{,}708(27{,}11) \;\; ; \;\; 12500 + 1{,}708(27{,}11)\,]$$
$$\Rightarrow \mu \in I_0 = [12453{,}70 \;\; ; \;\; 12546{,}30\,]$$

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأجور العمال بالشركة يتراوح ما بين 12453,70 دج و 12546,30 دج.

ب- مستوى ثقة 95%:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \quad \text{أي:} \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025}$$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}060$

$$\mu \in I_n = [12500 - 2{,}060(27{,}11) \;\; ; \;\; 12500 + 2{,}060(27{,}11)\,]$$

$$\Rightarrow \mu \in I_0 = [12444{,}15 \ ; \ 12555{,}85\ ]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأجور العمال بالشركة يتراوح ما بين 12444,15 دج و 12555,85 دج.

ب- مستوى ثقة 99%:

$$1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \quad \text{أي:} \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}01}{2}} = t_{0{,}005}$$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 0,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n-1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}787$

$$\mu \in I_n = [12500 - 2{,}787(27{,}11) \ ; \ 12500 + 2{,}787(27{,}11)\ ]$$
$$\Rightarrow \mu \in I_0 = [12424{,}44 \ ; \ 12575{,}55\ ]$$

الشرح: لدينا 99% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأجور العمال بالشركة يتراوح ما بين 12424,44 دج و 12575,55 دج.

- الاستنتاج: من خلال مجالات الثقة السابقة نلاحظ أن أطوالها تزيد كلما زاد مستوى الثقة مع ثبات حجم العينة.

- مجال الثقة عند مستوى الثقة 90% يساوي: $\Delta I_0 = 12546{,}30 - 12453{,}70 = 92{,}6\ DA$
- مجال الثقة عند مستوى الثقة 95% يساوي: $\Delta I_0 = 12555{,}85 - 12444{,}15 = 111{,}7\ DA$
- مجال الثقة عند مستوى الثقة 99% يساوي: $\Delta I_0 = 12575{,}55 - 12424{,}44 = 151{,}11\ DA$

وبالتالي نستنتج أن العلاقة بين مستوى الثقة وطول مجال الثقة هي علاقة طردية، فكلما زاد مستوى الثقة زاد طول المجال وبالتالي تنقص دقة التقدير، والعكس صحيح.

3- خطأ المعاينة المرتكب في تقدير الأجر المتوسط الحقيقي عند مستوى ثقة 95%، مع شرح النتيجة:

بما أن المتغير X في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30، وحجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = 2{,}060 \times \frac{140}{\sqrt{26-1}}\sqrt{\left(\frac{400-26}{400-1}\right)} = \mp 55{,}8$$

كما يمكن ايجادها من خلال العلاقة: $d = \frac{\Delta I_0}{2} = \frac{111{,}7}{2} = \mp 55{,}8$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع المقدار 55,8 دج بالزيادة أو بالنقصان.

4- إذا أردنا تحسين دقة التقدير بـ 50%، حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف عند مستوى ثقة 95%:

تحسين دقة البيانات بـ 50%، يعني أن تصبح $d = \mp 55{,}8\left(\frac{50}{100}\right) = \mp 27{,}9$

يمكن إيجاد قيمة n من خلال الصيغة التالية:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow n = \frac{N.d^2 - d^2 + t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2.N}{N.d^2 - d^2 + t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2} = \frac{400(27{,}9)^2 - (27{,}9)^2 + (2{,}060)^2(140)^2(400)}{400(27{,}9)^2 - (27{,}9)^2 + (2{,}060)^2(140)^2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{33580409{,}59}{393760{,}15} = 85{,}28 \approx 86$$

2- التقدير بمجال للفرق ما بين متوسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_1 - \mu_2$:

2-1- إذا كان المجتمعين مستقلين (العينتين المسحوبتين غير مرتبطتين):

أ- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$

- نختار معامل ثقة معين $1 - \alpha$، حيث $0 < 1 - \alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_1 - \mu_2$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، فنحصل على:

$$P\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}\right) = 1 - \alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \;\; ; \;\; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$

مثال11: إذا كانت الأجور الشهرية لـ 600 عاملا في الشركة A تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي μ_A، وانحراف معياري 4500 دج، والأجور الشهرية لـ 800 عاملا في الشركة B تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي μ_B، وانحراف معياري 4200 دج، وسحبنا عينتين مستقلتين بدون إرجاع، العينة الأولى من الشركة A، حجمها 25 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 30000 دج، والعينة الثانية من الشركة B حجمها 36 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 29400 دج.

- أعط تقديرا بنقطة ثم بمجال للفرق ما بين متوسطي الأجرين الحقيقيين في الشركتين عند مستوى ثقة 95%.

الحل:

لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل الأجور الشهرية للعمال.

الشركة *A*: X: يتوزع طبيعيا ، $N_A = 600$ ، $\bar{X}_A = 30000\ DA$ ، $\sigma_A = 4500\ DA$ ، $n_A = 25$

الشركة *B*: X: يتوزع طبيعيا ، $N_B = 800$ ، $\bar{X}_B = 29400\ DA$ ، $\sigma_B = 4200\ DA$ ، $n_B = 36$

1- التقدير بنقطة للفرق ما بين متوسطي الأجرين الحقيقيين في الشركتين:

$$\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B = \bar{X}_A - \bar{X}_B = 30000 - 29400 = 600\ DA$$

2- التقدير بمجال للفرق ما بين متوسطي الأجرين الحقيقيين في الشركتين عند مستوى ثقة 95%:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (الأجور الشهرية للعمال) يتوزع طبيعيا في كلا الشركتين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، أي: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\,;\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين هو: $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B$ مجهول.

- بما أن حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع،

$\frac{n_A}{N_A} = \frac{25}{600} = 0{,}042 < 0{,}05$ و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$ ، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{25} + \frac{(4200)^2}{36}} = 1140{,}175\ DA$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(\mu_A - \mu_B\ ;\ 1140{,}175)$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ;\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = [600 - 1{,}96(1140{,}175)\ ;\ 600 + 1{,}96(1140{,}175)\ ]$$
$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [-1634{,}743\ ;\ 2834{,}743\ ]$$

ب- إذا كان المتغير العشوائي المدروس لا يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين، بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما لا يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$.

هذه الحالة تنطبق على الحالة السابقة، وبالتالي يتم معالجتها مثلما عالجنا الحالة أ.

ج- إذا كان الانحرافين المعياريين σ_1 و σ_2 مجهولين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه

المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}.$$

هذه الحالة تنطبق على الحالة السابقة، وبالتالي يتم معالجتها مثلما عالجنا الحالتين أ ، ب، مع تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2، كما يلي:

$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$.

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

ملاحظة: بالنسبة لطبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين في هذه الحالة، فهي تصلح بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمعين سواء أكانا طبيعيين أو غير طبيعيين.

