نتطرق من خلال هذ الفصل إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: مفاهيم أساسية مرتبطة باختبار الفرضيات

ثانيا: اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع μ

ثالثا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_1 - \mu_2$

رابعا: اختبار الفرضيات حول نسبة المجتمع P

خامسا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي مجتمعين $P_1 - P_2$

سادسا: اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع σ^2

سابعا: اختبار الفرضيات حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

تطرقنا في الفصل السابق إلى الطريقة الأولى من طرق الاستدلال الإحصائي، والمتمثلة في التقدير، حيث أشرنا من خلاله إلى أن نظرية التقدير تتمثل مهمتها في البحث عن أحسن وأدق المقدِّرات للمقاييس الحقيقية للمجتمع انطلاقا من نتائج العينة العشوائية، حيث تقدم لنا هذه النظرية نوعان من التقدير، هما، التقدير بنقطة والتقدير بمجال، أما الطريقة الثانية فتتمثل في اختبار الفرضيات، حيث تتمثل مهمتها في وضع تخمين معين حول معلمة المجتمع المجهولة، ومن ثم إثبات صحته أو نفيه، وذلك بناء على النتائج المحصل عليها من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من ذلك المجتمع.

أولا: مفاهيم أساسية مرتبطة باختبار الفرضيات

1. الفرض الإحصائي:

هو عبارة عن تخمين أو ادعاء حول المعالم المجهولة لمجتمع أو أكثر، قد يتم قبوله أو رفضه، وذلك بعد اخضاعه للاختبار الإحصائي، باستخدام عينة عشوائية يتم سحبها من المجتمع، فمثلا، إذا ادعى صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع هو 5 كلغ، فإن ذلك يعتبر فرضا إحصائيا، قد يتم قبوله وقد يرفض، ولمعرفة مدى صحة ادعائه فإننا نقوم بسحب عينة عشوائية من الإنتاج الكلي لهذه المادة، ومن ثم نحسب متوسط وزن أكياس مادة السكر بالعينة، ثم نخضع ذلك المتوسط للاختبار الاحصائي، كما سيرد لاحقا، في هذه الحالة فإن معلمة المجتمع المجهولة هي المتوسط الحسابي الحقيقي لأوزان أكياس مادة السكر μ، أما الإحصائية المستخدمة للاختبار فهي متوسط وزن أكياس مادة السكر بالعينة $\bar{X}$. وإذا ادعى من خلال بيانات سابقة أن نسبة أكياس السكر المعيبة بالمصنع هي 2%، ففي هذه الحالة فإن معلمة المجتمع المجهولة هي النسبة الحقيقة لأكياس السكر المعيبة بالمصنع P، أما الإحصائية المستخدمة للاختبار فهي نسبة أكياس السكر المعيبة بالعينة $\hat{p}$، وهكذا بالنسبة لأي معلمة أخرى.

2. فرض العدم والفرض البديل:

لإجراء أي اختبار، فإننا نستخدم فرضين، هما:

أ- فرض العدم:

هو الفرض الذي يريد الباحث اختباره، ويعتقد أنه صحيح إلى أن يثبت عكس ذلك، ويرمز له بالرمز H_0.

ب- الفرض البديل

هو الفرض الذي يقبل كبديل لفرض العدم عند رفض هذا الأخير، ويرمز له بالرمز H_1.

3. الاختبار ثنائي الاتجاه والاختبار أحادي الاتجاه:

يمكن تحديد فرض العدم والفرض البديل حسب طبيعة الاختبار، فقد يكون ثنائي الاتجاه (ذو طرفين أو ذو ذيلين)، وقد يكون أحادي الاتجاه (ذو طرف واحد أو ذو ذيل واحد).

أ- الاختبار ثنائي الاتجاه (ذو طرفين أو ذو ذيلين):

يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة لا تساوي تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمتين، قيمة أقل من القيمة المفترضة وأخرى أكبر منها، وبالرجوع للمثال السابق، إذا افترضنا أن صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات

سابقة، يدعي أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع هو 5 كلغ، فإن هذا يعتبر اختبار ثنائي الاتجاه، حيث أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي 5 كلغ، أي: $H_0: \mu = 5$، بينما الفرض البديل هو أن يكون متوسط الوزن لا يساوي 5كلغ، ومعنى ذلك أن متوسط الوزن الحقيقي قد يكون أكبر من 5 كلغ وقد يكون أقل منها، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu = 5$$
$$H_1: \mu \neq 5$$

عموما إذا كانت θ معلمة مجهولة وأردنا اجراء اختبار ثنائي الاتجاه بأنها تساوي قيمة ثابتة هي θ_0، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

هناك حالة أخرى قد يكون فيها فرض العدم يعبر عن مساواة بين معلمتين، من مجتمعين مختلفين، فمثلا يدعي صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الأولى μ_1 يساوي متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الثانية μ_2، فهذا الاختبار يعتبر اختبار ثنائي الاتجاه، حيث أن فرض العدم هو: $H_0: \mu_1 = \mu_2$، الذي يمكن كتابته كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون الفرق بين المتوسطين لا يساوي الصفر، ومعنى ذلك أن الفرق بين المتوسطين قد يكون أكبر من الصفر وقد يكون أصغر من الصفر، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \text{أو} \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

عموما إذا كانت θ_1 معلمة مجهولة من المجتمع الأول، وθ_2 معلمة مجهولة من المجتمع الثاني، وأردنا اجراء اختبار ثنائي الاتجاه بأن المعلمتين متساويتين، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 \qquad\qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0$$
$$H_1: \theta_1 \neq \theta_2 \qquad \text{أو} \qquad H_1: \theta_1 - \theta_2 \neq 0$$

ب- الاختبار أحادي الاتجاه (ذو طرف واحد أو ذو ذيل واحد):

ب-1- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين:

يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تقل أو تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة تفوق تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمة واحدة تقع في الطرف الأيمن من القيمة المفترضة، وبالرجوع للمثال السابق، إذا افترضنا أن صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، يدعي أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع يقل أو يساوي 5 كلغ، فإن هذا يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، حيث أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يقل أو يساوي 5 كلغ، أي: $H_0: \mu \leq 5$، بينما الفرض البديل هو أن يكون متوسط الوزن يفوق 5كلغ، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي: $H_0: \mu \leq 5$ ، $H_1: \mu > 5$

نستطيع في هذه الحالة أن نكتب فرض العدم بإشارة المساواة فقط، أي: $H_0: \mu = 5$، لأن الفرض البديل يحتوي على إشارة أكبر من فقط، ويفهم ضمنيا من ذلك أن إشارة أقل من يجب أن تكون في فرض العدم حتى ولو لم تذكر صراحة، وعليه يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \mu = 5$ ، $H_1: \mu > 5$

عموما إذا كانت θ معلمة مجهولة وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي: $H_1: \theta > \theta_0$ ، $H_0: \theta \leq \theta_0$ أو $H_1: \theta > \theta_0$ ، $H_0: \theta = \theta_0$

هناك حالة أخرى قد يكون فيها فرض العدم يعبر عن علاقة بين معلمتين، من مجتمعين مختلفين، فمثلا يدعي صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الأولى μ_1 يقل أو يساوي متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الثانية μ_2، فهذا الاختبار يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، حيث أن فرض العدم هو: $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$، الذي يمكن كتابته كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون الفرق بين المتوسطين يفوق الصفر، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

عموما إذا كانت θ_1 معلمة مجهولة من المجتمع الأول، وθ_2 معلمة مجهولة من المجتمع الثاني، وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta_1 \leq \theta_2 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 \leq 0 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0$$
$$H_1: \theta_1 > \theta_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 > 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 > 0$$

ب-1- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار:

يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تفوق أو تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة تقل عن تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمة واحدة تقع في الطرف الأيسر من القيمة المفترضة، وبالرجوع للمثال السابق، إذا افترضنا أن صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، يدعي أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع يفوق أو يساوي 5 كلغ، فإن هذا يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، حيث أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يفوق أو يساوي 5 كلغ، أي: $H_0: \mu \geq 5$، بينما الفرض البديل هو أن يكون متوسط الوزن يقل عن 5كلغ، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu \geq 5 \quad ، \quad H_1: \mu < 5$$

نستطيع في هذه الحالة أن نكتب فرض العدم بإشارة المساواة فقط، أي: $H_0: \mu = 5$، لأن الفرض البديل يحتوي على إشارة أقل من فقط، ويفهم ضمنيا من ذلك أن إشارة أكبر من يجب أن تكون في فرض العدم حتى ولو لم تذكر صراحة، وعليه يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \mu = 5$ ، $H_1: \mu < 5$

عموما إذا كانت θ معلمة مجهولة وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي: $H_1: \theta < \theta_0$ ، $H_0: \theta \geq \theta_0$ أو $H_1: \theta < \theta_0$ ، $H_0: \theta = \theta_0$

هناك حالة أخرى قد يكون فيها فرض العدم يعبر عن علاقة بين معلمتين، من مجتمعين مختلفين، فمثلا يدعي صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الأولى μ_1 يفوق أو يساوي متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الثانية μ_2، فهذا الاختبار يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، حيث أن فرض العدم هو: $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$، الذي يمكن كتابته كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$.

بينما الفرض البديل هو أن يكون الفرق بين المتوسطين يقل عن الصفر، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

عموما إذا كانت θ_1 معلمة مجهولة من المجتمع الأول، وθ_2 معلمة مجهولة من المجتمع الثاني، وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta_1 \geq \theta_2 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 \geq 0 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0$$
$$H_1: \theta_1 < \theta_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 < 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 < 0$$

4- إحصائية الاختبار:

هي متغير عشوائي ذو توزيع احتمالي معلوم عندما يكون فرض العدم صحيحا، حيث تحسب قيمة إحصائية الاختبار من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع المدروس، ويتم مقارنتها بالقيمة الحرجة المستخرجة من جداول خاصة من أجل اتخاذ القرار برفض أو قبول فرض العدم H_0.

5- منطقة القبول:

هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى قبول فرض العدم H_0 ورفض الفرض البديل H_1.

6- منطقة الرفض:

هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى رفض فرض العدم H_0 وقبول الفرض البديل H_1.

7- القيمة الحرجة:

هي القيمة التي تفصل بين منطقتي الرفض والقبول.

