محاضرات في مادة الاحصاء 03

تمهيد: مدخل إلى المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

تتميز أغلب الظواهر الاقتصادية والاجتماعية التي يتعامل معها الإنسان في حياته اليومية بطابع عشوائي، إلا أنه وعن طريق التجربة وجمع البيانات حولها يمكن ضبط هذه الظواهر بمجموعة من المعالم وحصر مجال تغيراتها، ومن ثم بناء نماذج احتمالية لسلوكياتها، أو ما يعرف بالقوانين الاحتمالية، هذا لا يعني أن سلوك أو اتجاه تغير ظاهرة ما أصبح مضبوط ومعروف بدقة، وإنما بصفة نسبية (90%، 98%) وبذلك أمكن التعايش مع هذه الظواهر بالرغم من طابعها العشوائي.

ونميز بين الظواهر العشوائية ذات الطابع الكمي المتقطع (متغير عشوائي منفصل) مثل: عدد حوادث المرور، عدد الأطفال في الأسرة...)، أو ظوهر عشوائية ذات الطابع الكمي المتصل (المتغير العشوائي المستمر) مثل: أوزان الرضع عند الولادة... وعليه هنالك مجموعتان من القوانين الاحتمالية:

- قوانين احتمالية لمتغير عشوائي منفصل.
- قوانين احتمالية لمتغير عشوائي متصل.

لكن قبل التطرق إلى مختلف القوانين الاحتمالية، دعنا نتطرق إلى الخطوات المنهجية التي تمكننا من معرفة نظريا القانون الاحتمالي الموافق أو الذي يخضع له متغير عشوائي(ظاهرة) ما.

تتمثل هذه الخطوات في:

1- تحديد وتعريف المتغير العشوائي الذي نحن بصدد دراسته.

2- جمع البيانات حول هذا المتغير إما عن طريق المسح الكلي (جمع البيانات من كل أفراد المجتمع الإحصائي) أو عن طريق عينة من الوحدات الإحصائية فنحصل على سلسلة من البيانات ($x, x_2, x_3, \ldots\ldots$.(x_n

3- إخضاع البيانات إلى التمثيل الإحصائي الوصفي وبناء التوزيع التكراري أو تحويل البيانات إلى توزيع تكراري وحساب النسب والتمثيل البياني وحساب المتوسط الحسابي X، والوسيط M_e ، والمنوال M_o (حساب مقاييس النزعة المركزية) وكذلك دراسة التشتت أي حساب الانحراف المعياري $\partial(x)$.

4- مقارنة نتائج الدراسة الإحصائية التطبيقية مع خواص أحد القوانين الاحتمالية النظرية وبذلك نخرج بفرضية أولية حول مدى مطابقة هذه النتائج التجريبية للقانون النظري.

- بالرغم من أن هذه المنهجية علمية إلا أنه يغلب علها الطابع الذاتي (تخضع للتقدير الذاتي)، وعليه لا بد من أداة علمية أكثر موضوعية لتأكيد أو نفي فرضية تطابق الخصائص، تتمثل هذه الأداة في اختبار الفرضيات التي نتطرق في فصل لاحق.

1) طبيعة المتغيرات:

المتغير: المتغير هو خاصية أو ميزة أو خصائص يشترك فيها أفراد المجتمع الإحصائي ولكنها تختلف من فرد إلى آخر.

فالعمر، الذكاء، طول القامة، الجنس، السن،.....الخ. هي متغيرات وتتميز هذه المتغيرات بأنها قابلة للقياس الكمي وبإمكانية تحديد قيمة لها.

ويمكن القول بأن المتغيرات مفهوم له معنى تجريبي ويعبر عنه بقيم مختلفة.

والمتغيرات عبارة عن ظاهرة أو ظواهر مختلفة أوصافها تختلف قيمتها باختلاف الحالات ومن أمثلتها درجة الحرارة في مناطق مختلفة أو في فترات مختلفة لمكان واحد, كمية الإنتاج الزراعي أو الصناعي......

ويأخذ المتغير فيها تتغير من طرف الآخر، والمتغير هو الوحدة الأساسية للتحليل الإحصائي.

أنواع المتغيرات: هناك عدة تقسيمات لأنواع المتغيرات فإذا أخذنا المتغيرات التي تقاس كميا تنقسم من حيث قيمتها العددية إلى نوعين هما:

أ) المتغير المتصل: يكون المتغير متصلا عندما يأخذ أي قيمة مندرجة على المقياس المستخدم مثلا: كمقياس درجات الحرارة باستخدام الترمومتر فالمتغير (درجة الحرارة) يأخذ أي قيمة بين رقمين صحيحين(36°و37° ويأخذ 36,1 _36,1 ....الخ.

ب) المتغير المنفصل: عندما يأخذ المتغير قيما محددة يطلق عليها متغير متقطعا وبمعنى آخر المتغير المتقطع (المنفصل) هو الذي يحتوي حداه على عدد محدود من القيم أو يحتوي عدد لانهائي من القيم ولكن منها قيمة محددة يمكن عدها أو ترتيبها في نهاية الأخرى. فعدد الأولاد أو الأفراد في الأسرة لابد

أن يكون صحيحا 1,2,3,...., عدد الطلاب في القسم، عدد السيارات في الشارع ...الخ. كلها متغيرات متقطعة.

- بالنسبة للنوعين السابقين يمكن إدراجها تحت فرع أو نوع المتغيرات الكمية وهي التي يمكن أن نصنفها عدديا فإنها أكبر أو أقل من قيمة معينة فمثلا: العمر، عدد سنوات التعليم، فهي يعبر عنها بالكمية.
- بالنسبة للنوع الثاني فهو ما يرتبط أو ما يعبر عنه بالنوع، وهي المتغيرات النوعية (الكيفية): أي ما يعرف بمصطلحات معينة Les modalités والمصطلحات هي كاختبارات (خيارات) التي تصف الأشياء بصفاتها مثلا: متغير الجنس (ذكر، انثى) أو الحالة العملية للفرد (مزارع، تاجر، نجار، عامل، بطال).