د- إذا كان المتغير المدروس يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين بانحرافين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير:

د-1- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما موزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وكان الانحرافين المعيارين المجهولين متساويين، أي: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، وسحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين حجم إحداهما على الأقل صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n_1 + n_2 - 2$، ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$

- نختار معامل ثقة معين $1 - \alpha$، حيث $0 < 1 - \alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_1 - \mu_2$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، فنحصل على:

$$P\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right) = 1 - \alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0,05$. حيث: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0,05$

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع. $S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

د-2- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، أي $\boldsymbol{\sigma_1 \neq \sigma_2}$:

نقوم ببناء مجال الثقة باتباع نفس الحلات الواردة في د-1، مع استبدال درجة الحرية بالمقدار: $v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0,05$.

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0,05$

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال12: أستخدمت طريقتان لإنتاج سلعة معينة، حيث توضح المعطيات التالية الوقت بالدقائق المستغرق في إنتاج الوحدة بالنسبة لـ 6 وحدات أنتجت بالطريقة الأولى، و5 وحدات أنتجت بالطريقة الثانية، حيث X_1 يمثل الوقت المستغرق عند إستعمال الطريقة الأولى، وX_2 يمثل الوقت المستغرق عند استعمال الطريقة الثانية:

$$\bar{X}_1 = 50 \qquad \bar{X}_2 = 52 \qquad S_1^2 = 80 \qquad S_2^2 = 84{,}5$$

إذا علمت أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا، فقدِّر بمجال الفرق ما بين متوسطي الوقتين الحقيقيين لإنتاج هذه السلعة، عند مستوى ثقة 95%، في الحالتين التاليتين:

1- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين متساويين.

2- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين غير متساويين.

الحل:

التقدير بمجال للفرق ما بين متوسطي الوقتين الحقيقيين لإنتاج هذه السلعة، عند مستوى ثقة 95%:

1- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين متساويين:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (الوقت المستغرق للإنتاج) يتوزع طبيعيا في كلا الطريقتين، بانحرافين معياريين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتين وصغيرتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2 = 9$ أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to T_{v=9}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$،

- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين هو: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ مجهول.

- بما أن الانحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين، فسنقوم بتقديرهما بنفس المقدِّر، بالاعتماد على التباين المشترك، الذي يرمز له بالرمز S_p^2، حيث: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(6-1)\times 80 + (5-1)\times 84{,}5}{6+5-2} = \frac{400+338}{9} = 82$

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{82\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = 5{,}48،$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \;\; ; \;\; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025} = 2{,}262$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = [(50 - 52) - 2{,}262(5{,}48) \;\; ; \;\; (50 - 52) + 2{,}262(5{,}48)\,]$$
$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [-14{,}39 \;\; ; -10{,}39\,]$$

2- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين غير متساويين:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (الوقت المستغرق للإنتاج) يتوزع طبيعيا في كلا الطريقتين، بانحرافين معياريين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتين وصغيرتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{80}{6}+\frac{84,5}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{80}{6}\right)^2}{6-1}+\frac{\left(\frac{84,5}{5}\right)^2}{5-1}} = \frac{914,05}{35,55+71,40} = 8,54 \approx 9$،

أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow T_{v=9}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$.

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{80}{6}+\frac{84,5}{5}} = 5,50$$،

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \;\; ; \;\; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,05}{2}} = t_{0,025} = 2,262$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = [(50-52) - 2,262(5,50) \;\; ; \;\; (50-52) + 2,262(5,50)\,]$$
$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [-14,44 \;\; ; -10,44\,]$$

2-2- إذا كان المجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين):

نعلم أنه كان لدينا مجتمعين، المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في كليهما، أي: $X_1 \rightarrow N(\mu_1 \; ; \; \sigma_1)$ و $X_2 \rightarrow N(\mu_2 \; ; \; \sigma_2)$، وسحبنا كل العينات المتناظرة في المجتمعين، وقمنا بحساب الفروق بين القيم D_i في كل عينتين متناظرتين، حيث: $D_i = X_{1i} - X_{2i}$، أي نحصل على عينات جديدة تمثل عينات الفروق بين القيم المتناظرة، متوسطها الحسابي في كل عينة جديدة هو $\bar{D}$، فإن توزيع المعاينة لهذه الفروق $\bar{D}$ يكون كما يلي:

أ- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n \geq 30$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_{\bar{D}}$ بمجال، بإخراج باقي العناصر، فنحصل على:

$$P\left(\bar{D} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}} \leq \mu_{\bar{D}} \leq \bar{D} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_{\bar{D}}$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{D}} \in I_n = \left[\bar{D} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \bar{D} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}\right]}$$

حيث: $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$

أ- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n < 30$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}}$ ، درجة حرية: $v = n-1$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_{\bar{D}}$ بمجال، بإخراج باقي العناصر، فنحصل على:

$$P\left(\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} \leq \mu_{\bar{D}} \leq \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_{\bar{D}}$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{D}} \in I_n = \left[\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}\right]}$$

حيث: $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$

مثال13: متوسط الفروق للكميات المباعة من سلعة معينة من طرف 7 محلات تجارية أختيروا عشوائيا، وذلك قبل القيام بحملة إعلانية عن هذه السلعة وبعدها، هو 3، أي: $\bar{D} = 3$، بانحراف معياري قدره 5,8 أي: $s_{D_i} = 5,8$.

بافتراض أن المجتمعين موزعين طبيعيا، قدِّر بمجال المتوسط الحقيقي $\mu_{\bar{D}}$، عند مستوى ثقة 90%.

الحل:

بما أن المجتمعين موزعين طبيعيين والعينتين مرتبطتين وحجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة للفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n-1 = 7-1 = 6$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}}$

حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} = \frac{5,8}{\sqrt{7-1}} = 2,37$

و $1-\alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,10}{2}} = t_{0,05} = 1,943$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_{\bar{D}}$ هو: $\mu_{\bar{D}} \in I_n = \left[\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}\right]$

$$\mu_{\bar{D}} \in I_n = [3 - 1,943.(2,37) \quad ; \quad 3 + 1,943.(2,37)]$$

$$\mu_{\bar{D}} \in I_0 = [-1,60 \quad ; \quad 7,60]$$

3- التقدير بمجال لنسبة العينة P:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا متغيرعشوائي مدروس في مجتمع ما، وحجم العينة المسحوبة كبيرا، أي: $n \geq 30$، فتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-\mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة P بمجال، بإخراج باقي العناصر ، كما يلي:

$$P\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \leq P \leq \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ P هو: $\boldsymbol{P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \;\; ; \;\; \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]}$

حيث: $\sigma_{\hat{p}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة العينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

مثال14: يبلغ عدد عمال إحدى الشركات 800 عاملا، سحبنا منهم عينة عشوائية دون إرجاع تشمل 36 عاملا، ووجدنا أن منهم 9 عمال أعمارهم تقل عن 30 سنة. قدِّر بمجال النسبة الحقيقية للعمال التي تقل أعمارهم عن 30 سنة بالشركة، عند مستوى ثقة 99%.