عند وقوع قيمة إحصائية الاختبار المحسوبة من بيانات العينة العشوائية المسحوبة في منطقة القبول فإننا نقبل فرض العدم، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة، أما إذا وقعت قيمة إحصائية الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وليس ناتجا عن أخطاء المعاينة، بل سببه الاختلاف الحقيقي بين القيمة المفترضة للمعلمة المجهولة والقيمة الحقيقية لها.

تسمى هذه الطريقة المستخدمة في اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية، وهناك طريقة أخرى تعتمد على مجال الثقة تسمى بطريقة مجال الثقة، والتي سنتطرق إليها لاحقا.

عند اتخاذ القرار بقبول أو رفض فرض معين، فإن ذلك القرار لا يعني بالضرورة أنه سليم، بمعنى أن القرار المتخذ يكون أيضا معرضا للخطأ.

8- أنواع الأخطاء:

إذا كانت العينة المسحوبة لا تمثل المجتمع أحسن تمثيل، فإننا نكون بصدد نوعين من الأخطاء، هما:

أ- الخطأ من النوع الأول: هو رفض فرض العدم بينما هو في الواقع صحيحا، يرمز له بالرمز α، ويسمى مستوى المعنوية.

ب- الخطأ من النوع الثاني: هو قبول فرض العدم بينما هو في الواقع غير صحيح، يرمز له بالرمز β.

يمكن تلخيص الحالات التي يتعرض لها متخذ القرار في الجدول التالي:

جدول (3-1): أنواع الأخطاء

القرار	فرض العدم في الواقع	
	صحيح	خاطئ
قبول	قرار سليم	خطأ من النوع الثاني β
رفض	خطأ من النوع الأول α	قرار سليم

ثانيا: اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع μ

1- تذكير بتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

مما سبق، توصلنا إلى أن أفضل مقدِّر غير متحيز للمتوسط الحسابي للمجتمع μ هو المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$، وأن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة قد يكون توزيع طبيعي وقد يكون توزيع ستودنت، وعليه تكون إحصائية الاختبار المستخدمة في اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع حسب الحالات التالية:

أ- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

ب- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

ج- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$. ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

د- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30: فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أخذنا مثلا الحالة الأولى، أي أن المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، وأردنا اختبار فرضية معينة حول المتوسط الحسابي للمجتمع، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- **الاختبار ثنائي الاتجاه:** إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع μ يساوي قيمة ثابتة μ_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu = \mu_0$ ، $H_1: \mu \neq \mu_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

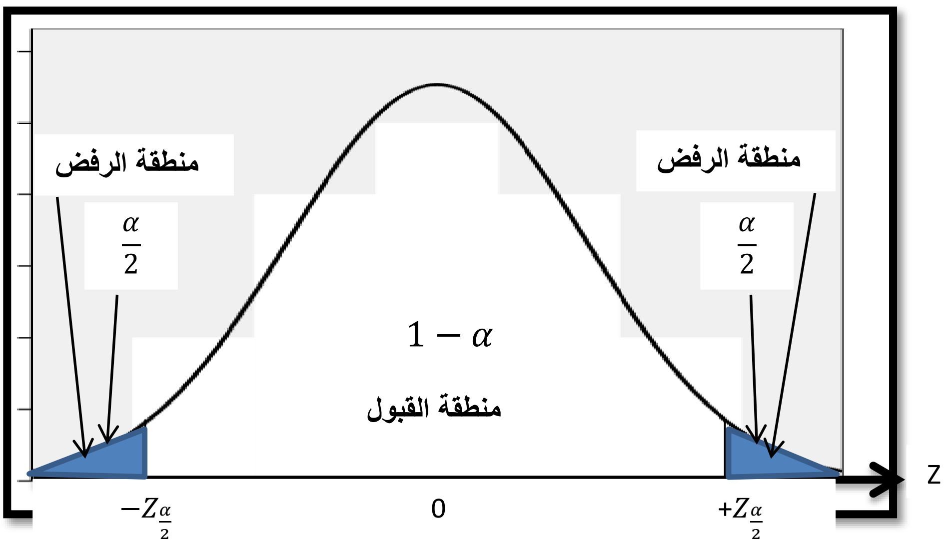
ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\bar{X}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة μ_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: والتي تمثل مساحة منطقة الرفض، بينما المساحة المتبقية $1-\alpha$ فتمثل مساحة منطقة القبول، أي أننا ننطلق من منطلق أنه لو كان فرض العدم صحيحا في الواقع، فإن $(1-\alpha)100\%$ من المتوسطات ستكون داخل منطقة القبول، وهي نسبة كبيرة جدا تجعلنا واثقين بأن القرار الذي سنتخذه سيكون صائبا، لأنه من النادر الحصول على قيمة للمتوسط الحسابي للعينة تقع خارج منطقة القبول وفرض العدم في الواقع صحيح. عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: بما أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي قيمة ثابتة أي: $H_0: \mu = \mu_0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون ذلك المتوسط لا يساوي μ_0، فإن ذلك يعني أن المتوسط الحقيقي قد يكون أكبر من μ_0 وقد يكون أقل منها، وبالتالي فإن منطقة الرفض تكون في الجزئين العلوي والسفلي من المساحة الكلية، ومساحة كل منها تساوي $\frac{\alpha}{2}$، أما المساحة بين هاتين المنطقتين فتمثل منطقة القبول، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج القيمة الجدولية، التي تمثل إحصائية الاختبار النظرية أو القيمة الحرجة، وبما أن هناك منطقتين للرفض فإن ذلك يعني أن هناك قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحدهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة، والشكل التالي يوضح ذلك:

الشكل(3-1): اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع μ يساوي أو يقل عن قيمة ثابتة μ_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu \leq \mu_0$ ، $H_1: \mu > \mu_0$

يمكن صياغة الفرضين السابقين، كما يلي: $H_0: \mu = \mu_0$ ، $H_1: \mu > \mu_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن المتوسط أكبر من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

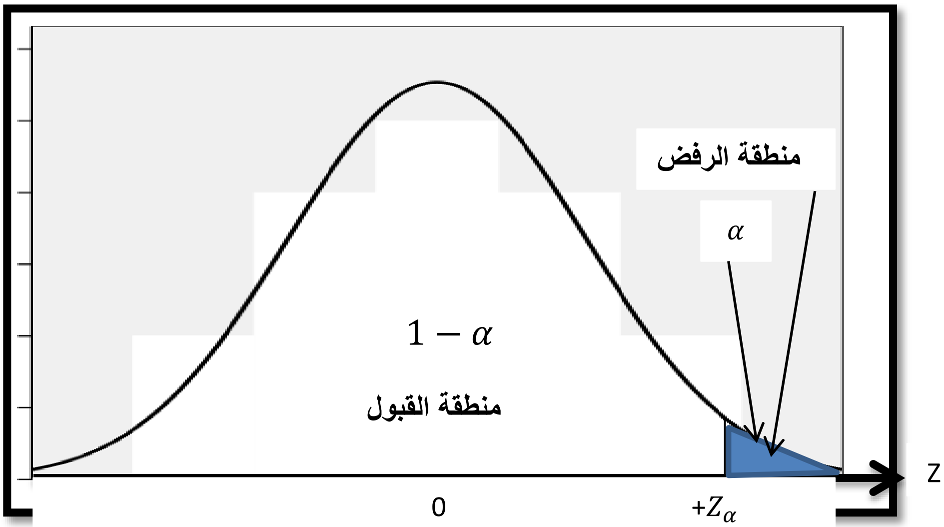
ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\bar{X}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة μ_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: بما أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي أو يقل عن قيمة ثابتة أي: $H_0: \mu \leq \mu_0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون ذلك المتوسط يفوق μ_0، فإن ذلك يعني أن منطقة الرفض تكون في الجزء العلوي من المساحة الكلية، ومساحتها تساوي α، أما المساحة المتبقية على اليسار فتمثل منطقة القبول، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج القيمة الجدولية، التي تمثل إحصائية الاختبار النظرية أو القيمة الحرجة، وبما أن هناك منطقة رفض واحدة فإن ذلك يعني أن هناك قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي، والشكل التالي يوضح ذلك:

الشكل(3-2): اختبار أحادي الاتجاه من اليمين للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع μ يساوي أو يزيد عن قيمة ثابتة μ_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu \geq \mu_0$ ، $H_1: \mu < \mu_0$

يمكن صياغة الفرضين السابقين، كما يلي: $H_0: \mu = \mu_0$ ، $H_1: \mu < \mu_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن المتوسط أقل من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

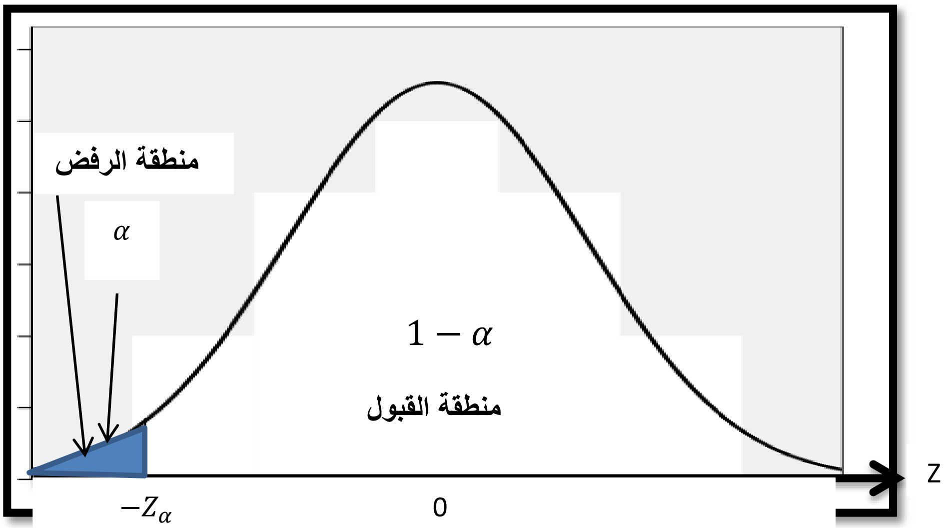
ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\bar{X}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة μ_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: بما أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي أو يزيد عن قيمة ثابتة أي: $H_0: \mu \geq \mu_0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون ذلك المتوسط يقل عن μ_0، فإن ذلك

يعني أن منطقة الرفض تكون في الجزء السفلي من المساحة الكلية، ومساحتها تساوي α، أما المساحة المتبقية على اليمين فتمثل منطقة القبول، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج القيمة الجدولية، التي تمثل إحصائية الاختبار النظرية أو القيمة الحرجة، وبما أن هناك منطقة رفض واحدة فإن ذلك يعني أن هناك قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي، والشكل التالي يوضح ذلك:

الشكل(3-3): اختبار أحادي الاتجاه من اليسار للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

ملاحظة: يتم اتباع نفس الخطوات في باقي الحالات الخاصة باختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع.