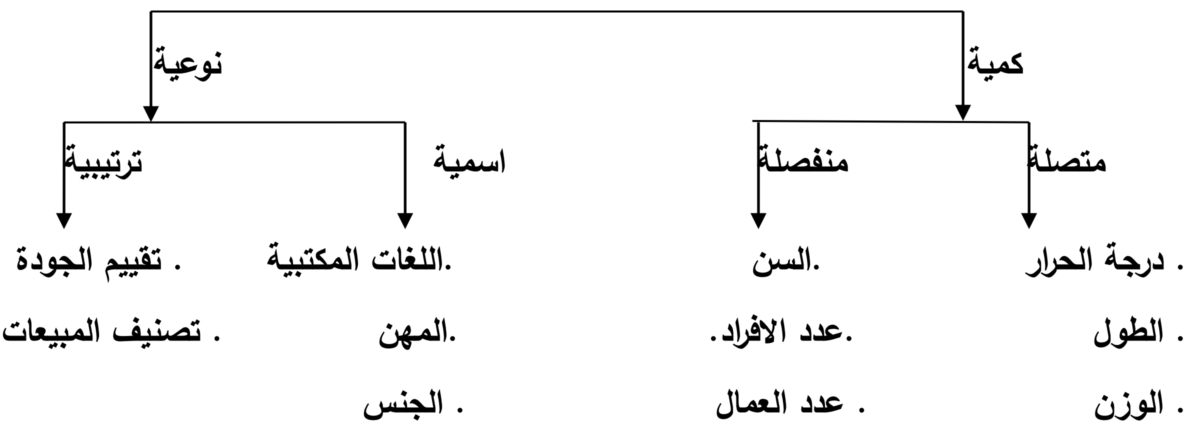
ويمكن تقسيم هذا النوع من المتغيرات إلى قسمين:

أ) <u>المتغيرات النوعية الاسمية (Nominale)</u>: وهي متغيرات مرتبطة بأسماء فهي فقط أسماء أو كلمات تميز الخاصية المدروسة فمثلا: الجنس فيه إمكانيتين فقط أنثى، ذكر، اللون المفضل (أحمر، أزرق).

ب) <u>المتغيرات النوعية الترتيبية (Ordinale)</u>: هي المتغيرات التي تحتوي على ترتيب معين فمثلا: درجة الإشباع في خدمة معينة فهناك عدة إجابات مثلا(راض تماما، راضي، غير راضي تماما).

المخطط التالي يلخص لنا أنواع المتغيرات:

أنواع المتغيرات



<u>العينة العشوائية:</u>

من أجل أن تكون العينة ممثلة للمجتمع نستخدم العينة العشوائية ونقول عن العينة عشوائية إذا كان لكل مفرد في المجتمع نفس الاحتمال لأن تكون في العينة، وتسمى هذه العينة بالعينة العشوائية البسيطة.

المتغير العشوائي:

بافتراض أن لكل مفردة من العينة قيمة (عدد) معينة، فإننا نحصل على دالة معرفة على فراغ العينة، وتسمى هذه الدالة بالمتغير العشوائي Random Variable، أو بالتحديد دالة المتغير Random Function، وفي العموم يمثل المتغير العشوائي ظاهرة طبيعية أو هندسية أو أي نوع آخر.

أو يعرف المتغير العشوائي بـ: هو قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة ويمكن اعتبار المتغير العشوائي كمتغير ممثل لمجمع قيم متغيرات معينة على مجال محدد أو في مجتمع معين.

- وياخذ المتغير العشوائي عددا محدودا Finite Number أو عددا غيلر محدود يمكن عده Countably infinite Number من القيم، ويسمى في هذه الحالة متغيرا عشوائيا منفصلا Discrete Random Variable، وحين يأخذ المتغير العشوائي عددا لا نهائيا من القيم لا يمكن عده، يسمى متغيرا عشوائيا متصلا أو غير منفصل Nondiscrete Random Variable.

المعلمة Parameter:

هي خاصية معينة تصف لنا مجتمعا قيد الدراسة ويصطلح على هذا المجتمع بالمجتمع الإحصائي، ومن أمثلة المعلمات، σ^2، μ .

حيث μ هو الوسط الحسابي للمجتمع ويحسب بالعلاقة : $\mu_x = \dfrac{\sum x_i}{N}$

و σ^2 هو تباين المجتمع ويحسب بالعلاقة: $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \mu_x)^2}{N}$

الإحصاءة Statistic:

هي خاصية تصف لنا العينة التي تمثل جزء من المجتمع الإحصائي الواحد ومن أمثلة الإحصائية المتوسط $\bar{x}$ والتباين s^2

حيث $\bar{x}$ هي الوسط الحسابي للعينة وتحسب بالعلاقة: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$

و s^2 هو تباين العينة ويعطى بالعلاقة التالية:
$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

التوزيع الاحتمالي:

تسمى مجموعة كل القيم الممكنة للمتغير العشوائي واحتمالاتها المناظرة: **التوزيع الاحتمالي**، ويكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد (1).

ونميز تبعا لنوع المتغير العشوائي بين التوزيع الاحتمالي المنفصل والتوزيع الاحتمالي المستمر.

2) التوزيع الاحتمالي المنفصل:

نفترض المتغير العشوائي المنفصل x يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots x_n$ مرتبة طبقا لترتيب معين، وتأخذ القيم بالاحتمالات التالية:

$$P(X=x_k)=f(x_k) \quad k=1,2,3,\ldots\ldots.n\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ومن الافضل وضع دالة الاحتمال والتي نشير إليها بالتوزيع الاحتمالي، في الصورة

$$P(X=x)= f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

لكل $x=x_k$ وتكون المعادلة السابقة مساوية للصفر لأي فئة أخرى x ، حيث $x, f(x)=0$.