الحل:

بما أن حجم العينة كبير، فإن مجال الثقة لـ P هو: $P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \;\; ; \;\; \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$

- نسبة العمال الذين أعمارهم تقل عن 30 سنة في العينة: $\hat{p} = \frac{9}{36} = 0{,}25 = 25\%$

- نسبة العمال الذين أعمارهم تساوي أوتفوق 30 سنة في العينة: $\hat{q} = \frac{27}{36} = 0{,}75 = 75\%$

- السحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$، وعليه فإن: $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25\times 0{,}75}{36}} = 0{,}072$

حيث: $1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 2{,}58$

$$P \in I_n = [0{,}25 - 2{,}58(0{,}072) \;\; ; 0{,}25 + 2{,}58(0{,}072)]$$

$$P \in I_0 = [0{,}06 \;\; ; 0{,}44]$$

4- التقدير بمجال للفرق ما بين نسبتي عينتين $P_1 - P_2$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا منهما عينتين كبيرتي الحجم، أي: $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فوفقا لنظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$:

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $P_1 - P_2$ بمجال، بإخراج باقي العناصر، كما يلي:

$$P\left((\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ P هو:

$$\boldsymbol{P_1 - P_2 \in I_n = \left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \;\; ; (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\hat{p}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N} \leq 0{,}05$

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N}$، $\frac{n_2}{N}$ أحدهما أو كليهما أكبر من 0,05

مثال15: سحبت عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى تحتوي على 100 طالب فوجد بها 8 طلبة قامتهم تفوق 190سم، والثانية تحتوي على 150 طالبة فوجد بها 4 طالبات تفوق قامتهن 190سم. قدِّر بمجال الفرق الحقيقي بين نسبة الطلبة الذين تفوق قامتهم 190سم ونسبة الطالبات التي تفوق قامتهن 190سم، عند مستوى ثقة 90%.

الحل:

بما أن العينتان العشوائيتان مستقلتان، و $n_1 = 100 > 30$ و $n_2 = 150 > 30$، فإن مجال الثقة لـ P هو:

$$P_1 - P_2 \in I_n = \left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \;\; ; (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$$

- عينة الطلبة: $\hat{p}_1 = \frac{8}{100} = 0{,}08$, $\hat{q}_1 = \frac{92}{100} = 0{,}92$

- عينة الطالبات: $\hat{p}_2 = \frac{6}{150} = 0{,}04$, $\hat{q}_2 = \frac{144}{100} = 0{,}96$

- المجتمع غير محدود، وعليه فإن: $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}}=\sqrt{\frac{0,08\times0,92}{100}+\frac{0,04\times0,96}{150}}=0,031$

حيث: $1-\alpha=0,90\Rightarrow\alpha=0,10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{\frac{0,10}{2}}=Z_{0,05}=1,64$

$$P_1-P_2\in I_n=[(0,08-0,04)-1,64(0,031)\ ;\ (0,08-0,04)+1,64(0,031)]$$
$$P_1-P_2\in I_n=[0,04-1,64(0,031)\ ;\ 0,04+1,64(0,031)]$$
$$P_1-P_2\in I_0=[-0,01\ ;\ 0,09]$$

5- التقدير بمجال لتباين العينة σ^2:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في مجتمع ما، تباينه σ^2 معلوم، فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v=n-1$. أي: $S^2\rightarrow\chi^2_{v=n-1}$. والإحصائية الملائمة هي:

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0<1-\alpha<1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq\chi^2\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\leq\sigma^2\leq\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)=1-\alpha$$

- تقدير قيمة σ^2 بمجال، بإخراج باقي العناصر، كما يلي:

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ σ^2 هو: $\boldsymbol{\sigma^2\in I_n=\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\ ;\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]}$

- أما مجال الثقة للانحراف المعياري للمجتمع، فهو: $\boldsymbol{\sigma\in I_n=\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}}\ ;\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right]}$

مثال16: إذا علمت أن أوزان علب الطماطم ذات وزن 500 غرام في أحد المصانع تتوزع طبيعيا، وسحبنا عينة عشوائية حجمها 10 علب، فوجدنا أن انحرافها المعياري هو 4 غرام. فقدِّر بمجال كلا من التباين والانحراف المعياري لأوزان علب الطماطم بالمصنع، عند مستوى الثقة 95%.

الحل:

بما أن أوزان علب الطماطم ذات وزن 500 غرام بالمصنع موزعة طبيعيا فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v=n-1=10-1=9$، أي: $s^2\rightarrow\chi^2_9$

وبالتالي يكون مجال الثقة لـ σ^2 هو: $\sigma^2\in I_n=\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\ ;\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$

حيث نبحث عن القيمتين $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

$$1-\alpha=0,95\Rightarrow\alpha=0,05 \quad \text{أي:} \quad \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\chi^2_{\left(\frac{0,05}{2}\right)}=\chi^2_{(0,025)}$$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية $v=n-1=9$ ، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,025)}=19,023$ ،

$$1-\alpha=0,95\Rightarrow\alpha=0,05 \quad \text{أي:} \quad \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}=\chi^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right)}=\chi^2_{(1-0,025)}=\chi^2_{(0,975)}$$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجة حرية $v=n-1=9$ ، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,975)}=2,700$

$$\sigma^2\in I_n=\left[\frac{(10-1)(4)^2}{19,023}\ ;\ \frac{(10-1)(4)^2}{2,700}\right]=>\sigma^2\in I_0=[7,57\ ;\ 53,33\ ]$$

مجال الثقة لـ σ هو:

$$\sigma\in I_n=\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}}\ ;\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right]=\left[\sqrt{7,57}\ ;\ \sqrt{53,33}\ \right]=[2,75\ ;\ 7,30\ ]$$

6- التقدير بمجال لنسبة تباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وموزع طبيعيا في كليهما، فإن توزيع المعاينة لنسبة تباين عينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية: $v_1=n_1-1$ و $v_2=n_2-1$، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2}\to F_{v_1,v_2}$

بما أن طبيعة توزيع $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو توزيع فيشر، فإنه يحول إلى F كما يلي: $F=\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$،

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0<1-\alpha<1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}\le F\le F_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\le F_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)=1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ بمجال، بإخراج باقي العناصر، كما يلي:

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\in I_n=\left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}}\ ;\ \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

مثال17: أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 8 و9 من مجتمعين طبيعيين، فوجد أن تبايناهما على التوالي 20 و36. قدِّر بمجال لنسبة تباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، عند مستوى الثقة 95%.