مثال1: يدعي مدير مصنع لصناعة المسامير أن صناعة هذه المسامير في مصنعه دقيقة جدا، ومطابقة للمواصفات، وأن المتوسط الحسابي لأطوال كل المسامير المنتجة يساوي 10 سم، بتباين يساوي 2,25. للتأكد من صحة ادعائه سحبت عينة عشوائية من الإنتاج الكلي للمصنع تحتوي على 25 مسمارا، فكان متوسط أطوالها هو 9,92 سم، علما أن أطوال المسامير تتبع التوزيع الطبيعي. اختبر صحة ادعاء مدير المصنع باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu = 10$ ، $H_1: \mu \neq 10$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أطوال المسامير- موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، $\sigma = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5\ cm$، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{9,92-10}{\frac{1,5}{\sqrt{25}}} = \frac{-0,08}{0,3} = -0,267$،

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

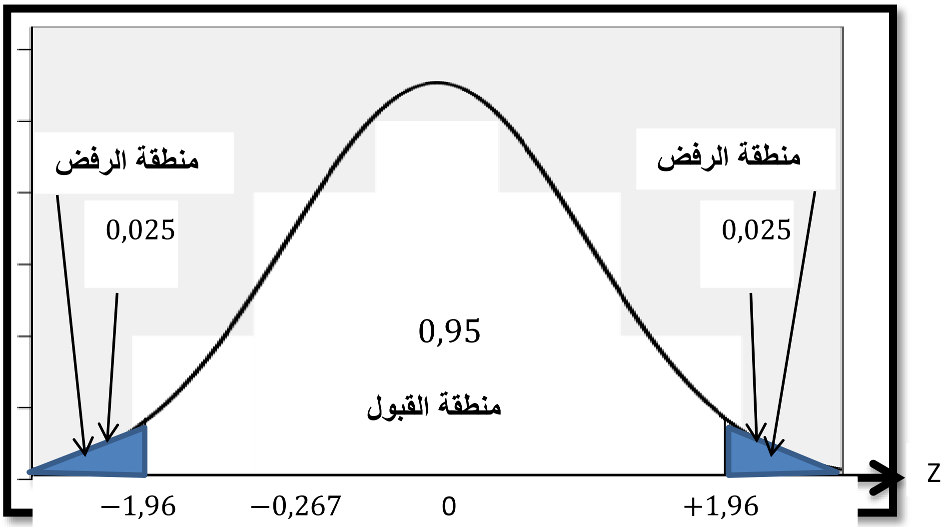
هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{0,025} = 1,96$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|-0,267| < 1,96$، أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل ادعاء صاحب المصنع بأن المتوسط الحسابي لأطوال كل المسامير المنتجة يساوي 10 سم، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-4): اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

مثال2: في دراسة إحصائية سابقة، وجد أن متوسط الإنتاج السنوي للمنتِج في مصنع للسجاد هو 14 سجادة، فإذا اتبع هذا المصنع أسلوب جديد للإنتاج واخترنا عينة عشوائية تحتوي على 9 منتجين، وكان إنتاجهم السنوي: 11، 16، 14، 11، 15، 19، 17، 23، 18، بافتراض أن إنتاج المنْتِج سنويا يتوزع طبيعيا. اختبر ما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلى تغيير الوسط الحسابي للإنتاج السنوي لكل المنتجين، وذلك باستخدام مستوى معنوية 10%.

الحل:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu = 14$ ، $H_1: \mu \neq 14$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمع – الإنتاج السنوي للمنتِج من السجاد - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9 - 1 = 8$ ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{11+16+14+11+15+19+17+23+18}{9} = \frac{144}{9} = 16$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{118}{8}} = 3{,}84$$

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{16-14}{\frac{3{,}84}{\sqrt{8}}} = \frac{-0{,}08}{0{,}3} = 1{,}80$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}10$

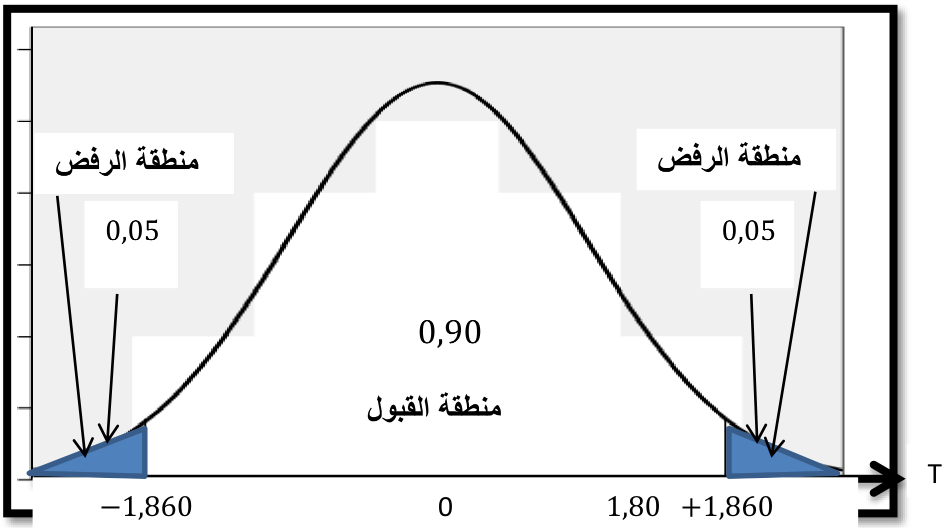
هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05 \Rightarrow T_{0{,}05} = 1{,}860$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|1{,}80| < 1{,}860$، أي: $|T_c| < T_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن الطريقة الجديدة لم تؤد إلى تغيير الوسط الحسابي للإنتاج السنوي لكل المنتجين، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-5) : اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

مثال3: يدعي مدير مصنع لصناعة المصابيح الكهربائية أن متوسط مدة الاشتغال لكل المصابيح المنتجة يفوق 900 ساعة، بانحراف معياري يساوي 100 ساعة. للتأكد من صحة ادعائه سحبت عينة عشوائية من الإنتاج الكلي للمصنع تحتوي على 121 مصباحا، فكان متوسط مدة الاشتغال بها هو 960 ساعة، علما أن مدة اشتغال المصابيح تتبع التوزيع الطبيعي. اختبر صحة ادعاء مدير المصنع باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu = 900$ ، $H_1: \mu > 900$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – مدة اشتغال المصابيح - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{960-900}{\frac{100}{\sqrt{121}}}=6{,}6$

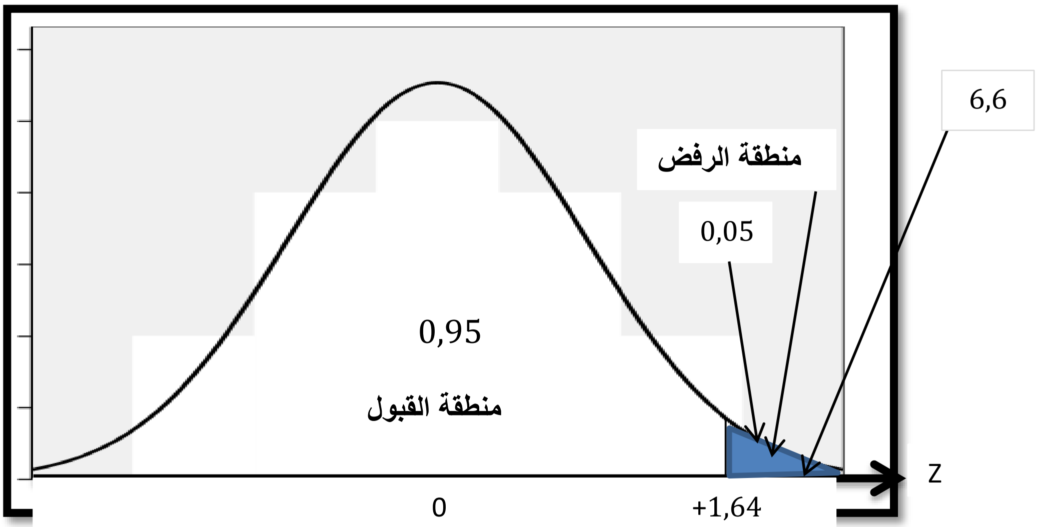
د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha=0{,}05$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha=0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}05}=1{,}64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $6{,}6>1{,}64$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل ادعاء مدير المصنع بأن متوسط مدة الاشتغال لكل المصابيح المنتجة يفوق 900 ساعة، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وليس ناتجا عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-6): اختبار أحادي الاتجاه من اليمين للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

مثال4: يعتقد مدير مدرسة ابتدائية أن متوسط أوزان التلاميذ بها يساوي أو يفوق 35 كلغ، وقصد التأكد من صحة اعتقاده سحبنا عينة عشوائية حجمها 17 تلميذا، فوجدنا أن متوسطها يساوي 33 كلغ وانحرافها المعياري يساوي 3 كلغ، فإذا كانت أوزان تلاميذ المدرسة تتبع توزيعا طبيعيا، اختبر صحة هذا الاعتقاد عند مستوى معنوية 1%.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu=35$ ، $H_1: \mu<35$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أوزان التلاميذ - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية:

$\nu = n - 1 = 17 - 1 = 16$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{33-35}{\frac{3}{\sqrt{17-1}}} = -2{,}67$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}01$

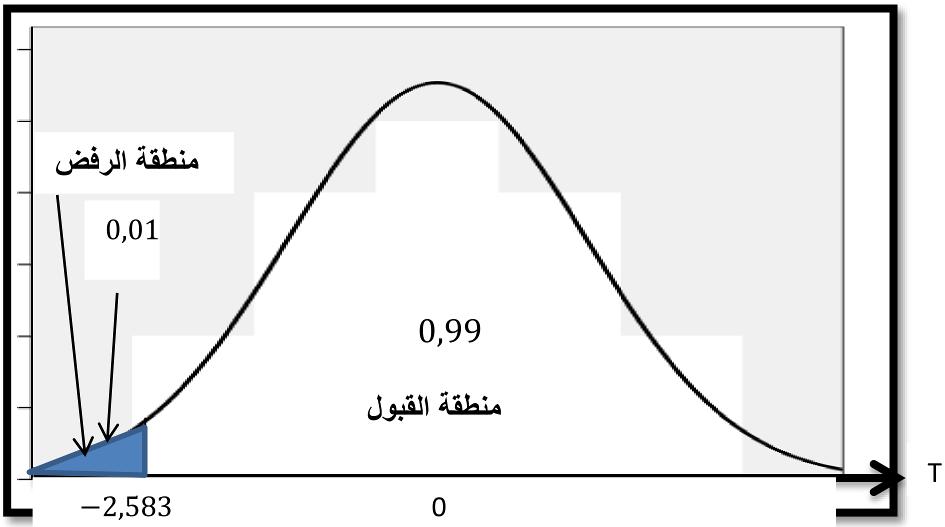
هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow T_{0{,}01} = -2{,}583$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-2{,}67 < -2{,}583$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نرفض ادعاء مدير المدرسة بأن متوسط أوزان التلاميذ بها يساوي أو يفوق 35 كلغ، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-7): اختبار أحادي الاتجاه من اليسار للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، حيث تمثل هاته الأخيرة احتمال أن تأخذ إحصائية الاختبار قيمة تساوي القيمة المشاهدة أو أي قيمة أخرى تؤيد الفرض البديل أكثر من القيمة المشاهدة، وذلك بافتراض أن فرض العدم صحيح، وهي عبارة عن مساحة قد تكون أكبر أو تساوي أو تقل عن مستوى المعنوية α. فإذا افترضنا أن إحصائية الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي فإن مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$ يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

مثال5: بالرجوع إلى الأمثلة 2، 3، و4، أحسب قيمة مستوى المعنوية الناتج ثم اختبر صحة الفرضيات.