وبصفة عامة تكون f(x) دالة احتمال إذا كان:

1- $f(x) \geq 0$
2- $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) = 1$

ويؤخذ هذا المجموع على كل قيم x الممكنة

مثال: عند رمي قطعة نقدية مرتين، وكانت x تمثل عدد الصور الممكن الحصول عليها، فإنه لكل نقطة في فراغ العينة يرتفق رقم لـx كالتالي:

نقطة العينة	HH	HT	TH	TT
x	2	1	1	0

الآن يمكننا إيجاد دالة الاحتمال التي تبع المتغير العشوائي x وبافتراض أن قطعة النقد متوازنة فإن:

P(HH)=1/4   P(HT)=1/4   P(TH)=1/4   P(TT)=1/4

وبالتالي: P(x=0)=P(TT)=1/4

P(x=1)=P(HT)+P(TH)=1/4+1/4=1/2

P(x=2)=P(HH)=1/4

وبالتالي فإن دالة الاحتمال يمكن الحصول عليها كالتالي:

x	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

أ- دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية

تعرف دالة التوزيع التراكمية، أو اختصارا دالة التوزيع للمتغير العشوائي x كالتالي:

$$F(x) = f(X \leq x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

حينما تأخذ x اي رقم حقيقي أي:

$$(-\infty \leq x \leq +\infty)$$

أي أن دالة التوزيع تحدد احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ اي قيمة أقل من أو تساوي x.

ولدالة التوزيع الخصائص التالية:

1. تكون F(x) دالة غير تناقصية أي $F(x) \leq F(y)$ إذاكانت $(x \leq y)$
2. $\lim_{n\to+\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$
3. $F(x)$ تكون مستمرة من اليمين، بمعنى أن $\lim_{n\to 0^+} F(x+h) = F(x)$ لكل قيم x.

- دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية المنفصلة

دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل x يمكن الحصول عليها من دالة الاحتمال لكل x في المدى $-\infty \leq x \leq +\infty$ كما يلي:

$$F(x)\begin{cases} 0 & -\infty \le x \le x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x \le x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ f(x_1)+\cdots f(x_n) & x_n \le x \le +\infty \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

من الواضح أن دالة الاحتمال للمتغير العشوائي المنفصل يمكن الحصول عليها من دالة التوزيع إذا قمنا بعمل التالي: $f(x) = F(x) \quad \lim_{x\to+\infty}(x) \ \ldots..(5)$

– القيم المتوقعة (التوقع)

التوقع للمتغير العشوائي المنفصل x الذي ياخذ القيم $x_1,x_2, \ldots x_n$ يعرف كالتالي:

$$E(x) = x_1P(X = x_1) + \cdots + x_nP(X = x_n) = \sum x_jP\left(X = x_j\right) \ldots.(6)$$

أو إذا كان $x_jP\left(X = x_j\right) = f\left(x_j\right)$

$$E(x) = x_1f(x_1) + \cdots + x_nf(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jf\left(x_j\right) = \sum_x xf(x) \ldots\ldots\ldots(7)$$

حيث أن الجمع الأخير يؤخذ على جميع قيم x، ونلاحظ أنه إذا كانت جميع الاحتمالات متساوية فإن:

$E(x) = \frac{x_1+x_2+\cdots\ldots+x_n}{n}$ .....(8) والتي هي ببساطة الوسط الحسابي للقيم $x_1,x_2, \ldots x_n$

– التباين والانحراف المعياري

غالبا ما يكون توقع المتغير العشوائي المنفصل هو وسطه ونرمز له بالرمز μ وكما رأينا سابقا في الإحصاء الوصفي، توجد كمية هامة في الاحتمال والإحصاء هي التباين، فإذا كان المتغير العشوائي x المنفصل الذي يأخذ القيم $x_1,x_2, \ldots x_n$ بدالة الاحتمال f(x) فإن علاقة التباين هي:

$$\sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\mu\right)^2 f\left(x_j\right) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \ldots\ldots(9)$$

وفي حالة خاصة عندما تكون كل الاحتمالات متساوية فإن:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(10)$$

وهو التباين لمجموعة من n من القيم $x_1,x_2, \ldots x_n$

ويمكن إيجاد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$

نلاحظ انه إذا كانت X لها اتجاهات معينة أو وحدات قياس مثل السنتيمتر cm، فإن تباين X يأخذ الوحدة cm^2، بينما يأخذ الانحراف المعياري نفس وحدة المتغير العشوائي X وهي cm,ولهذا السبب يستعمل غالبا الانحراف المعياري.

المحور الأول: أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

أولا: قانون برنولي Loi de Bernoulli:

نرمز له بالرمز $X \rightarrow B(1, p)$

نقول أن متغير عشوائي X منفصل يتبع أو يستجيب لقانون "بارنولي" إذا كان X لا يقبل إلا قيمتين فقط أي: $X \in [0,1]$ والمرفقتان على التوالي بالاحتمالين: q بالنسبة لـX=0، p بالنسبة X=1، بحيث q + p = 1.

أي: $P(X = 0) = q$ و $P(X = 0) = p$

☜ فقانون بارنولي هو أبسط القوانين الاحتمالية ونصادفه كثيرا في الواقع وهو يعبر على كل التجارب العشوائية التي يتم فيها سحب وحدة واحدة فقط ضمن عدد معين من الوحدات الإحصائية وبطريقة عشوائية ويكون موضوع الدراسة خاصة معينة على هذه الوحدة. فإذا توفرت الصفة أو الخاصة في الوحدة المسحوبة نقول أن X=1، وإن لم تتوفر فيها الخاصية يكون X = 0.

x	0	1	$\sum$
P(X=x)	q	p	1

مثال: نسحب عشوائيا طالبا واحد ضمن مجموعة من الطلبة ولتكن الخاصية التالية (الجنس)، وليكن X عدد الطلبة الذكور.