الحل:

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للنسبة ما بين تباينين يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية:

$v_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$ و $v_2 = n_2 - 1 = 9 - 1 = 8$، أي: $\frac{s_1^2}{s_2^2} \rightarrow F_{(7\ ,\ 8)}$

وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}} \ ; \ \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right]$

حيث نبحث عن القيمتين $F_{\frac{\alpha}{2}}$ و $F_{1-\frac{\alpha}{2}}$ كما يلي:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{\frac{0{,}05}{2}} = F_{0{,}025}$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجتي حرية: $v_1 = 7$ و$v_2 = 8$، وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{0{,}025} = 4{,}53$ ،

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $F_{1-0{,}025} F_{1-\frac{\alpha}{2}} = F_{1-\frac{0{,}05}{2}} = F_{0{,}975} =$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجتي حرية: $v_1 = 7$ و$v_2 = 8$، وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{(0{,}975)} = \frac{1}{F_{(0{,}025)}}$

مع ملاحظة أنه يجب عكس درجات الحرية عند استخراج القيمة $F_{(0{,}025)}$ فتصبح $v_1 = 8$، $v_2 = 7$

$$F_{(0{,}975)} = \frac{1}{F_{(0{,}025)}} = \frac{1}{4{,}9} = 0{,}20$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{20}{36}}{4{,}53} \ ; \ \frac{\frac{20}{36}}{0{,}20} \right] \Rightarrow \sigma^2 \in I_0 = [0{,}12 \ ; \ 2{,}78\ ]$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- فيما تتمثل مهمة نظرية التقدير.

2- يمكن التمييز بين نوعين من التقدير، أذكرهما مع الشرح.

3- ما هي أهم المقاييس الإحصائية موضوع التقدير في الدراسات الإحصائية؟ ما هي مقدراتها بواسطة العينة؟

التمرين الثاني:

لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} & 0 < x < 1 \\ f(x,\theta) = 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- أوجد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

التمرين الثالث:

لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع يتبع توزيع بواسون، دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي: $f(x,\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$

- أوجد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

التمرين الرابع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

ليكن المتغير العشوائي X يتبع قانون طبيعي، الإنحراف المعياري للمجتمع معلوم ويساوي 4. ندرس هذه الخاصة X على عينة حجمها $n = 25$. بعد جمع البيانات تم حساب المتوسط الحسابي فوجد أنه يساوي 20.

1- ما هو التقدير النقطي للمتوسط الحسابي للمجتمع μ؟

2- أعط تقديرا بمجال لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95%.

3- ما هو خطأ المعاينة في تقدير μ؟

4- ما هو حجم العينة اللازم إذا أردنا أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير μ الهامش $d = \mp 0{,}5$؟

5- بفرض أن الإنحراف المعياري للمجتمع مجهولا، ما هو مجال الثقة لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95% في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة $n = 100$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 3564$

ب- حجم العينة $n = 17$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 1176$

التمرين الخامس: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

أولا- يعتبر طول أقطار الأنابيب المعدنية التي تنتجها آلة صناعية متغيرا عشوائيا من أنبوب إلى آخر في أحد المؤسسات، أخذت عينة من 10 أنابيب من الإنتاج وتم قياس طول قطرها بدقة فكانت النتائج التالية (بالسنتمتر):

رقم الأنبوب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طول قطر الأنبوب X_i	2	1,9	3,0	1,84	1,95	1,99	2,07	2,1	2,09	1,96

إذا علمت أن أطوال أقطار الأنابيب بالمصنع تتوزع طبيعيا، وأن: $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 0{,}9801$

1- قدِّر نقطيا كلا من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع.

2- قدِّر بمجال المتوسط الحسابي للمجتمع μ بمستوى ثقة 95%.

3- قدِّر بمجال الإنحراف المعياري للمجتمع σ بمستوى ثقة 95%.

ثانيا- بغرض مراقبة نسبة المعيب من الأنابيب المعدنية بالمؤسسة، تم سحب عينة جديدة حجمها 80 أنبوبا فوجد بها 4 أنابيب معيبة.

1- قدر بنقطة ثم بمجال نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%.

2- ما هو خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%؟

3- ما هو حجم العينة اللازم لو أردنا تخفيض خطأ المعاينة بالربع عند مستوى الثقة 90%.

التمرين السادس:

لمقارنة متوسط أطوال نوع معين من الأنابيب المنتجة من المصنع (1) بأطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (2)، سحبنا عينة عشوائية من المصنع (1) تحتوي على 20 أنبوبة، فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3,8 سم، وسحبنا عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى من المصنع (2) تحتوي على 25 أنبوبة، فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3,2 سم، فإذا كانت أطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (1) تتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0,81، وأطوال الأنابيب المنتجة في المصنع (2) تتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0,64.

أعط تقديرا بمجال بمستوى ثقة يساوي 90% للفرق بين متوسطي الأطوال في المصنعين $\mu_1 - \mu_2$.

التمرين السابع:

مجتمعان يتوزعان طبيعيا، سحبنا منهما عينتين صغيرتين وغير متساويتين في الحجم $(n_1 > n_2)$، فوجدنا أن المتوسط الحسابي للعينة الأولى هو 4 بينما المتوسط الحسابي للعينة الثانية هو 3. إذا علمت أن فترة الثقة بمستوى 95% للفرق ما بين المتوسطين الحقيقيين $\mu_1 - \mu_2$ محصور ما بين (-3,72) و (5,72)، وأن التباين المشترك $s_p^2 = 20,8$، أما درجة الحرية فهي 15. ما هو حجم العينتين اللتين أجريتا عليهما الدراسة، علما أن تبايني المجتمعين متساويين؟

التمرين الثامن:

إذا اخترنا عشوائيا 500 طالب من طلبة جامعة المسيلة، ووجدنا أن 180 منهم يملكون هواتف نقالة، فَقَدِّرْ بنقطة نسبة الطلبة الذين يملكون هواتف نقالة في جامعة المسيلة ككل، ثم قَدِّرْ بمجال هذه النسبة باستخدام مستوى الثقة 99%.

التمرين التاسع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

سحبت عينتان عشوائيتان مستقلتان مع الإرجاع، الأولى تحتوي على 120 وحدة منتجة بالآلة (1) فوجد بها 6 وحدات معيبة، والثانية تحتوي على 200 وحدة منتجة بالآلة (2) فوجد بها 9 وحدات معيبة.

- قَدِّر الفرق بين نسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للألة (1) ونسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للآلة (2) وذلك باستخدام مستوى الثقة 95%.

التمرين العاشر:

إذا علمت أن درجات طلبة المرحلة الثانوية في مادة الرياضيات تتوزع طبيعيا، وسحبنا من طلبة هذه المرحلة عينة عشوائية تحتوي على 10 طلبة، فكانت درجاتهم كما يلي:

40 , 72 , 50 , 65 , 55 , 38 , 81 , 49 , 67 , 69

أ- قَدِّرْ بنقطة التباين والانحراف المعياري.

ب- قَدِّرْ بمجال التباين والانحراف المعياري بمستوى الثقة 99%.