- بالنسبة للمثال2:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha = 0{,}10$ ، والقيمة المشاهدة $T_c = 1{,}80$، و $v = 8$، فإن:

$$P - Value = 2P(T \geq T_c) = 2P(T \geq 1{,}80)$$

من خلال جدول توزيع ستودنت بالملحق رقم 3، نلاحظ أن القيمة 1,80 تقع بين القيمتين 1,397 و1,860، وهذا يبين أن المساحة على يمين 1,80 تفوق 0,05 وبضرب هذه المساحة في 2 نجد أنها تفوق 0,1، أي أنها تفوق α، وبالتالي نتخذ القرار التالي: بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

- بالنسبة للمثال3:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين ، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = 6{,}6$، فإن:

$$P - Value = P(Z \geq Z_c) = P(Z \geq 6{,}6) = P(Z \leq -6{,}6) \approx 0$$

بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

- بالنسبة للمثال4:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار ، و$\alpha = 0{,}01$ ، والقيمة المشاهدة $T_c = -2{,}67$، و $v = 16$، فإن: $P -$

$$Value = P(T \leq -T_c) = P(T \leq -2{,}67) = P(T \geq 2{,}67) = 0{,}0038$$

من خلال جدول توزيع ستودنت بالملحق رقم 3، نلاحظ أن القيمة $(-2{,}67)$ تقع بين القيمتين $(-2{,}583)$و $(-2{,}921)$، وهذا يبين أن المساحة على يسار $(-2{,}67)$ تقل عن 0,01، أي أنها تقل عن α، وبالتالي نتخذ القرار التالي:

بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة μ – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة μ_0 المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. فإذا افترضنا أن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، وتباين المجتمع معلوم، فإنه يمكن اختبار فرض معين حول القيمة μ_0 في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو: $I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

إذا كان: $\mu_0 \in \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_0 \notin \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_0 \geq \bar{X} - Z_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_0 < \bar{X} - Z_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_0 \leq \bar{X} + Z_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_0 > \bar{X} + Z_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال6: بالرجوع إلى الأمثلة 2، 3، و4، اختبر صحة الفرضيات باستخدام فترة الثقة.

- بالنسبة للمثال2:

بما أن المتغير المدروس في المجتمع – الإنتاج السنوي للمنْتِج من السجاد - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = 8$ ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$،

وبما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0{,}10$، فإن مجال الثقة هو:

$$I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$$
$$I_n = \left[16 - t_{0,05} . \frac{3{,}84}{\sqrt{9-1}} \quad ; \quad 16 + t_{0,05} . \frac{3{,}84}{\sqrt{9-1}}\right]$$
$$I_n = \left[16 - 1{,}860 . \frac{3{,}84}{\sqrt{8}} \quad ; \quad 16 + 1{,}860 . \frac{3{,}84}{\sqrt{8}}\right]$$
$$I_0 = [13{,}47 \quad ; \quad 18{,}52\,]$$

نلاحظ أن: $(\mu_0 = 14) \in I_0 = [13{,}47 \quad ; \quad 18{,}52\,]$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

- بالنسبة للمثال3:

بما أن المتغير المدروس في المجتمع – مدة اشتغال المصابيح - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين و $\alpha = 0{,}05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\bar{X} - Z_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 960 - Z_{0,05} . \frac{100}{\sqrt{121}} = 960 - 1{,}64 . \frac{100}{\sqrt{121}} = 945{,}09$$

نلاحظ أن: $(\mu_0 = 900) < 945{,}09$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

- بالنسبة للمثال4:

بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أوزان التلاميذ - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = n - 1 = 17 - 1 = 16$ ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha = 0{,}01$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\bar{X} + t_{\alpha}.\frac{s}{\sqrt{n}} = 33 - t_{0{,}01}.\frac{3}{\sqrt{17-1}} = 33 + 2{,}583.\frac{3}{\sqrt{16}} = 34{,}94$$

نلاحظ أن: $(\mu_0 = 35) > 34{,}94$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

ثالثا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_1 - \mu_2$

1- تذكير بتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

مما سبق، توصلنا إلى أن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ قد يكون توزيع طبيعي وقد يكون توزيع ستودنت، وعليه تكون إحصائية الاختبار المستخدمة في اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين حسابيين للمجتمع حسب الحالات التالية:

أ- إذا كان المجتمعين مستقلين (العينتين المسحوبتين غير مرتبطتين):

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}}$$

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس لا يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين، بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فإنه حسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}}$

- إذا كان الانحرافين المعياريين σ_1 و σ_2 مجهولين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فإنه حسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، يتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}}$

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بانحرافين معياريين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير، والانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n_1 + n_2 - 2$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$\boldsymbol{T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}}$$

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بانحرافين معياريين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير، والانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، $\sigma_1 \neq \sigma_2$، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

ب- إذا كان المجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين):

- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n \geq 30$، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}$، وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$. حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}$ و $S_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبالتالي تصبح الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$.

- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}$. وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$. حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{S_{D_i}}{\sqrt{n-1}}$ و $S_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبالتالي تصبح الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أخذنا مثلا الحالة الأولى، أي أن المتغير العشوائي المدروس في مجتمعين مستقلين يتوزع طبيعيا بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وأردنا اختبار فرضية معينة حول الفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للمجتمعين، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن المتوسطين الحسابيين للمجتمعين μ_1 و μ_2 متساويين، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ، $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحددهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع الأول μ_1 يساوي أو يقل عن متوسط المجتمع الثاني μ_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ ، $H_1\colon \mu_1 > \mu_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \text{ ، } H_1\colon \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو} \quad H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ ، } H_1\colon \mu_1 - \mu_2 > 0$$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن الفرق ما بين المتوسطين أكبر من الصفر فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع الأول μ_1 يساوي أو يفوق متوسط المجتمع الثاني μ_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0:\ \mu_1 \geq \mu_2$ ، $H_1:\ \mu_1 < \mu_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0:\ \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ ، $H_1:\ \mu_1 - \mu_2 < 0$ أو $H_0:\ \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، $H_1:\ \mu_1 - \mu_2 < 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن الفرق ما بين المتوسطين أقل من الصفر فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \geq -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c < -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: يتم اتباع نفس الخطوات في باقي الحالات الخاصة باختبار الفرضيات حول الفرق ما بين متوسطين حسابيين لمجتمعين.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، فإذا افترضنا أن إحصائية الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي فإن مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$ يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للفرق ما بين متوسطي المجتمعين المجهول – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة الفرق المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. فإذا افترضنا أن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وتبايني المجتمعين معلومين، فإنه يمكن اختبار فرض معين حول الفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ في هذه الحالة، كما يلي:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** مجال الثقة هو:

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \notin I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \geq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 > (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: جميع الحالات السابقة لاختبار الفرضيات الخاصة بالفرق بين متوسطين حسابيين لمجتمعين تمت على أساس فرض العدم يساوي الصفر، يساوي أو يفوق الصفر، يساوي أو يقل عن الصفر، ويمكن أيضا اختبار أن الفرق بين متوسطين يساوي، يساوي أو يفوق، يساوي أو يقل عن قيمة معينة وليس الصفر فقط، باتباع نفس الخطوات السابقة.

مثال7: إذا كانت الأجور الشهرية لـ 600 عاملا في الشركة A تتوزع طبيعيا بانحراف معياري يساوي 4500 دج، والأجور الشهرية لـ 800 عاملا في الشركة B تتوزع طبيعيا بانحراف معياري يساوي 4200 دج، وسحبنا عينتين مستقلتين بدون إرجاع، العينة الأولى من الشركة A، حجمها 64 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 30000 دج، والعينة الثانية من

الشركة B حجمها 81 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 29400 دج. اختبر صحة فرضية أن متوسطي الأجر الشهري للشركتين متساوي، بطريقة مستوى المعنوية، وطريقة مستوى المعنوية الناتج، وطريقة مجال الثقة، عند مستوى المعنوية 5%.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – الأجور الشهرية - موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين معلومين، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}$$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 30000 - 29400 = 600\ DA$$

$$\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$

بما أن المجتمعين محدودين، والسحب تم دون ارجاع، و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{64}{600} = 0{,}11 > 0{,}05$

و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{81}{800} = 0{,}10 > 0{,}05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}\left(\frac{N_A - n_A}{N_A - 1}\right) + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\left(\frac{N_B - n_B}{N_B - 1}\right)} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{64}\left(\frac{600-64}{600-1}\right) + \frac{(4200)^2}{81}\left(\frac{800-81}{800-1}\right)}$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = 692{,}17\ DA$$

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{600-0}{692{,}17} = 0{,}87$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \Rightarrow Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|0{,}87| < 1{,}96$ أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن متوسطي الأجر الشهري للشركتين متساوي، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = 0{,}87$، فإن:

$$P - Value = 2P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq 0{,}87) = 2P(Z \leq -0{,}87) = 2(0{,}1922) = 0{,}3844$$