أذا كان الطالب ذكرا فإن X=1، أما إذا الطالب المسحوب أنثى فإن X= 0.

– من الناحية التجريبية يمكن لقول أن قانون برنولي يعبر عن دراسة إحصائية بواسطة عينة حجمها هو (فرد واحد أو وحدة واحدة فقط) وهذا ما يعبر عنه الرقم 1 في رمز قانون برنولي.

وبذلك فلهذا القانون أهمية نظرية كبيرة جدا، لأنه أساس بناء كل القوانين الاحتمالية الأخرى، أما من الناحية التطبيقية فليس له أهمية لأن حجم العينة وحدة واحدة لا تكون أبدا ممثلة تمثيلا جيدا لباقي أفراد المجتمع الإحصائي.

مثال01: نرمي قطعة نقد مرة واحدة، ليكن X: م ع عدد الصور المتحصل عيها. ما هو القانون الاحتمالي لـX أعرضه في جدول.

إذا كانت النتيجة كتابة فإن X =0

أما إذا كانت النتيجة صورة فإن X=1

ومنه $X \in [0,1]$

$P(X=0)=1/2$ و $P(X=0)=1/2$

فنقول إذا أن: $X \to B(1,\frac{1}{2})$

x	0	1	$\sum$
P(X=x)	1/2	1/2	1

مثال 02: تشير إحصائيات السنة الماضية أن نسبة النجاح لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية كانت 45% للتأكد من ذلك نختار عشوائيا طالبا من بين طلبة السنة الثانية للعام الماضي. وليكن (X): عدد الطلبة الناجحين.

- ما هو القانون الاحتمالي لهذا المتغير ؟.

مجال التعريف:

X=1 $\Rightarrow$ ناجح، X= 0 $\Rightarrow$ راسب.

, P(X=1) =0,45 . P(X=0) =0,55 $X \in [0,1]$

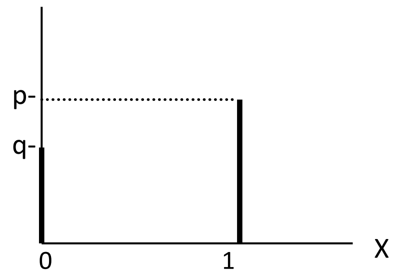
X $\to$ B(1. 0,45).

- حدد التوزيع الاحتمالي لـY: عدد الطلبة الراسبين على التجربة السابقة.

$P(X=1) = 0{,}55.\ P(X=0) = 0{,}45$

$Y \to B(1.\ 0{,}55)$

التمثيل البياني لقانون برنولي:



معالم قانون برنولي:

- **الأمل (التوقع) الرياضي**:

$$E(x) = \sum p_i x_i = (q\ .\ 0) + (p\ .1) = p$$

أي: $E(x) = p$

- **التباين $V(x)$ والانحراف المعياري $\partial(x)$**:

$$V(x) = \sum p_i\ (x_i - E(x))^2$$

$$= q\ (0-p)^2 + p\ (1-q)^2$$

$$= qp^2 + pq^2 = pq(p+q)$$

$$V(x) = pq$$

ثانيا: توزيع ذو الحدين Loi Binomial

نفترض أن لدينا تجربة عشوائية مثل رمي قطعة نقد أو زهرة نرد على الطاولة على التوالي، أو سحب كرات من صندوق بالتوالي، كل عملية رمي أو سحب تسمى محاولة Trial، وكل محاولة من المحاولات المتتالية يرتبط بها احتمال حدوث حدث ما مثل حدث الحصول على صورة في رمي قطعة النقد، أو الحصول على رقم أربعة في رمي زهرة النرد، وفي كل حالة من الحالات السابقة يظل الاحتمال (احتمال حدوث حدث ما) ثابتا لا

يتغير من محاولة إلى أخرى، وهذه المحاولات تكون مستقلة independent وتسمى في الغالب محاولات برنولي Bernoulli Trials وذلك بعدما درسها جيمس برنولي في نهاية القرن السابع عشر.

نفترض أن p يمثل احتمال حدوث حدث ما في محاولات برنولي (يسمى باحتمال نجاح) وبالتالي يكون لدينا $q=1-p$ هو احتمال عدم حدوث الحدث في محاولة واحدة (يسمى احتمال عدم النجاح أو الفشل)، واحتمال حدوث الحدث بالضبط x مرة في n محاولة (أي x مرة نجاح و n−x مرة فشل)، يتحقق بالمعادلة:

$$f(x) = P(X=x) = \left(C\,{x \atop n}\right) p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث أن المتغير العشوائي x يشير إلى عدد مرات النجاح في n محاولة كما أن $x=1,2,\ldots\ldots,n$

مثال: احتمال الحصول على 2 صورة بالضبط في 6 محاولات رمي قطعة عملة متوازنة هو:

$$P(X=2) = \left(C\,{2 \atop 6}\right) p^2 q^{6-2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} (1/2)^2 (1/2)^{6-2} = 15/64$$

وتسمى دالة الاحتمال المنفصلة f(x) غالبا توزيع ذو الحدين Binomial Distribution، حيث $x=1,2,\ldots\ldots,n$ والتي تتبع الحدود المتتالية في مفكوك ذو الحدين.

$$(q+p)^n = q^n + \left(C\,{1 \atop n}\right) pq^{n-1} + \left(C\,{2 \atop n}\right) p^2 q^{n-2} + \cdots + p^n = \sum_{x=0}^{n} \left(C\,{x \atop n}\right) p^x q^{n-x}\,(2) \ldots\ldots (2)$$

والحالة الخاصة في توزيع ذي الحدين عندما $n=1$ تسمى توزيع برنولي Bernoulli Distribution.

وكخلاصة فإن شروط استعمال توزيع ذي الحدين هي:
- تجربة برنولية مكررة عدد محدود n مرة.
- احتمال النجاح P ثابت (أي أن التجارب مستقلة عن بعضها).