التمرين الحادي عشر: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

إذا علمت أن مجتمع أطوال الطالبات ومجتمع أطوال الطلبة في جامعة المسيلة يتبع التوزيع الطبيعي، وسحبنا من الطالبات عينة عشوائية تشمل 25 طالبة، ومن الطلبة عينة تشمل 21 طالبا، وكانت العينتان مستقلتين، ووجدنا أن تباين أطوال عينة الطالبات يساوي 64، وتباين أطوال عينة الطلبة يساوي 36. أوجد فترة الثقة لنسبة تباين مجتمع أطوال الطالبات إلى تباين مجتمع أطوال الطلبة، وذلك باستخدام مستوى الثقة 95%.

الحلول

حل التمرين الأول:

1- تتمثل مهمة نظرية التقدير في: البحث عن أحسن وأدق **المقدِّرات** للمقاييس الحقيقية للمجتمع انطلاقا من نتائج العينة العشوائية، رياضيا، عملية التقدير تعني السعي إلى بناء إحصائية عينة تعبر بأكبر قدر ممكن من الدقة على مقاييس المجتمع، باستعمال معطيات العينة.

2- يمكن التمييز بين نوعين من التقدير، هما:

أ- **التقدير بنقطة:** يعني تقدير معالم المجتمع المجهولة بقيمة واحدة (قيمة نقطية)، حيث يمكن إعطاء العديد من التقديرات النقطية للمعالم الحقيقية للمجتمع، انطلاقا من معطيات العينة، لكن نظرية التقدير تسعى إلى البحث على أحسن وأدق المقدِّرات، لأنها في كل الأحوال تحتوي على هامش من الخطأ، نظرا لكونها محسوبة من بيانات عينة وليس من بيانات المجتمع، حيث يدعى هذا الخطأ بالخطأ العشوائي، رياضيا وإحصائيا، البحث على أدق مقدِّر يعني توفر جملة من المواصفات الرياضية والإحصائية في هذا المقدِّر، وهي: عدم التحيز، الكفاءة، والإتساق.

ب- **التقدير بمجال:** هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة بمجموعة من القيم تعرض على شكل مجال نرمز له بـ I_n، حيث أن هذا المجال عشوائي لأنه يبنى على أساس عينة عشوائية، وبالتالي فهو مرتبط باحتمال P، يدعى درجة الثقة، التي يعبر على نسبة الحظوظ أن يكون مجال الثقة I_n يحوي معلمة المجتمع المجهولة θ، وأما الاحتمال المكمل لـ P (احتمال عدم احتواء مجال الثقة عن المعلمة المجهولة) نرمز له بالرمز α، ونسميه درجة المخاطرة.

3- أهم المقاييس الإحصائية موضوع التقدير في الدراسات الإحصائية، ومقدراتها بواسطة العينة:

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للمتوسط الحسابي للمجتمع μ بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هو المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للنسبة الحقيقية للمجتمع P بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هي النسبة $\hat{p}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\hat{P} = \hat{p} = \frac{x}{n}$

- المقدِّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع الإرجاع هو $S^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

- المقدِّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع عدم الإرجاع هو: $S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

حل التمرين الثاني:

لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} & 0 < x < 1 \\ f(x,\theta) = 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- إيجاد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى:

نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$

$$L(x,\theta) = \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \times \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} \times \dots\dots \times \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n}(1-\theta)^{1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n}(1-\theta)^{(1+1+\cdots+1)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = ln\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = (\sum x_i)ln\theta + (n-\sum x_i)ln(1-\theta)$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n-\sum x_i}{1-\theta}$$
$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n-\sum x_i}{1-\theta} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} = \frac{n-\sum x_i}{1-\theta}$$
$$\Leftrightarrow \sum x_i - \theta\sum x_i = n\theta - \theta\sum x_i$$
$$\Leftrightarrow \sum x_i = n\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$

<u>حل التمرين الثالث:</u>

لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع يتبع توزيع بواسون، دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي: $f(x,\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$

- إيجاد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى:

نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$
$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{x_1}}{x_1!}e^{-\theta} \times \frac{\theta^{x_2}}{x_2!}e^{-\theta} \times \dots\dots \times \frac{\theta^{x_n}}{x_n!}e^{-\theta}$$
$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n}}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-(\theta+\theta+\cdots+\theta)}$$
$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}e^{-n\theta}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = (\sum x_i)ln\theta - ln\prod x_i! - n\theta lne = (\sum x_i)ln\theta - ln\prod x_i! - n\theta$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - n$$
$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} - n = 0$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$

حل التمرين الرابع:

1- التقدير النقطي للمتوسط الحسابي للمجتمع μ: $\hat{\mu} = \bar{X} = 20$

2- إعطاء تقديرا بمجال لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95%:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم $\sigma = 4$، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع غير محدود، فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(\mu ; 0,8)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,05}{2}} = Z_{0,025} = 1,96$

$$\mu \in I_n = [20 - 1,96(0,8) \;\; ; \;\; 20 + 1,96(0,8)\,] \Rightarrow \mu \in I_0 = [18,43 \;\; ; \;\; 21,57\,]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 18,43 و 21,57

3- خطأ المعاينة في تقدير μ: $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{25}} = \mp 1,568$

4- حجم العينة اللازم إذا أردنا أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير μ الهامش $d = \mp 0,5$:

يمكن إيجاد قيمة n من خلال الصيغة التالية:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2}{d^2} = \frac{(1,96)^2.(4)^2}{(0,5)^2} = 245,86 \approx 246$$

5- بفرض أن الإنحراف المعياري للمجتمع مجهولا، مجال الثقة لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95% في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة $n = 100$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 3564$

بما أن المجتمع موزع طبيعيا، الإنحراف المعياري مجهول، حجم العينة أكبر من 30، فإن مجال الثقة هو:

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \qquad \hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{3564}{100-1}} = 6$$

$$\mu \in I_n = \left[25 - 1,96\frac{6}{\sqrt{100}} \;\; ; \;\; 25 + 1,96\frac{6}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\mu \in I_0 = [23,82 \;\; ; \;\; 26,18\,]$$

ب- حجم العينة $n = 17$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 1176$

بما أن المجتمع موزع طبيعيا، الإنحراف المعياري مجهول، حجم العينة أقل من 30، فإن مجال الثقة هو:

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \;\; ; \;\; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] \qquad \hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1176}{25-1}} = 7$$

حيث: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,05}{2}} = t_{0,025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 16$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت، فنجدها: $t_{0,025} = 2,120$

$$\mu \in I_n = \left[25 - 2{,}120\frac{7}{\sqrt{16}} \;;\; 25 + 2{,}120\frac{7}{\sqrt{16}}\right] \Rightarrow \mu \in I_0 = [21{,}29 \;;\; 28{,}71]$$

حل التمرين الخامس:

أولا- 1- تقدير بنقطة كلا من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{20{,}9}{10} = 2{,}09 \qquad . \qquad \hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}9801}{9}} = 0{,}33$$

2- تقدير بمجال المتوسط الحسابي للمجتمع $\boldsymbol{\mu}$ بمستوى ثقة 95%:

بما أن المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري مجهول، حجم العينة أقل من 30، فإن مجال الثقة هو:

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \;;\; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ ، أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}262$

$$\mu \in I_n = \left[2{,}09 - 2{,}262\frac{0{,}33}{\sqrt{9}} \;;\; 2{,}09 + 2{,}262\frac{0{,}33}{\sqrt{9}}\right] \Rightarrow \mu \in I_0 = [1{,}84 \;;\; 2{,}34]$$

3- تقدير بمجال الإنحراف المعياري للمجتمع $\boldsymbol{\sigma}$ بمستوى ثقة 95%:

بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن مجال الثقة لـ σ هو:

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \;;\; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right]$$

حيث نبحث عن القيمتين $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \quad \text{أي:} \quad \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(\frac{0{,}05}{2}\right)} = \chi^2_{(0{,}025)}$$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0{,}025)} = 19{,}023$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \quad \text{أي:} \quad \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)} = \chi^2_{(1-0{,}025)} = \chi^2_{(0{,}975)}$$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0{,}975)} = 2{,}700$

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{9\times 0{,}1089}{19{,}023}} \;;\; \sqrt{\frac{9\times 0{,}1089}{2{,}700}}\right] = \left[\sqrt{0{,}051} \;;\; \sqrt{0{,}363}\right] = [0{,}23 \;;\; 0{,}60]$$

ثانيا- 1- تقدير بنقطة ثم بمجال نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%:

أ- تقدير بنقطة نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة: $P_r = \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{4}{80} = 0{,}05$

ب- تقدير بمجال هذه النسبة باستخدام مستوى الثقة 90%:

بما أن حجم العينة كبيرا فإن مجال الثقة لـ P هو:

$$P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \;;\; \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

حيث: $1-\alpha=0,90\Rightarrow\alpha=0,10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{\frac{0,10}{2}}=Z_{0,05}=1,64$ و $\hat{q}=1-\hat{p}=0,95$

$$P\in I_n=\left[0,05-1,64\sqrt{\frac{(0,05)(0,95)}{80}}\ ;0,05+1,64\sqrt{\frac{(0,05)(0,95)}{80}}\right]$$

$$P\in I_0=[0,01\ ;\ 0,09\ ]$$

2- خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%:

$$d=\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=\pm1,64\sqrt{\frac{0,05\times0,95}{80}}=0,04$$

- كما يمكن حساب خطأ المعاينة بحساب نصف طول مجال الثقة كما يلي: $d=\frac{0,09-0,01}{2}=\mp0,04$

3- حجم العينة اللازم لو أردنا تخفيض خطأ المعاينة بالربع عند مستوى الثقة 90%:

تخفيض خطأ المعاينة بالربع يعني أنها تصبح تساوي: $d=0,04-0,04\times\frac{1}{4}=\mp0,03$

$$d=\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=>n=\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2\times\hat{p}\hat{q}}{d^2}=\frac{(1,64)^2\times0,05\times0,95}{(0,03)^2}=141,95\approx142$$

<u>حل التمرين السادس:</u>

- **المصنع (1):** $n=20$ ، $\bar{X}_1=3,8$ ، $\sigma^2=0,81$ ، التوزيع طبيعي
- **المصنع (2):** $n=25$ ، $\bar{X}_2=3,2$ ، $\sigma^2=0,64$ ، التوزيع طبيعي

- **إعطاء تقديرا بمجال بمستوى ثقة يساوي 90% للفرق بين متوسطي الأطوال في المصنعين $\mu_1-\mu_2$:**

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (أطوال الأنابيب) يتوزع طبيعيا في كلا المصنعين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ يتوزع توزيعا طبيعيا، أي:

$\bar{X}_1-\bar{X}_2\rightarrow N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2};\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين هو: $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$ مجهول.

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{0,81}{20}+\frac{0,64}{25}}=0,257$

أي أن: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\rightarrow N(\mu_1-\mu_2\ ;\ 0,257)$

$$\mu_1-\mu_2\in I_n=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ;\ (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1-\alpha=0,90\Rightarrow\alpha=0,10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{\frac{0,10}{2}}=Z_{0,05}=1,64$

$$\mu_1-\mu_2\in I_n=[(3,8-3,2)-1,64\times0,257\ ;\ (3,8-3,2)+1,64\times0,257\ ]$$

$$\Rightarrow\mu_1-\mu_2\in I_0=[0,178\ ;\ 1,021\ ]$$

<u>حل التمرين السابع:</u>

- حجم العينتين اللتين أجريتا عليهما الدراسة، علما أن تبايني المجتمعين متساويين:

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم العينتين صغير فإن مجال الثقة لـ $\mu_1-\mu_2$ هو:

$$\mu_1-\mu_2\in I_n=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\ ;\ (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\ \right]$$

وبما أن حدي مجال الثقة بمستوى 95% معطى كما يلي: $\mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [-3,72 \ ; \ 5,72 \ ]$

فإننا نستنتج بالمطابقة بين العبارتين السابقتين أن:

$$\begin{cases} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = -3,72 \\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \ 5,72 \end{cases}$$

حيث: $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,05}{2}} = t_{0,025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = 15$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0,025} = 2,131$.

$$\begin{cases} (4-3) - 2,131\sqrt{20,8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = -3,72 \\ (4-3) + 2,131\sqrt{20,8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \ 5,72 \end{cases}$$

بطرح الحد السفلي من الحد العلوي نجد:

$$2 \times 2,131\sqrt{20,8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 9,44 \Rightarrow \sqrt{20,8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 2,215$$

بتربيع الطرفين نجد: $20,8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) = 4,91 \Rightarrow \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) = 0,236$

بإجراء عمليات حسابية بسيطة نجد: $\frac{n_1+n_2}{n_1 \times n_2} = 0,236$

ولدينا بالمقابل درجة الحرية تساوي 15 أي: $v = n_1 + n_2 - 2 = 15 \Rightarrow n_1 + n_2 = 17$

بالتعويض نجد: $\frac{n_1+n_2}{n_1 \times n_2} = \frac{17}{n_1 \times n_2} = 0,236 \Rightarrow n_1 \times n_2 = 72$

ولدينا: $n_1 + n_2 = 17 \Rightarrow n_2 = 17 - n_1$

نجد أن: $n_1 \times n_2 = 72 \Rightarrow n_1(17-n_1) = 72 \ \Rightarrow -n_1^2 + 17n_1 - 72 = 0$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام المميز، وبما أن: $(n_1 > n_2)$، فإن: $(n_1 = 9 \quad , \quad n_2 = 8)$