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0{,}05$، فإن مجال الثقة هو:

$$I_n = \qquad I_n = \left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} \quad ; \quad (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right]$$

$$[600 - 1{,}96(692{,}17) \quad ; \quad 600 + 1{,}96(692{,}17)]$$

$$I_0 = [-756{,}65 \quad ; \quad 1956{,}65\,]$$

نلاحظ أن: $(\mu_A - \mu_B = 0) \in I_0 = [-756{,}65 \quad ; \quad 1956{,}65\,]$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

مثال8: أخذت عينتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين، والجدول التالي يبين بعض احصاءاتها:

	حجم العينة	متوسط العينة	تباين العينة
المجتمع الأول *A*	5	5,8	3,7
المجتمع الثاني *B*	6	9,33	7,076

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أقل من متوسط المجتمع الثاني، بافتراض أن الانحرافين المعياريين الحقيقيين المجهولين للمجتمعين متساويين. اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 5%. بطريقة مستوى المعنوية، ومستوى المعنوية الناتج، ومجال الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A < \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتها كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B < 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين مجهولين ومتساويين وحجم العينتين صغير، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}$$

$$S_P^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2+(n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2} = \frac{(5-1)(3{,}7)+(6-1)(7{,}076)}{5+6-2} = 5{,}57$$

$= 9$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \dfrac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 5{,}8 - 9{,}33 = -3{,}53$$

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{5{,}57\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)} = 1{,}43$$

$$T_c = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}} = \frac{-3{,}53-0}{1{,}43} = -2{,}47$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow T_{0{,}05} = -1{,}833$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-2{,}47 < -1{,}833$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل ادعاء الباحث بأن متوسط المجتمع الأول أقل من متوسط المجتمع الثاني ، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $T_c = -2{,}47$، و $v = 9$، فإن:

$$P-Value = P(T \le T_c) = P(T \le -2{,}47) = 0{,}3844$$

من خلال جدول توزيع ستودنت بالملحق رقم 3، نلاحظ أن القيمة $(-2{,}47)$ تقع بين القيمتين $(-2{,}262)$ و $(-2{,}821)$، وهذا يبين أن وهذا يبين أن المساحة على يسار $(-2{,}67)$ تقل عن 0,05، أي أنها تقل عن α، وبالتالي نتخذ القرار التالي: بما أن: $P-Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و$\alpha = 0{,}05$، و $v = 9$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي: $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{0{,}05}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = -3{,}53+1{,}833(1{,}43) = -0{,}91$

نلاحظ أن: $(\mu_A-\mu_B=0) > -0{,}91$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

مثال9: البيانات التالية تمثل علامات 6 طلبة في مقياس الإحصاء3، قبل وبعد استخدام طريقة جديدة في المراجعة.

الطالب	1	2	3	4	5	6
قبل (A)	14	14	13	14	12	14
بعد (B)	15	16	16	17	14	18

المطلوب: هل ساهمت الطريقة الجديدة المتبعة في المراجعة في جعل متوسط علامات الطلبة أكبر من متوسطهم قبل اتباعها، عند مستوى معنوية 10%، علما أن علامات الطلبة تتبع التوزع الطبيعي.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0:\ \mu_{\bar{D}} = 0$ ، $H_1:\ \mu_{\bar{D}} > 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس موزع طبيعيا، والمجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين)، وحجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 6 - 1 = 5$.

وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}$. وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$. حيث:

$\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}$ و $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبالتالي تصبح الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$.

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

الطالب	1	2	3	4	5	6	المجموع
قبل (A)	14	14	13	14	12	14	/
بعد (B)	15	16	16	17	14	18	/
D_i	1	2	3	3	2	4	**15**
$(D_i - \bar{D})^2$	2,25	0,25	0,25	0,25	0,25	2,25	**5,5**

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{15}{6} = 2,5$$

$$s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{5,5}{5}} = 1,05$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{1,05}{\sqrt{6-1}} = 0,47$$

$$T_c = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{2,5-0}{0,47} = 5,32$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,10$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$v = 5 \ , \ \alpha = 0,10 \Rightarrow T_{0,10} = 1,476$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $5,32 > 1,476$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن الطريقة الجديدة المتبعة في المراجعة ساهمت في جعل متوسط علامات الطلبة أكبر من متوسطهم قبل اتباعها.

رابعا: اختبار الفرضيات حول نسبة المجتمع P

1- تذكير بتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

مما سبق، توصلنا إلى أن أفضل مقدِّر غير متحيز للنسبة الحقيقية لظاهرة معينة في المجتمع P، هو نسبة تلك الظاهرة في العينة $\hat{p}$، وأنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وحجم العينة المسحوبة كبيرا، أي: $n \geq 30$، فتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}}$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول النسبة الحقيقية لظاهرة ما في للمجتمع، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية لظاهرة ما في المجتمع P تساوي قيمة ثابتة P_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = P_0$ ، $H_1: P \neq P_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\hat{p}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة P_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحدهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية لظاهرة ما في المجتمع P تساوي أو تقل عن قيمة ثابتة P_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P \leq P_0$ ، $H_1: P > P_0$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P = P_0$ ، $H_1: P > P_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية أكبر من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\hat{p}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة P_0 المفترضة، وقيمة

الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية لظاهرة ما في المجتمع P تساوي أو تزيد عن قيمة ثابتة P_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P \geq P_0$ ، $H_1: P < P_0$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P = P_0$ ، $H_1: P < P_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية أقل من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\hat{p}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة P_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P-Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P-Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P-Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P-Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة P– الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة P_0 المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. يمكن اختبار فرض معين حول القيمة P_0 في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو: $I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$

إذا كان: $P_0 \in \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $P_0 \notin \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $P_0 \geq \hat{p} - Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $P_0 < \hat{p} - Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $P_0 \leq \hat{p} + Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $P_0 > \hat{p} + Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال10: وُجِدَ في مدينة ما أن نسبة الأمية للأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة هو 12,60%، فتم اعتماد برنامج جديد للقضاء على هذه الظاهرة، وللتأكد من أن البرنامج ساهم في تخفيض نسبة الأمية، اختيرت عشوائيا عينة من 200 شخص يقطنون بتلك المدينة، فوجد أن منهم 15 شخصا أميا. اختبر مدى نجاعة البرنامج عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = 0{,}126$ ، $H_1: \mu < 0{,}126$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن حجم العينة كبير، فإن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{15}{200} = 0{,}075 \Rightarrow \hat{q} = 1-\hat{p} = 1-0{,}075 = 0{,}925$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}126\times 0{,}874}{200}} = 0{,}023$$

$$Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}075-0{,}126}{0{,}023} = -2{,}22$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}05} = -1{,}64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-2{,}22 < -1{,}64$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن البرنامج ساهم في تخفيض نسبة الأمية، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وليس ناتجا عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = -2{,}22$، فإن:

$$P - Value = P(Z \le Z_c) = (Z \le -2{,}22) = 0{,}0132$$

بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha = 0{,}05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\hat{p} + Z_\alpha.\sigma_{\hat{p}} = 0{,}075 + 1{,}64(0{,}023) = 0{,}1127$$

نلاحظ أن: $(P_0 = 0{,}126) > 0{,}1127$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1 وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

خامسا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي مجتمعين $P_1 - P_2$

1- تذكير توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

مما سبق، توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا منهما عينتين كبيرتي الحجم، أي: $n_1 \ge 30$ و $n_2 \ge 30$، فوفقا لنظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}}$$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب

تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول الفرق بين نسبتي مجتمعين $(P_1 - P_2)$، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن نسبتي المجتمعين الحقيقيتين متساويتين، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 = P_2$ ، $H_1: P_1 \neq P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 \neq 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $(P_1 - P_2 = 0)$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فنحصل على Z المحسوبة التالية:

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحدهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول P_1 تساوي أو تقل عن النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني P_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 \leq P_2$ ، $H_1: P_1 > P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0: P_1 - P_2 \leq 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 > 0$ أو $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 > 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول أكبر من النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $(P_1 - P_2 = 0)$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فنحصل على Z المحسوبة التالية:

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول P_1 تساوي أو تفوق النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني P_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 \geq P_2$ ، $H_1: P_1 < P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0: P_1 - P_2 \geq 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 < 0$ أو $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 < 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول أقل من النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $(P_1 - P_2 = 0)$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فنحصل على Z المحسوبة التالية:

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P-Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P-Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P-Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P-Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P-Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P-Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للفرق بين نسبتين حقيقيتين لمجتمعين $(P_1 - P_2)$ – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –. فإذا كانت قيمة $(P_1 - P_2)$ المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

يمكن اختبار فرض معين حول الفرق $(P_1 - P_2)$ في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو:

$$I_n = \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \quad ; \quad (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$$

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) \in \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \quad ; \quad (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) \notin \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \quad ; \quad (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) \geq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: جميع الحالات السابقة لاختبار الفرضيات الخاصة بالفرق بين نسبتي مجتمعين تمت على أساس فرض العدم يساوي الصفر، يساوي أو يفوق الصفر، يساوي أو يقل عن الصفر، ويمكن أيضا اختبار أن الفرق بين متوسطين يساوي، يساوي أو يفوق، يساوي أو يقل عن قيمة معينة وليس الصفر فقط، باتباع نفس الخطوات السابقة.