مثال:

لوحظ لفترة طويلة أن صيادا يصيب الهدف باحتمال نجاح يقدر بـ $P=0.85$، فإذا أطلق 5 طلقات على هدف ما، فما احتمال:

- اصابة الهدف مرتين فقط.

- اصابة الهدف مرتين على الأكثر.
- اصابة الهدف مرتين على الاقل و4 مرات على الاكثر.

الحل:

نلاحظ من شروط المسالة أنها تحقق خواص التجربة الثنائية، وبالتالي إذا رمزنا إلى عدد الإصابات بـx في تجربة n=5 رميات، فإن x يخضع لتوزيع ذي الحدين.

$$P(X=x)=\left(C\,\frac{x}{5}\right)p^{x}q^{5-x}=\frac{5!}{x!\,(5-x)!}p^{x}q^{5-x}\;\ldots\ldots x=1,2,3,4,5$$

$$P(X=2)=\left(C\,\frac{2}{5}\right)0.85^{2}0.15^{5-2}=\frac{5!}{2!\,(5-2)!}0.85^{2}0.15^{5-2}=0.0244$$

$$P(X\leq 2)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$$

$$P(X=0)=\left(C\,\frac{0}{5}\right)0.85^{0}0.15^{5}=0.0001$$

$$P(X=1)=\left(C\,\frac{1}{5}\right)0.85^{1}0.15^{5-1}=0.0022$$

$$P(X\leq 2)=P(0)+P(1)+P(2)=0.0244+0.0001+0.0022=0.0267$$

$$P(2\leq X\leq 4)=P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)$$

$$P(X=3)=\left(C\,\frac{3}{5}\right)0.85^{3}0.15^{2}=0.1382$$

$$P(X=4)=\left(C\,\frac{4}{5}\right)0.85^{4}0.15^{1}=0.3915$$

$$P(2\leq X\leq 4)=P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)=0.5544$$

خصائص توزيع ذو الحدين:

كما في أي توزيع من التوزيعات الاحتمالية، يتميز توزيع ذو الحدين ببعض المعلمات أو الإحصاءات الوصفية، نذكرها فيما يلي:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x)=\mu=np$
- التباين: $V(x)=\sigma^{2}=npq=np(1-p)$

- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$

مثال:

في تجربة رمي قطعة عملة 100 مرة، احسب عدد مرات ظهور الصورة، ثم أوجد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

في 100 رمية لقطعة عملة كاملة التوازن، فإن احتمال ظهور الصورة هو $p=0.5$ واحتمال ظهور الرقم هو $q=1-p=0.5$، وبالتالي فإنM

متوسط ظهور الصورة في 100 رمية هو $\mu = np = 100 \times 0.5 = 50$

والتباين هو $\sigma^2 = npq = np(1-p) = 100 \times 0.5 \times 0.5 = 25$

والانحراف المعياري هو $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{25} = 5$

ثالثا: توزيع بواسون Loi de Poisson

تدعى متتالية الحوادث التي تقع واحدة تلو الاخرى في لحظات زمنية بتدفق الحوادث، فمثلا تدفق حوادث المرور في طريق معين خلال مدة زمنية معينة، أو تدفق القطارات على محطة معينة، أو تدفق المواطنين على مكتب بريد ...الخ. ويدعى تدفق الحوادث بالتدفق البسيط إذا حقق الشروط التالية:

- احتمال وقوع أي من الحوادث خلال فترة زمنية t يتعلق فقط بطول هذه الفترة، أي مستقل عن بداية ونهاية تلك الفترة، وهذا يسمح لنا بأن نرمز بالرمز $P_x(t)$ لاحتمال وقوع n حادث خلال الفترة الزمنية t حيث $x=1,2,3,\ldots\ldots$.
- احتمال وقوع أي عدد من الحوادث خلال أي فترة زمنية، مستقل عن عدد الحوادث التي وقعت قبل بداية الفترة (غياب تأثير التتالي).
- احتمال وقوع حادثين أو أكثر خلال فترة زمنية t لا متناهية في الصغر، يساوي الصفر.

- إن عدد الأحداث التي تقع في أي فترة زمنية يكون مستقلاً عن عدد الأحداث في أي فترة زمنية منفصلة. هنا، "الفاصل الزمني" هو المثال النموذجي لـ "متغير التعرض" ومن الممكن تفسيرات أخرى. مثال: معدل الخطأ لكل صفحة في كتاب.

إذا تحققت شروط التدفق البسيط الواردة سابقا، وكان λ هو معدل الذي تحدث به الأحداث، ورمزنا بـ x لعدد حوادث التدفق البسيط خلال الفترة t (وهي ثانية، دقيقة، ساعة، يوم، شهر،...)، فعندئذ يكون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يخضع لتوزيع بواسون والذي يعرف بالعلاقة التالية:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots (1)$$

حيث أن λ تمثل ثابتا موجبا، يسمى هذا التوزيع توزيع بواسون Poisson Distribution نسبة إلى مكتشفه S.D. Poisson في بداية القرن التاسع عشر. والمتغير الذي يكون له هذا التوزيع نقول أنه متغير خاضع لتوزيع بواسون، ويمكن الحصول على قيم توزيع بواسون باستخدام الملحق من جداول التوزيعات الاحتمالية والذي يعطي قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ المختلفة.

وحيث أن:

X=x هو العدد المعين من الحوادث.

P(X=x) هو احتمال وقوع عدد x من الحوادث.

λ هو متوسط عدد الحوادث في وحدة الزمن.

e أساس اللوغاريتم الطبيعي و e=2.71828

ولإيجاد قيم توزيع بواسون، أي $P_x(t)$ أعدت جداول خاصة بذلك، حيث يتضمن السطر الاول قيم λ والعمود الأول قيم x، ولاستخراج قيمة بواسون المعينة المقابلة لقيمة معينة للوسيط λ ولقيمة معينة لـx نبحث عن العدد الواقع على نقطة تقاطع العمود الموافق لقيمة λ والسطر الموافق لقيمة x.