<u>حل التمرين الثامن:</u>

أ- تقدير بنقطة نسبة الطلبة الذين يملكون هواتف نقالة في جامعة المسيلة ككل: $P_r = \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{180}{500} = 0,36$

ب- تقدير بمجال هذه النسبة باستخدام مستوى الثقة 99%:

بما أن حجم العينة كبيرا فإن مجال الثقة لـ P هو: $P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \ ; \ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$

حيث: $1-\alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,01}{2}} = Z_{0,005} = 2,58$ و $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,64$

$$P \in I_n = \left[0{,}36 - 2{,}58\sqrt{\frac{(0{,}36)(0{,}64)}{500}} \;\; ; \;\; 0{,}36 + 2{,}58\sqrt{\frac{(0{,}36)(0{,}64)}{500}}\right]$$

$$P \in I_0 = [0{,}30 \;\; ; \;\; 0{,}41\,]$$

حل التمرين التاسع:

- تقدير الفرق بين نسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للألة (1) ونسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للآلة (2) وذلك باستخدام مستوى الثقة 95%:

الآلة (1): $\hat{p}_1 = \frac{6}{120} = 0{,}05$ ، $\hat{q}_1 = 0{,}95$ ، $n_1 = 120$

الآلة (2): $\hat{p}_2 = \frac{9}{200} = 0{,}045$ ، $\hat{q}_2 = 0{,}955$ ، $n_2 = 200$

بما أن حجم العينتين كبير فإن مجال الثقة لـ $P_1 - P_2$ هو:

$$P_1 - P_2 \in I_n = \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\,\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\,\hat{q}_2}{n_2}} \;\; ; \;\; (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\,\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\,\hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}05 - 0{,}045 = 0{,}005$$

$$P_1 - P_2 \in I_n = \left[0{,}005 - 1{,}96\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{120} + \frac{(0{,}045)(0{,}955)}{200}} \;\; ; \;\; 0{,}005 + 1{,}96\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{120} + \frac{(0{,}045)(0{,}955)}{200}}\right]$$

$$P_1 - P_2 \in I_n = [0{,}005 - 1{,}96(0{,}025) \;\; ; \;\; 0{,}005 + 1{,}96(0{,}025)\,]$$

$$P_1 - P_2 \in I_0 = [-0{,}044 \;\; ; \;\; 0{,}054\,]$$

حل التمرين العاشر:

أ- التقدير بنقطة للتباين والانحراف المعياري:

- تباين المجتمع σ^2 نقدره بواسطة التباين المحسوب من العينة المسحوبة أي: $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{586}{10} = 58{,}6$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{1850{,}4}{9} = 205{,}6$$

- الانحراف المعياري للمجتمع σ ونقدره بواسطة الإنحراف المعياري المحسوب من العينة أي:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = 14{,}34$$

ب- التقدير بمجال للتباين والانحراف المعياري بمستوى الثقة 99%:

بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن مجال الثقة لـ σ^2 هو: $\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \;\; ; \;\; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

حيث نبحث عن القيمتين $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$ أي: $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(\frac{0{,}01}{2}\right)} = \chi^2_{(0{,}005)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 0,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,005)} = 23,589$

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0,01}{2}\right)} = \chi^2_{(0,995)} \quad \text{أي:} \quad 1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01$$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 99,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,995)} = 1,735$

$$\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(9)(205,6)}{23,589} \;;\; \frac{(9)(205,6)}{1,735}\right] => \sigma^2 \in I_0 = [78,44 \;;\; 1066,51\ ]$$

مجال الثقة لـ σ هو:

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \;;\; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right] = \left[\sqrt{78,44} \;;\; \sqrt{1066,51}\right] = [8,86 \;;\; 32,66\ ]$$

<u>حل التمرين الحادي عشر:</u>

- فترة الثقة لنسبة تباين مجتمع أطوال الطالبات إلى تباين مجتمع أطوال الطلبة، عند مستوى الثقة 95%:

مجتمع الطالبات: $S_1^2 = 64$ ، $n_1 = 25$ ، **مجتمع الطلبة:** $S_2^2 = 36$ ، $n_2 = 21$

بما أن المجتمعين موزعين طبيعيا فإن مجال الثقة لـ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \;;\; \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$$

حيث نبحث عن القيمتين $F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

$$F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{\left(\frac{0,05}{2}\right)} = F_{(0,025)} \quad \text{أي:} \quad 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجتي حرية:

$$v_1 = n_1 - 1 = 24 \quad \text{و} \quad v_2 = n_2 - 1 = 20$$

وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{(0,025)} = 2,41$

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right)} = \chi^2_{(1-0,025)} = \chi^2_{(0,975)} \quad \text{أي:} \quad 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجتي حرية: $v_1 = 24$ و $v_2 = 20$

وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{(0,975)} = \frac{1}{F_{(0,025)}}$

مع ملاحظة أنه يجب عكس درجات الحرية عند إستخراج القيمة $F_{(0,025)}$ فتصبح $v_1 = 20$ ، $v_2 = 24$

$$F_{(0,975)} = \frac{1}{F_{(0,025)}} = \frac{1}{2,33} = 0,43$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \;;\; \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right] = \left[\frac{\frac{64}{36}}{2,41} \;;\; \frac{\frac{64}{36}}{0,43}\right] \Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_0 = [0,74 \;;\; 4,14\ ]$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta_2^2}(x-\theta_1)^2}$$

- أوجد مقدِّر المعلمتين θ_1 و θ_2^2 باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

التمرين الثاني: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

لمراقبة عملية صنع أقراص دواء، سحبنا 10 أقراص عشوائيا وقمنا بوزنهم فحصلنا على النتائج التالية (مغ):

40، 44، 43، 45، 46، 45، 40، 43، 44، 41

علما أن أوزان أقراص الدواء تتوزع طبيعيا.

1- قدِّر بنقطة كلا من المتوسط الحقيقي لوزن أقراص الدواء والتباين.

2- قدِّر بمجال المتوسط الحقيقي للوزن والانحراف المعياري الحقيقي بمستوى ثقة 90%.

3- ماذا يمثل المقدار: $\frac{S}{\sqrt{n-1}} \times \mp t_{\frac{\alpha}{2}}$ ؟ أحسبه وأشرح النتيجة. علما أن: $\alpha = 0{,}05$

التمرين الثالث: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

يعتبر وزن الصابون المسحوق الذي تضعه آلة صناعية متغيرا عشوائيا من علبة إلى أخرى مقارنة بالوزن المعياري، نريد أن نقدر الوزن المتوسط μ الحقيقي لوزن الصابون في العلبة الواحدة، لهذا الغرض أخذت عينة من 10 علب من الإنتاج وتم وزنها بدقة فكانت النتائج التالية (بالغرام):

595 598 605 600 602 599 603 600 606 597

إذا علمت أن وزن الصابون المسحوق يتوزع طبيعيا:

1- أعط تقديرا نقطيا لكل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري الحقيقيين للمجتمع.