مثال11: مصنع لإنتاج البطاريات يستخدم آلتين للإنتاج، الآلة(1) والآلة(2)، يدعي صاحب المصنع أن نسبة المعيب الذي تنتجه الآلة(1) أكبر مما تنتجه الآلة(2)، وللتأكد من مدى صحة ادعائه سحبنا عينتين مستقلتين، الأولى من إنتاج الآلة الأولى، وتحتوي على 50 بطارية، فوجدنا بها %8 من البطاريات معيبة، والثانية من إنتاج الآلة الثانية وتحتوي على 100 بطارية، فوجدنا بها %5 من البطاريات معيبة. اختبر صحة ادعاء صاحب المصنع عند مستوى معنوية %5، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 = P_2$ ، $H_1: P_1 > P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 > 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0,08 - 0,05 = 0,03$$

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,08\times0,92}{50} + \frac{0,05\times0,95}{100}} = 0,044$$

$$Z_c = \frac{0,03}{0,044} = 0,68$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05 \Rightarrow Z_{0,05} = 1,64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $0,68 < 1,64$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن ادعاء صاحب المصنع أن نسبة المعيب الذي تنتجه الآلة(1) أكبر مما تنتجه الآلة(2) ليس صحيحا.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين، و$\alpha = 0,05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = 0,68$، فإن:

$$P - Value = P(Z \geq Z_c) = P(Z \geq 0,68) = P(Z \leq -0,68) = 0,2483$$

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين و $\alpha = 0{,}05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = 0{,}03 - 1{,}64(0{,}044) = -0{,}042$$

نلاحظ أن: $(P_1 - P_2 = 0) > -0{,}042$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

سادسا: اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع σ^2

1- تذكير بتوزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

مما سبق، توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في مجتمع ما، تباينه σ^2 معلوم، فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1$. أي: $S^2 \to \chi^2_{v=n-1}$. والإحصائية الملائمة هي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول تباين المجتمع الحقيقي، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن تباين المجتمع الحقيقي σ^2 يساوي قيمة ثابتة σ_0^2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة S^2 المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة σ_0^2 المفترضة، فنحصل على: $\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$، والتي تسمى بـ: χ^2 المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $\chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}$، نحدهما انطلاقا من جدول توزيع كاي مربع.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $\chi_c^2 \in \left[\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} , \chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $\chi_c^2 \notin \left[\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} , \chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن تباين المجتمع الحقيقي σ^2 يساوي أو يقل عن قيمة ثابتة σ_0^2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن التباين الحقيقي أكبر من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة S^2 المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة σ_0^2 المفترضة، فنحصل على: $\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$، والتي تسمى بـ: χ^2 المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة هي: $\chi^2_{(v\,,\ \alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع كاي مربع.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $\chi_c^2 \leq \chi^2_{(v\,,\ \alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $\chi_c^2 > \chi^2_{(v\,,\ \alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن تباين المجتمع الحقيقي σ^2 يساوي أو يفوق قيمة ثابتة σ_0^2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن التباين الحقيقي أقل من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة S^2 المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة σ_0^2 المفترضة، فنحصل على: $\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$، والتي تسمى بـ: χ^2 المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة هي: $\chi^2_{(v\,,\ 1-\alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع كاي مربع.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $\chi_c^2 \geq \chi^2_{(v\,,\ 1-\alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

- إذا كان: $\chi_c^2 < \chi^2_{(v\,,1-\alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P-Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P-Value = 2P(\chi^2 \geq \chi_c^2)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P-Value = P(\chi^2 \geq \chi_c^2)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P-Value = P(\chi^2 \leq \chi_c^2)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P-Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P-Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة $-\sigma^2$ الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة σ_0^2 المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. يمكن اختبار فرض معين حول القيمة σ_0^2 في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو: $$I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$$

إذا كان: $\sigma_0^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}} \ ; \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\sigma_0^2 \notin \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}} \ ; \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\sigma_0^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v,\ \alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\sigma_0^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v,\ \alpha)}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\sigma_0^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v,\ 1-\alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v,\ 1-\alpha)}} < \sigma_0^2$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال12: يدعي مدير مصنع لصناعة نوع معين من الأنابيب، أن سمك جدار الأنابيب المنتجة يتوزع طبيعيا بتباين يساوي 0,0009 ، غير أن مسؤول الرقابة على الجودة بالمصنع لم يقتنع بذلك، فقام بسحب عينة عشوائية تحتوي على 20 أنبوبا، فوجد أن تباين سمك جدار الأنابيب بالعينة يساوي 0,0016. اختبر صحة ادعاء مدير المصنع عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، مستوى المعنوية الناتج، مستوى الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma^2 = 0{,}0009$ ، $H_1: \sigma^2 \neq 0{,}0009$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – سمك جدار الأنابيب - موزع طبيعيا، فإن تباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 20 - 1 = 19$.

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\chi_c^2 = \frac{(20-1)0{,}0016}{0{,}0009} = 33{,}78$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(19,\ 0{,}025)} = 32{,}852 \\ \chi^2_{\left(v, 1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(19,\ 0{,}975)} = 8{,}907 \end{cases}$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $33{,}78 \notin [8{,}907\ ,\ 32{,}852]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن ادعاء مدير المصنع ليس صحيحا ومسؤول الجودة كان محقا في عدم قناعته بهذا الادعاء، وأن الفرق ما بين التباين الحقيقي والتباين المقدر من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $\chi_c^2 = 33{,}78$، و$v = 19$، فإن:

$$P - Value = 2P(\chi^2 \geq \chi_c^2) = 2P(Z \geq 33{,}78)$$

من خلال جدول توزيع كاي مربع بالملحق رقم 4، نلاحظ أن القيمة (33,78) تقع بين القيمتين (32,852) و (36,191)، وهذا يبين أن وهذا يبين أن المساحة على يسار (33,78) تقل عن 0,025، وبضرب هذه المساحة في 2 نجد أنها تقل عن 0,05، أي أنها تقل عن α، وبالتالي نتخذ القرار التالي: بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0,05$، فإن مجال الثقة هو: $I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

$$I_n = \left[\frac{(20-1)0{,}0016}{32{,}852} \quad ; \quad \frac{(20-1)0{,}0016}{8{,}907}\right]$$
$$I_0 = [0{,}000925 \quad ; \quad 0{,}0034\,]$$

نلاحظ أن: $(\sigma_0^2 = 0{,}0009) \notin I_0 = [0{,}000925 \quad ; \quad 0{,}0034\,]$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

سابعا: اختبار الفرضيات حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

1- تذكير بتوزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

مما سبق، توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وموزع طبيعيا في كليهما، فإن توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية: $v_1 = n_1 - 1$ و $v_2 = n_2 - 1$، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F_{v_1,v_2}$، وبما أن طبيعة توزيع $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو توزيع فيشر، فإنه يحول إلى F كما يلي: $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 متساويين، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad ، \quad H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_2^2$

يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad ، \quad H_1: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي S_1^2 و S_2^2 المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ المفترضة، فنحصل على: $F_c = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$، والتي تسمى بـ: F المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}$، نحدهما انطلاقا من جدول توزيع فيشر.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $F_c \in \left[F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ ,\ F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $F_c \notin \left[F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ ,\ F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ يساوي أو يقل عن الواحد الصحيح، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين أكبر من الواحد الصحيح فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $F = \dfrac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي S_1^2 و S_2^2 المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ المفترضة، فنحصل على: $F_c = \dfrac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$، والتي تسمى بـ: F المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة هي: $F_{(v_1,v_2,\alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع فيشر.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $F_c \leq F_{(v_1,v_2,\alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $F_c > F_{(v_1,v_2,\alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

3-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ يساوي أو يفوق الواحد الصحيح، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين أقل من الواحد الصحيح فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي S_1^2 و S_2^2 المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ المفترضة، فنحصل على: $F_c = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$، والتي تسمى بـ: F المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة هي: $F_{(v_1,v_2\,,1-\alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع فيشر.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $F_c \geq F_{(v_1,v_2\,,1-\alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $F_c < F_{(v_1,v_2\,,1-\alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = 2P(F \geq F_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(F \geq F_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(F \leq F_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. يمكن اختبار فرض معين حول القيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو:

$$I_n = \left[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\left(v_1, v_2, \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\left(v_1, v_2, 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$$

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\left(v_1, v_2, \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\left(v_1, v_2, 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \notin \left[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\left(v_1, v_2, \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{\left(v_1, v_2, 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{(v_1, v_2, \alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{(v_1, v_2, \alpha)}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{(v_1, v_2, 1-\alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{(v_1, v_2, 1-\alpha)}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: جميع الحالات السابقة لاختبار الفرضيات الخاصة بنسبة تبايني مجتمعين تمت على أساس فرض العدم يساوي الواحد الصحيح، يساوي أو يفوق الواحد الصحيح، يساوي أو يقل عن الصحيح، ويمكن اختبار أن نسبة تبايني مجتمعين يساوي، يساوي أو يفوق، يساوي أو يقل عن قيمة معينة وليس الواحد الصحيح فقط، باتباع نفس الخطوات السابقة.

مثال13: بغرض معرفة معنوية الفرق بين تبايني أوزان أكياس الدقيق في المؤسسين A و B، سحبت عينة عشوائية مكونة من 7 أكياس من المؤسسة A، فوجد أن تباينها يساوي 0,039، وعينة عشوائية أخرى مكونة من 6 أكياس من المؤسسة B، فوجد أن تباينها يساوي 0,022. اختبر تساوي تبايني أوزان أكياس الدقيق عند مستوى معنوية 5%، بطريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مستوى الثقة، علما أن أوزان أكياس الدقيق في المؤسسين موزع طبيعيا.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ ، $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0:\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}=1$ ، $H_1:\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}\neq 1$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – أوزان أكياس الدقيق - موزع طبيعيا، فإن نسبة تبايني العينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية:

$v_1=n_A-1=7-1=6$ و $v_2=n_B-1=6-1=5$، أي: $\frac{S_A^2}{S_B^2}\rightarrow F_{6,7}$،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $F=\frac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $F_c=\frac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{1}=\frac{\frac{0,039}{0,022}}{1}=1,77$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha=0,05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha=0,05\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{0,05}{2}=0,025\Rightarrow\begin{cases}F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}=F_{(6,5,\ 0,025)}=6,98\\ F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}=F_{(6,5,\ 0,975)}=\frac{1}{F_{(5,6,\ 0,025)}}=\frac{1}{5,99}=0,17\end{cases}$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $1,77\in[0,17\ \ ,\ \ 6,98\ ]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن تبايني أوزان أكياس الدقيق في المؤسسين A و B متساويين، وأن الفرق ما بين نسبتي التباين الحقيقي ونسبتي التباين المقدر من بيانات العينتين هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha=0,05$ ، والقيمة المشاهدة $F_c=1,77$، و$v_1=6$، و$v_2=5$، فإن:

$$P-Value=2P(F\geq F_c)=2P(F\geq 1,77)$$

من خلال جدول توزيع فيشر بالملحق رقم 5، نلاحظ أن القيمة (1,77) المساحة على يسار القيمة (1,77) تفوق 0,1، وبضرب هذه المساحة في 2 نجد أنها تفوق 0,05، أي أنها تفوق α، وبالتالي نتخذ القرار التالي:

بما أن: $P-Value>\alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha=0,05$، فإن مجال الثقة هو: $I_n=\left[\frac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}}\ \ ;\ \ \frac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

$$I_n=\left[\frac{\frac{0,039}{0,022}}{6,98}\ \ ;\ \ \frac{\frac{0,039}{0,022}}{0,17}\right]$$

$$I_0=[0,25\ \ ;\ \ 10,43\ ]$$

نلاحظ أن: $\left(\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}=1\right) \in I_0=[0,25 \quad ; \quad 10,43\,]$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

تمارين محلول

التمرين الأول:

عرف باختصار المصطلحات التالية:

- الفرض الاحصائي؛ - فرض العدم؛ - الفرض البديل؛ - إحصائية الاختبار؛
- منطقة القبول؛ - القيمة الحرجة؛ - الاختبار ذو طرفين.