وكخلاصة فإن شروط استعمال توزيع بواسون هي:

- تجربة برنولية مكررة عدد لا محدود أو لا نهائي، وهنا يصعب استخدام التوزيع الثنائي.
- عندما تتكر التجربة باستمرار، يصبح عد مرات التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمنية صغير جدا، ، ويكون لدينا معدل أو متوسط نجاحات في لحظة زمنية هو الثابت λ، عندها يمكننا استخدام توزيع بواسون. .

خصائص توزيع بواسون:

كما في أي توزيع من التوزيعات الاحتمالية، يتميز توزيع بواسون ببعض المعلمات أو الإحصاءات الوصفية، نذكرها فيما يلي:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x) = \mu = \lambda$
- التباين: $V(x) = \sigma^2 = \lambda$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\lambda} =$

مثال:

تشير الخبرة السابقة إلى أنه في المتوسط يكون عدد حوادث المرور على الطريق رقم 01 خمس 05 حوادث في الأسبوع، فما هو احتمال وقوع 03 حوادث في الاسبوع على نفس الطريق؟

الحل:

لدينا: t=1week, λ=5, x=3 إذن x يخضع لتوزيع بواسون

ومنه

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 1,2,3,\ldots$$

$$P(X = 3) = P_3(t) = \frac{5^3 e^{-5}}{3!} = 0.1404$$

مثال:

إذا كان احتمال أن يعاني شخص معين كرد فعل سيئ لإعطائه حقنة من دواء معين هو 0.001.احسب احتمال أنه من بين 2000 شخص

أ- يوجد بالضبط 3 اشخاص يعانون من حقنة هذا الدواء.

ب-أكثر من 2 شخصين يعانون من الحقن بهذا الدواء.

الحل:

نفترض أن x تمثل عدد الذين يعانون من الأثر السلبي لهذا الدواء وموزع توزيعا برنوليا، وحيث أن الأثر السيئ نادر الوقوع فإننا نعتبر أن x موزع توزيع بواسون، أي أن:

$$\lambda = np = 2000 * 0.001 = 2 \qquad P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x\,!}$$

أ- $P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3\,!} = 0.180$

ب- $P(X > 2) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)]$

$$= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0\,!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1\,!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2\,!}\right]$$

$$= 1 - [5e^{-2}]$$

$$P(X > 2) = 0.323$$

توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي

بالإضافة إلى استخدامات توزيع بواسون التي سبق ذكرها، فإن لهذا التوزيع استخداما آخر شائعا يتمثل في أنه تقريب جيد لتوزيع ذي الحدين، وذلك عند توفر الشروط التالية:

- إذا كانت $n \geq 30$
- إذا كان $P \leq 0.01$

وكقاعدة عامة يستخدم توزيع بواسون عندما تكون $n \geq 30$ و $n * p < 5$ عندئذ λ=np

مثال:

يتألف مصنع من 1000 آلة تعمل بشكل مستقل، غذا كان احتمال توقف آلة في أي لحظة زمنية هو 0.002، فأوجد احتمال تعطل ثلاث 3 آلات في نفس الفترة.

الحل:

من شروط هذه المسالة نجد أن لدينا 1000 آلة تعمل بشكل مستقل، أي وكأن لدينا n=1000 تكرارا مستقلا، واحتمال توقف الآلة خلال لحظة معينة (احتمال النجاح) ثابت ويساوي p=0.002، اي إذا رمزنا لعدد الآلات المعطلة خلال اللحظة t بالرمز x، فإن هذا المتغير يخضع لتوزيع ذي الحدين.

$$P(X=x)=\left(C_{1000}^{\ x}\right)0.002^{x}0.998^{1000-x} \quad x=1,2,\ldots..1000$$

$$P(X=3)=\left(C_{1000}^{\ 3}\right)0.002^{3}0.998^{1000-3}$$

حساب P(X=3) وفق المعادلة السابقة يحتاج عمليات حسابية طويلة، وبالتالي يفضل التفكير في توزيع بواسون.

- لدينا $n=1000\geq 30$
- ولدينا $P=0.002\leq 0.01$
- و في نفس الوقت $n*p=1000*0.002=2<5$

إذن نستخدم توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ذي الحدين، حيث أن: λ=np=1000*0.002=2

$$P_{x}t=P(X=x)=\frac{2e^{-2}}{x\,!}$$

$$P_{3}t=P(X=3)=\frac{2e^{-2}}{3\,!}=0.1804$$

رابعا: التوزيع الهندسي

تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة إلى حد كبير لتجارب توزيع برنولي، التي تفترض بان نتيجة كل تجربة هي: إما نجاح التجربة باحتمال pأو فشلها باحتمال q=1-p، كما أن عدد المحاولات في تجارب التوزيع الهندسي لم تكن محددة من البداية كما هو الحال في تجارب توزيع ذي الحدين، وعلى هذا الأساس فإن المتغير

العشوائي المنفصل x في حالة تجارب التوزيع الهندسي هو عبارة عدة محاولات لإجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فإن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة x يسبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها x-1.

وبافتراض أن لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن x يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة يقال بان المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع الهندسي: إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل:

$$P(X=x)=\begin{cases} P(1-P)^{x-1} & x=1,2,3,\dots\dots\dots\infty \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

ونكتب اختصارا $x \sim g(p)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة p.

خصائص التوزيع الهندسي:

كما في أي توزيع من التوزيعات الاحتمالية، يتميز التوزيع الهندسي ببعض الإحصاءات الوصفية، نذكرها فيما يلي:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x)=\mu=\frac{1}{P}$
- التباين: $V(x)=\sigma^2=\frac{q}{p^2} \quad q=1-p$
- الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{V(x)}=\frac{\sqrt{q}}{p}$

مثال:

نرمي زهرة نرد متجانسة في تجربة عشوائية، حتى يتم الحصول على أحد الاوجه.