2- أعط تقدير بمجال لـ: μ بمستوى ثقة 95%. إشرح النتيجة.

3- أجريت دراسة على عينة جديدة مكونة من 100 علبة، فوجد أن متوسط وزن الصابون المسحوق للعلبة الواحدة يقدر بـ: 600 غرام وأن تباينها يقدر بـ: 7,84، ماهو مجال الثقة الجديد لـ: μ بمستوى الثقة 95%؟

التمرين الرابع: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

ينتج مصنع للمواد الغذائية قطع حلوى من نوع معين، متوسط أوزان كل القطع المنتجة هو 40 غرام وتباينها هو 4، فإذا سحبنا من إنتاج هذا المصنع عينة عشوائية من 100 قطعة.

1- أحسب إحتمال أن يكون متوسط أوزان هذه القطع يتراوح ما بين 39,8 غرام و 40,3 غرام.

2- أحسب قيمة الثابت k الذي يحقق: $P(\bar{X} \leq k) = 0{,}975$.

3- إذا كان متوسط أوزان كل القطع مجهولا، وكان مجموع أوزان القطع المسحوبة في العينة هو 3950 غرام. فقدِّر بمجال القيمة الحقيقية لمتوسط كل القطع بمستوى ثقة 90%.

التمرين الخامس:

بإستخدام عينة حجمها 16، تم تقدير بمجال المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع، بمستوى ثقة 95%، فوجد أنه يتراوح ما بين 18,25 و 21,75، فإذا علمت أن هذا المجتمع يتوزع طبيعيا بتباين يساوي9.

1- ما هو المتوسط الحسابي للعينة المسحوبة؟

2- ما هو خطأ المعاينة المرتكب في تقدير المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع؟

3- نريد تخفيض خطأ المعاينة إلى النصف، أي تحسين الدقة بـ 50%، ما هو حجم العينة اللازم لذلك؟

التمرين السادس:

لدراسة مرض السكر عند الذكور والإناث في أحد البلديات سحبت عينتين عشوائيتين من كل فئة، وسجلت قراءة مستوى السكر في دمهم (غ/ل) فكانت كالتالي:

الإناث X_1	0,85	3	1,05	2,2	2,3	0,7	1,16	1,5	1,1
الذكور X_2	1,9	3,5	4	0,94	1,6	1,65	0,85	3	/

لتكن لدينا المعطيات التالية: $\sum_{i=1}^{9} X_{1i} = 13,86$ ، $\sum_{i=1}^{8} X_{2i} = 17,44$ ، $\sum_{i=1}^{9}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = 4,8672$

$\sum_{i=1}^{8}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = 9,7468$ ، $X_1 \to N(0,95 \ . \ \sigma_1)$ ، $X_2 \to N(1,1 \ . \ \sigma_2)$ ، $\sigma_1 \neq \sigma_2$

1- حدد من خلال هذه الدراسة المتغير الإحصائي ونوعه.

2- ما احتمال أن يكون متوسط مستوى السكر في عينة الذكور يقل عن 1,65 غ/ل.

3- ما احتمال أن يكون متوسط مستوى السكر في عينة الإناث يفوق 1,45 غ/ل.

4- ما احتمال أن يكون الفرق بين متوسط مستوى السكر في الدم عند الذكور يفوق متوسط مستوى السكر في الدم عند الإناث بمقدار 0,8 غ/ل.

5- بفرض أن متوسط مستوى السكر في الدم لمجتمعي الذكور والإناث مجهولا.

أ- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور بمستوى ثقة 95%.

ب- ما هو خطأ المعاينة في تقدير المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور؟

ج- إذا أردنا تخفيض خطأ المعاينة في تقدير المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور بنسبة 80%، ما هو حجم العينة اللازم لذلك؟

د- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الإناث بمستوى ثقة 95%.

هـ- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال الانحراف المعياري الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور بمستوى ثقة 90%.

و- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال الانحراف المعياري الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الإناث بمستوى ثقة 95%.

ز- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال الفرق بين متوسطي مستوى السكر في الدم بين الذكور والإناث بمستوى الثقة 95%.

ح- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال نسبة تباين مجتمعي الذكور والإناث بمستوى الثقة 99%.

التمرين السابع:

عينة عشوائية تشمل 150 شخصا مختارة من مدينة كبيرة، وجد من بينهم 42 شخصا أميًّا. قَدِّرْ نسبة الأميَّة في هذه المدينة باستخدام مستوى الثقة 95%.

التمرين الثامن:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 13، وكان $\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 128{,}41$. قَدِّرْ التباين والانحراف المعياري للمجتمع باستخدام مستوى الثقة 95%.

التمرين التاسع:

مجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، الأول تباينه 49 والثاني تباينه 25، سحبنا منهما عينتين مستقلتين، الأولى من المجتمع الأول وكان وسطها الحسابي 35، والثانية من المجتمع الثاني وكان وسطها الحسابي 33، فإذا كان حجم العينة الأولى9، وحجم العينة الثانية 16، أوجد فترة الثقة لـ $(\mu_1 - \mu_2)$، وذلك باستخدام مستوى الثقة 99%.

التمرين العاشر:

أستخدمت طريقتان لتدريس مادة الإحصاء لطلبة أحد الجامعات، ولدراسة الفرق بين هاتين الطريقتين أختيرت عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى من طلبة الطريقة الأولى وكانت تحتوي على 10 طلبة، والثانية من طلبة الطريقة الثانية وكانت تحتوي على 12 طالبا، وأجري لهم إمتحان موحد. توضح البيانات التالية الوسط الحسابي والتباين لدرجات كل عينة:

$$\bar{X}_1 = 77 \qquad \bar{X}_2 = 82 \qquad S_1^2 = 5 \qquad S_2^2 = 6$$

إذا كان المجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، أوجد فترة الثقة للفرق بين متوسطي الطريقتين$(\mu_1 - \mu_2)$، وذلك باستخدام مستوى الثقة 95% في الحالتين: أ- إذا كان: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، ب- إذا كان: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

التمرين الحادي عشر:

في إستفتاء خاص ببرنامج تلفزيوني للأطفال، أختيرت عينة عشوائية تشمل 125 طفلا، وعينة عشوائية مستقلة عنها تشمل 100 طفلة، فكان من المعجبين بالبرنامج من الأولاد 80 طفلا، وعدد المعجبين من البنات 75 طفلة. أوجد فترة ثقة 90% للفرق بين نسبة كل المعجبين من الأولاد ونسبة المعجبين من البنات.

التمرين الثاني عشر:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\mu_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 5، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 7، وحصلنا على البيانات التالية:

$$\bar{X}_1 = 525{,}3 \qquad \bar{X}_2 = 510{,}8 \qquad S_1^2 = 2273 \qquad S_2^2 = 1759$$

- قَدِّرْ بمجال نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ باستخدام مستوى الثقة 95%.