التمرين الثاني:

إذا كانت أوزان تلاميذ أحد المدارس الابتدائية موزعة طبيعيا، بانحراف معياري يساوي 3 كلغ، وسحبت منها عينة عشوائية قوامها 10 تلاميذ، فوجد أن متوسطها الحسابي يساوي 24 كلغ. اختبر صحة الادعاء القائل بأن متوسط أوزان التلاميذ في المدرسة يقل عن 25 كلغ، عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية الناتج.

التمرين الثالث:

في دراسة أجريت على أحد المحلات التجارية، وجد أن عدد الزبائن الذين يرتادونها يوميا يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط يساوي 40 زبونا، وبهدف زيادة عدد زبائن المحل، اتبعت طريقة جديدة في عرض البضائع، وتم تسجيل عدد المترددين على المحل يوميا، لمدة 10 أيام بعد اتباع الطريقة الجديدة، فكانت البيانات كما يلي:

53، 40، 42، 39، 50، 45، 51، 43، 38، 39.

اختبر فيما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلى زيادة متوسط عدد الزبائن عند مستوى معنوية 10%.

التمرين الرابع:

أجريت دراسة إحصائية حول درجات الحرارة بمنطقتين مختلفتين A و B، فوجد أن درجات الحرارة بالمنطقة A تتوزع طبيعيا بانحراف معياري يساوي 6 درجات، بينما بالمنطقة B فتتوزع طبيعيا بانحراف معياري قدره 5 درجات. وقصد التأكد من وجود فرق معنوي في درجات الحرارة بالمنطقتين، تم تتبع هذه الظاهرة بالمنطقة A لمدة 16 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 30 درجة، كما تم تتبعها بالمنطقة B لمدة 12 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 33 درجة. اختبر وجود فرق معنوي من عدمه لمتوسط درجة الحرارة بالمنطقتين عند مستوى معنوية 1%.

التمرين الخامس:

بهدف التأكد من صحة الادعاء القائل بأن متوسط الكمية المنتجة من مادة معينة بالمصنع A أقل مما ينتجه المصنع B، تم تسجيل كمية الانتاج بالمصنع A لمدة 15 يوما، فوجد أن متوسطها يساوي 225 قنطار بانحراف معياري قدره 10 قناطير، كما تم تسجيل كمية الانتاج بالمصنع B لمدة 10 أيام، فوجد أن متوسطها يساوي 210 قنطار بانحراف معياري قدره 7 قناطير. إذا علمت أن الكمية المنتجة من هذه المادة بالمصنعين تتوزع طبيعيا بتباينين غير متساويين، اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى معنوية 5%.

التمرين السادس:

الجدول التالي يبين نتائج دراسة احصائية أجريت على عينة من عمال مؤسستين مختلفتين، حول الأجور الشهرية:

	حجم العينة	متوسط الأجور الشهرية – دج-	الانحراف المعياري
المؤسسة (1)	36	27000	300
المؤسسة (2)	49	25000	400

إذا علمت أن الأجور الشهرية بالمؤسستين تتبع التوزيع الطبيعي، اختبر الفرضيتين التاليتين عند مستوى معنوية 10%.

$$H_0:\ \mu_A - 1800 = \mu_B \qquad H_1:\ \mu_A - 1800 \neq \mu_B$$

التمرين السابع:

سحبت عينة عشوائية من مصنع لإنتاج عجلات السيارات، تحتوي على 80 عجلة، فوجد أن بها 4 عجلات تالفة، فهل نستطيع القول أن نسبة العجلات التالفة في الإنتاج الكلي للمصنع تقل عن 7%، عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

التمرين الثامن:

نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات قبل اصدار قانون يلزم استعماله هو 60% في أحد الولايات، وقصد معرفة ما إذا كانت النسبة قد زادت بعد اصدار قانون الزام الاستعمال، اختيرت عينة عشوائية مكونة من 300 سائق، فوجد منهم 195 يستعملون الحزام. اختبر فرضية زيادة نسبة مستعملي حزام الأمان بالولاية عند مستوى معنوية 5%.

التمرين التاسع:

سحبت عينتان عشوائيتان من منتجات آلتين مستقلتين لإنتاج نوع معين من الأكياس البلاستيكية، فأعطتا النتائج المرفقة بالجدول التالي:

	حجم العينة	عدد الأكياس المعيبة
الآلة الأولى (1)	50	6
الآلة الثانية (2)	70	7

اختبر فرضية وجود فرق معنوي بين نسبة المعيب في الآلتين عند مستوى معنوية 10%.

التمرين العاشر:

مجتمعان مستقلان، الأول سحبنا منه عينة عشوائية بها 40 شخصا، فوجدنا 30 منهم يملكون شهادات جامعية، والثاني سحبنا منه عينة عشوائية بها 50 شخصا، فوجدنا 26 منهم يملكون شهادات جامعية. هل يمكن أن نقول أن الفرق ما بين نسبة الذين يملكون شهادات جامعية بالمجتمع الأول والمجتمع الثاني يساوي الربع، وذلك عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الحادي عشر:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 25، وكان: $\sum_{i=1}^{25}(X_i - \bar{X})^2 = 2880$. اختبر فرضية أن تباين المجتمع يقل عن 144 عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الثاني عشر:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\mu_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 5، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 7، وحصلنا على البيانات التالية:

$$S_1^2 = 2273 \qquad S_2^2 = 1759$$

اختبر فرضية أن تباين المجتمع الأول يساوي ضعف تباين المجتمع الثاني باستخدام مستوى معنوية 10%.

الحلول

حل التمرين الأول:

التعريف بالمصطلحات التالية:

- **الفرض الاحصائي:** هو عبارة عن تخمين أو ادعاء حول المعالم المجهولة لمجتمع أو أكثر، قد يتم قبوله أو رفضه، وذلك بعد اخضاعه للاختبار الإحصائي، باستخدام عينة عشوائية يتم سحبها من المجتمع.

- **فرض العدم:** هو الفرض الذي يريد الباحث اختباره، ويعتقد أنه صحيح إلى أن يثبت عكس ذلك، ويرمز له بالرمز H_0.

- **الفرض البديل:** هو الفرض الذي يقبل كبديل لفرض العدم عند رفض هذا الأخير، ويرمز له بالرمز H_1.

- **إحصائية الاختبار:** هي متغير عشوائي ذو توزيع احتمالي معلوم عندما يكون فرض العدم صحيحا، حيث تحسب قيمة إحصائية الاختبار من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع المدروس، ويتم مقارنتها بالقيمة الحرجة المستخرجة من جداول خاصة من أجل اتخاذ القرار برفض أو قبول فرض العدم H_0.

- **منطقة القبول:** هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى قبول فرض العدم H_0 ورفض الفرض البديل H_1.

- **القيمة الحرجة:** هي القيمة التي تفصل بين منطقتي الرفض والقبول.

- **الاختبار ذو طرفين:** يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة لا تساوي تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمتين، قيمة أقل من القيمة المفترضة وأخرى أكبر منها.

حل التمرين الثاني:

1- حساب مستوى المعنوية الناتج:

- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu = 25$ ، $H_1: \mu < 25$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أوزان التلاميذ - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{24-25}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = -1{,}05$

وعليه فإن مستوى المعنوية الناتج هو:

$$P - Value = P(Z \leq Z_c) = P(Z \leq -1{,}05) = 0{,}1469$$

2- اختبار صحة الادعاء:

بما أن: $(P - Value = 0{,}1469) > (\alpha = 0{,}05)$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نرفض الادعاء بأن متوسط أوزان التلاميذ في المدرسة يقل عن 25 كلغ، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة فقط.

حل التمرين الثالث:

1- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu = 40$ ، $H_1: \mu > 40$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

2- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمع – عدد الزبائن - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = n - 1 = 10 - 1 = 9$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

3- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** $T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{53+40+42+39+50+45+51+43+38+39}{10} = \frac{440}{10} = 44$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{270}{9}} = \sqrt{30{,}44} = 5{,}52$$

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{44-40}{\frac{5{,}52}{\sqrt{10-1}}} = 2{,}17$$

4- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** $\alpha = 0{,}10$

5- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:**

$$\alpha = 0{,}10 \Rightarrow T_{0,10} = 1{,}383$$

6- **اتخاذ القرار المناسب:**

بما أن: $2{,}17 > 1{,}383$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن الطريقة الجديدة قد أدت إلى زيادة عدد الزبائن، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

حل التمرين الرابع:

1- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – درجات الحرارة - موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين معلومين، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}$$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 30 - 33 = -3$$
$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$
$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(6)^2}{16} + \frac{(5)^2}{12}} = 2{,}08$$
$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}} = \frac{-3-0}{2{,}08} = -1{,}44$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}01$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005 \Rightarrow Z_{0{,}005} = 2{,}58$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|-1{,}44| < 2{,}58$ أي: $Z_c < \left|Z_{\frac{\alpha}{2}}\right|$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن متوسطي درجات الحرارة بالمنطقتين متساوي، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

<u>**حل التمرين الخامس:**</u>

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0\!: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1\!: \mu_A < \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0\!: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1\!: \mu_A - \mu_B < 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين مجهولين وغير متساويين وحجم العينتين صغير، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A-1}+\frac{\left(\frac{S_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B-1}} = \frac{\left(\frac{(7)^2}{10}+\frac{(10)^2}{15}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(7)^2}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{(10)^2}{15}\right)^2}{15-1}} = 22{,}90 \approx 23$$

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 210 - 225 = -15$$
$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$
$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(7)^2}{10} + \frac{(10)^2}{15}} = 3{,}40$$
$$T_c = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}} = \frac{-15-0}{3{,}40} = -4{,}41$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow T_{0,05} = -1,714$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-4,41 < -1,714$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل الادعاء القائل بأن متوسط الكمية المنتجة من مادة معينة بالمصنع A أقل مما ينتجه المصنع B، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

<u>**حل التمرين السادس:**</u>

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:

$$H_0: \mu_1 - 1800 = \mu_2 \quad ، \quad H_1: \mu_1 - 1800 \neq \mu_2$$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 1800$، $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 1800$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – الأجور الشهرية- موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين مجهولين، وحجم العينتين كبير أي: $n_1 > 30$ و $n_2 > 30$، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 27000 - 25000 = 2000$$
$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 1800$$
$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(300)^2}{36} + \frac{(400)^2}{49}} = 75,93$$
$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{2000 - 1800}{75,93} = 2,63$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,10}{2} = 0,05 \Rightarrow Z_{0,05} = 1,64$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $2,63 > 1,64$، فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن الفرق ما بين متوسط الأجر الشهري بالمؤسستين لا يساوي 1800دج.