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير x.
- ما هو احتمال أن نحتاج إلى أربع محاولات على الأقل حتى نحصل على العدد 5 على وجه زهرة النرد.
- كم هو معدل عدد المحاولات التي نحتاجها؟

الحل:

بما أن احتمال الحصول على أي وجه من الاوجه الستة في رمية واحدة هو p=1/6، فإن:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير x هو التوزيع الهندسي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{x-1} & x=1,2,3,\dots\dots\dots\infty \\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

- احتمال أن نحتاج إلى أربع محاولات على الأقل حتى نحصل على العدد 5 على وجه زهرة النرد هو:

$$P(X\geq 4)=1-P(X<4)$$
$$P(X\geq 4)=1-[P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$$
$$=1-\left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^0+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^1+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$$
$$=1-\left[\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}\right]$$
$$=1-\frac{91}{216}$$
$$P(X\geq 4)=0.579$$

- معدل عدد المحاولات التي نحتاجها هو:

$$\mu_x=\frac{1}{P}=\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}=6$$

مثال:

مصنع إنتاجي يحتوي على العديد من الخطوط الإنتاجية، كان احتمال توقف خط منها ليوم من العمل هو 0.1.

- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الانتاجي لمدة 3 أيام؟
- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الانتاجي عن العمل 3 أيام على الاكثر؟
- ما هو الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع؟

الحل:

P=0.1   q =1-p=0.9

- احتمال أن يتوقف الخط الانتاجي لمدة 3 أيام

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1(0.9)^{x-1} & x=1,2,3,\dots\dots\dots\infty \\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

$$P(X=3)=0.1*0.9^2$$

$$P(X=3)=0.081$$

- احتمال أن يتوقف الخط الانتاجي عن العمل 3 أيام على الاكثر

$$P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$P(X\leq 3)=0.1*0.9^0+0.1*0.9^1+0.1*0.9^2$$
$$P(X\leq 3)=0.1+0.09+0.081=0.271$$

- الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع هما:

$$\mu_x=\frac{1}{P}=\frac{1}{0.1}=10$$
$$\sigma^2=\frac{\mathrm{q}}{p^2}=\frac{0.9}{0.1^2}=90$$

مثال:

كيس به 8 كرات بيضاء و4 كرات سوداء، نسحب في كل مرة كرة من الكيس مع الإرجاع.

- إذا كان x يمثل عدد السحبات لسحي كرة بيضاء، أوجد القيمة المتوقعة والتباين ثم دالة التوزيع للمتغير x.
- ما هو احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الاولى في السحبة الخامسة؟

الحل:

المتغير العشوائي x له توزيع هندسي حيث p=8/12=2/3 أي أن p تمثل احتمال سحب كرة بيضاء وعليه فإن:

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x=1,2,3,\dots\dots\dots\infty \\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

وتكون القيمة المتوقعة للمتغير x هي:

$$\mu_x = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

أما تباين المتغير العشوائي فهو:

$$\sigma^2 = \frac{q}{{}^{2}} = \frac{1/3}{2/3^2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

أما دالة توزيع المتغير العشوائي فهي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^x & x = 1,2,3, \dots \dots \\ 1 & x \to \infty \end{cases}$$

احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الاولى في السحب الخامس هو:

$$P(X = 5) = \frac{2}{3} * \frac{1}{3}^{5-1} = \frac{2}{3} * \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{243}$$

خامسا: التوزيع فوق الهندسي

تعد تجارب التوزيع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير المستقلة، وأن هذا النوع من التجارب مبني على أساس مفهوم السحب بدون إرجاع، مما يجعل احتمال الحصول على صفة معينة غير ثابت، أي أن الاحتمال يتغير من محاولة إلى أخرى، على عكس تجارب برنولي وتوزيع ذي الحدين التي يكون فيها الاحتمال ثابت من محاولة إلى أخرى، كونهما من التجارب المستقلة، وان السحب بموجبهما يتم بإرجاع.

فمثلا لو كان لدينا مجتمع يحتوي على N من العناصر، فيه N_1 من العناصر نسميه نجاحا، أما المتبقي أي $(N-N_1)$ لنوع آخر من العناصر نسميه فشلا، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم n منه بدون إرجاع، فإن عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي (N_1)، وأن عدد حالات الفشل هي $(N-N_1)$، وعليه فإن:

عدد طرق اختيار (x) من (N_1) هو $C_{N_1}^{x}$ ويعبر عنه بـ $\binom{x}{N_1}$.

وعدد طرق اختيار (n-x) من $(N-N_1)$ هو $C_{N-N_1}^{n-}$ ويعبر عنه بـ $\binom{n-x}{N-N_1}$.

وبالتالي فإن: عدد طرق الممكنة لاختيار x و n-x من N1 و N-N1 على الترتيب هو $\binom{x}{N_1}\binom{n-x}{N-N_1}$

وعدد الطرق الكلية لاختيار n من N هو C_N^n ويعبر عنه بـ $\binom{n}{N}$

وبافتراض أن لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن x يمثل عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة التوزيع فوق الهندسي ففي هذه الحالة يقال أن المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{x}{N_1}\binom{n-x}{N-N_1}}{\binom{n}{N}} & x=1,2,3,\dots\dots\dots n\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع فوق الهندسي اختصارا بالاصطلاح التالي:

$$x\sim hg(N_1,N-N_1)$$

وهذا يعني ان المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بالمعلمتين N_1 و $N-N_1$

خصائص التوزيع فوق الهندسي:

كما في أي توزيع من التوزيعات الاحتمالية، يتميز التوزيع فوق الهندسي ببعض الإحصاءات الوصفية، نذكرها فيما يلي:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x)=\mu=n*\frac{N_1}{N}$
- التباين: $V(x)=\sigma^2=n*\frac{N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})$
- الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{n*\frac{N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})}$

حيث أن $\frac{N-n}{N-1}$ يمثل معامل التصحيح (خاص بالمجتمعات المحدودة).