حل التمرين السابع:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = 0,07$ ، $H_1: P < 0,07$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن حجم العينة كبير، فإن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{4}{80} = 0,05 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,07 \times 0,93}{80}} = 0,028$$

$$Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0,05-0,07}{0,028} = -0,71$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05 \Rightarrow Z_{0,05} = -1,64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-0,71 > -1,64$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن نسبة العجلات التالفة في الإنتاج الكلي للمصنع لا تقل عن 7%، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار، و$\alpha = 0,05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = -0,71$، فإن:

$$P - Value = P(Z \leq Z_c) = (Z \leq -0,71) = 0,2389$$

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha = 0,05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\hat{p} + Z_\alpha . \sigma_{\hat{p}} = 0,05 + 1,64(0,028) = 0,096$$

نلاحظ أن: $(P_0 = 0,07) < 0,096$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

حل التمرين الثامن:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = 0,6$ ، $H_1: \mu > 0,6$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن حجم العينة كبير، فإن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{195}{300} = 0{,}65 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}6\times 0{,}4}{300}} = 0{,}028$$

$$Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}65-0{,}60}{0{,}028} = 1{,}78$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}05} = 1{,}64$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $1{,}78 > 1{,}64$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن نسبة مستعملي حزام الأمان قد زادت بعد اصدار قانون الزام الاستعمال، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

<u>**حل التمرين التاسع:**</u>

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 = P_2$ ، $H_1: P_1 \neq P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 \neq 0$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

$$\hat{p}_1 = \frac{6}{50} = 0{,}12 \Rightarrow \hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$$

$$\hat{p}_2 = \frac{7}{70} = 0{,}10 \Rightarrow \hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2 = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}12 - 0{,}10 = 0{,}02$$

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}12\times 0{,}88}{50} + \frac{0{,}10\times 0{,}90}{70}} = 0{,}058$$

$$Z_c = \frac{0{,}02}{0{,}058} = 0{,}34$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}10 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}10}{2}} = Z_{0{,}05} = 1{,}64$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|0{,}34| < 1{,}64$ أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين نسبة المعيب في الآلتين.

حل التمرين العاشر:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: ،

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0{,}25$ ، $H_1: P_1 - P_2 \neq 0{,}25$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0{,}25}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

$$\hat{p}_1 = \frac{30}{40} = 0{,}75 \Rightarrow \hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$
$$\hat{p}_2 = \frac{26}{50} = 0{,}52 \Rightarrow \hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2 = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$$
$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}75 - 0{,}52 = 0{,}23$$
$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}75\times0{,}25}{40} + \frac{0{,}52\times0{,}48}{50}} = 0{,}098$$
$$Z_c = \frac{0{,}23-0{,}25}{0{,}098} = -0{,}204$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|-0{,}204| < 1{,}64$ أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي يمكن القول بأن الفرق ما بين نسبة الذين يملكون شهادات جامعية بالمجتمع الأول والمجتمع الثاني يساوي الربع.

حل التمرين الحادي عشر:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma^2 = 144$ ، $H_1: \sigma^2 < 144$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، فإن تباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 25 - 1 = 24$.

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{25}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{2880}{25-1}=120$$

$$\chi_c^2=\frac{(25-1)120}{144}=20$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha=0{,}05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha=0{,}05\Rightarrow \chi^2_{(v\,,1-\,\alpha)}=\chi^2_{(24\,,\ \ 0{,}95)}=13{,}848$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $20<13{,}848$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن تباين المجتمع لا يقل عن 144.

<u>التمرين الثاني عشر:</u>

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0:\sigma_A^2=2\sigma_B^2$ ، $H_1:\sigma_A^2\neq 2\sigma_B^2$

يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0:\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}=2$ ، $H_1:\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}\neq 2$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا، فإن نسبة تبايني العينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية:

$v_1=n_A-1=5-1=4$ و $v_2=n_B-1=7-1=6$، أي: $\frac{S_A^2}{S_B^2}\rightarrow F_{4,6}$،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:
$$F=\frac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:
$$F_c=\frac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{2}=\frac{\frac{2273}{1759}}{2}=0{,}67$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha=0{,}10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha=0{,}10\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{0{,}10}{2}=0{,}05\Rightarrow\begin{cases}F_{\left(v_1,v_2\,,\frac{\alpha}{2}\right)}=F_{(4,6\,,\ \ 0{,}05)}=4{,}53\\ F_{\left(v_1,v_2\,,1-\frac{\alpha}{2}\right)}=F_{(4,6\,,\ \ 0{,}95)}=\frac{1}{F_{(6,4,\ \ 0{,}05)}}=\frac{1}{6{,}16}=0{,}16\end{cases}$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $0{,}67\in[0{,}16\ \ ,\ \ 4{,}53\ ]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن تباين المجتمع الأول يساوي ضعف تباين المجتمع الثاني.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

عرف باختصار المصطلحات التالية:

- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين؛ - الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار؛ - منطقة الرفض؛

- الخطأ من النوع الأول.؛ - الخطأ من النوع الثاني؛ - مستوى المعنوية الناتج.

التمرين الثاني:

إذا كانت أوزان تلاميذ أحد المدارس الابتدائية موزعة طبيعيا، وسحبت منها عينة عشوائية قوامها 10 تلاميذ، فوجد أن متوسطها الحسابي يساوي 26 كلغ، وتباينها يساوي 16. اختبر صحة الادعاء القائل بأن متوسط أوزان التلاميذ في المدرسة يفوق 25 كلغ عند مستوى معنوية 10% باستخدام طريقة مجال الثقة.

التمرين الثالث:

في دراسة أجريت على أحد المحلات التجارية، وجد أن عدد الزبائن الذين يرتادونها يوميا يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط يساوي 40 زبونا وتباين يساوي 25، وبهدف زيادة عدد زبائن المحل، اتبعت طريقة جديدة في عرض البضائع، وتم تسجيل عدد المترددين على المحل يوميا، لمدة 10 أيام بعد اتباع الطريقة الجديدة، فوجد أنه يساوي 41 زبونا.

اختبر فيما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلى زيادة متوسط عدد الزبائن عند مستوى معنوية 1%. باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج وطريقة مجال الثقة.

التمرين الرابع:

بهدف التأكد من صحة الادعاء القائل بأن متوسط نسبة الرطوبة بالمنطقة A أقل منها في المنطقة B، تم تتبع هذه الظاهرة بالمنطقة A لمدة 35 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 30% بانحراف معياري قدره 3%، كما تم تتبعها بالمنطقة B لمدة 40 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 35% بانحراف معياري قدره 4%.

إذا علمت أن نسبة الرطوبة بالمنطقتين تتوزع طبيعيا، اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى معنوية 5% باستخدام طريقة مستوى المعنوية الناتج، وطريقة مجال الثقة.

التمرين الخامس:

أخذت عينتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين، والجدول التالي يبين بعض احصاءاتها:

	حجم العينة	متوسط العينة	تباين العينة
المجتمع الأول A	8	25,5	3,5
المجتمع الثاني B	9	22,3	9,4

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني، بافتراض أن الانحرافين المعياريين الحقيقيين المجهولين للمجتمعين غير متساويين. اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 5%. بطريقة مستوى المعنوية، ومستوى المعنوية الناتج، ومجال الثقة.

التمرين السادس:

البيانات التالية تمثل أوزان 10 أشخاص، قبل وبعد استخدام حمية غذائية معينة لإنقاص الوزن.

الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
قبل (A)	74	84	73	87	92	93	105	76	85	94
بعد (B)	72	81	67	81	86	86	97	70	79	87

المطلوب: هل ساهمت الحمية الغذائية المتبعة في جعل متوسط أوزان الأشخاص أقل من متوسطهم قبل اتباعها، عند مستوى معنوية 5%، علما أن أوزان الأشخاص تتبع التوزع الطبيعي.

التمرين السابع:

سحبت عينة عشوائية من مصنع لإنتاج نوع معين من خراطيم المياه، تحتوي على 50 خرطوما، فوجد أن بها 4 خراطيم تالفة، فهل نستطيع القول أن نسبة الخراطيم التالفة في الإنتاج الكلي للمصنع تساوي 5%، عند مستوى معنوية 10%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

التمرين الثامن:

نسبة مستعملي البطاقة الذهبية لسحب النقود بواسطة الموزع الآلي هو 40% في أحد الولايات، وقصد معرفة ما إذا كانت النسبة قد زادت بعد الحملة الاشهارية التي قامت بها مصالح البريد والمواصلات، اختيرت عينة عشوائية مكونة من 200 مواطن، فوجد منهم 170 يستعملون البطاقة الذهبية والسحب من الموزع الآلي. اختبر فرضية زيادة نسبة مستعملي البطاقة الذهبية والسحب من الموزع الآلي بالولاية عند مستوى معنوية 5%.

اختبر فرضية وجود فرق معنوي بين نسبة المعيب في الآلتين عند مستوى معنوية 5%.

التمرين التاسع:

مجتمعان مستقلان، الأول سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 80 شخصا، فوجدنا أن 50 منهم يملكون أجهزة كمبيوتر، والثاني سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 70 شخصا، فوجدنا أن 40 منهم يملكون أجهزة كمبيوتر. هل يمكن أن نقول أن الفرق ما بين نسبة الذين يملكون أجهزة كمبيوتر بالمجتمع الأول والمجتمع الثاني يفوق 5%، وذلك عند مستوى معنوية 10%.

التمرين العاشر:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 17، وكان $\sum_{i=1}^{17}(X_i - \bar{X})^2 = 576$. اختبر فرضية أن تباين المجتمع يساوي 33 عند مستوى معنوية 10%.

التمرين الحادي عشر:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\mu_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 15، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 18، وحصلنا على البيانات التالية:

$$S_1^2 = 36 \qquad S_2^2 = 25$$

اختبر فرضية أن تباين المجتمع الأول أكبر من ضعف تباين المجتمع الثاني باستخدام مستوى معنوية 10%.