مثال:

يتوفر في احد المعارض بيع الاجهزة الالكترونية 15 مكواة بخارية، من بينها 3 ثلاثة فيها أعطال كهربائية، قام احد الوكلاء بشراء 6 مكاوي دون فحصها.

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي، للمتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الأجهزة التي فيها عطل.
- ما هو احتمال أن يكون من ضمن ما اشتراه الوكيل 2 مكواة فيها عطل؟

الحل:

لدينا n=6 N-N1=9 N1=3 N=15

- بما أن التجارب المتكررة غير مستقلة، والسحب بدون ارجاع، أي أن احتمال أن تكون المكواة بها عطل تغير كلما سحبنا مكواة من العينة، فإن المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد المكاوي التي بها اعطال يتبع التوزيع فوق الهندسي، أي دالة التوزيع الاحتمالي هي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{x}{3}\binom{6-x}{12}}{\binom{6}{15}} & x=1,2,3,4,5,6\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

- احتمال أن يكون من ضمن ما اشتراه الوكيل 2 مكواة فيها عطل هو:

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{3}\binom{6-3}{12}}{\binom{6}{15}}=\frac{3(495)}{5005}$$

$$P(X=2)\approx 0.297$$

مثال:

يحتوي كيس على 6 حبات تفاح و 9 حبات برتقال، اختيرت منه 7 حبات دون ارجاع.

- ما احتمال ان يكون من بين الحبات المختارة 3 حبات تفاح؟
- ما هو الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع الاحتمالي؟

الحل:

لدينا n=7 N-N1=9 N1=6 N=15

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يمثل عدد حبات التفاح المسحوبة هو التوزيع فوق الهندسي، لأن التجارب المتكررة غير مستقلة، والسحب بدون ارجاع، منه:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{x}{6}\binom{7-x}{9}}{\binom{7}{15}} & x=1,2,3,4,5,6,7\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

- احتمال ان يكون من بين الحبات المختارة 3 حبات تفاح هو:

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{6}\binom{7-3}{9}}{\binom{7}{15}}=\frac{20(126)}{6435}$$

$$P(X=3)\approx 0.392$$

- الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع الاحتمالي هم:

الوسط الحسابي: $\mu=n*\frac{N_1}{N}=7*\frac{6}{15}=2.8$

التباين:

$$\sigma^2=n*\frac{N_1}{N}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=7*\frac{6}{15}\left(1-\frac{6}{15}\right)\left(\frac{15-7}{15-1}\right)$$

$$\sigma^2=0.958$$

الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{0.958}=0.979$

مثال:

يحتوي صندوق على ثلاث أجهزة كهربائية فاسدة وسبعة صالحة، فإذا تم سحب ثلاثة أجهزة وبدون إعادة وكان المتغير العشوائي x يمثل عدد الأجهزة العاطلة بالعينة المختارة، فالمطلوب:

- أكتب القيم التي من الممكن ان يأخذها المتغير العشوائي x واحتمال كل منها.
- أوجد قيم الاحتمالات التالية:

$1)\ P(1<X\le 3)\quad 2)\ P(0\le X\le 2)\quad 3)\ P(2\le X<3)\quad 4)\ P(X=4)$

الحل:

من خلال المعطيات نلاحظ ان لدينا n=3 N-N1=7 N1=3 N=10

- ومنه دالة التوزيع الاحتمالي هي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{x}{3}\binom{3-x}{7}}{\binom{3}{10}} & x=0,1,2,3\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

ومنه نجد أن $P(X=3)=\frac{1}{120}$ $P(X=2)=\frac{21}{120}$ $P(X=1)=\frac{63}{120}$ $P(X=0)=\frac{35}{120}$

ويمكن كتابة قيم x والاحتمالات المقابلة لها في الجدول التالي:

X=x	0	1	2	3
P(X=x)	35/120	63/120	21/120	1/120

- إيجاد قيم الاحتمالات:

- $P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{22}{120}$
- $P(0 \leq X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{119}{120}$
- $P(2 \leq X < 3) = P(X = 2) = \frac{21}{120}$
- $P(X = 4) = 0$ لأن $X = 0,1,2,3$

سادسا: التوزيع المنتظم المنفصل

يستخدم التوزيع المنتظم المنفصل في حالات التطبيقات الاحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية التي تأخذ عددا محددا من القيم باحتمالات متساوية، بمعنى أن كل وحدة من وحدات التجربة العشوائية لها نفس فرصة الظهور، ويطلق على هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية المتجانسة، ومن الامثلة التطبيقية على هذا النوع من التجارب (تجربة رمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة، تجربة سحب طالب من القسم حيث عدد الطلبة n).

وبافتراض ان لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن x يأخذ عددا محددا من القيم المنفصلة $x1,x2,x3,.....xn$، ففي هذه الحالة يقال ان المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له بالشكل:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1,2,\dots\dots,n \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

حيث أن: n تمثل عدد الوحدات الداخلة في التجربة، وأن $(n>0)$.

خصائص التوزيع المنتظم المنفصل:

إن الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للتوزيع المنتظم المنفصل تكتب بالشكل:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x) = \mu = \frac{n+1}{2}$
- التباين: $V(x) = \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$

- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

مثال:

في تجربة عشوائية، نريد سحب قسم من أقسام كلية العلوم الاقتصادية والبالغ عددها أربع 4 أقسام بطريقة القرعة، بهدف إجراء دراسة حول تحصيل الطلبة في مادة الإحصاء 3.

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يمثل القسم الظاهر على ورقة سحب القرعة.
- ارسم دالة التويع الاحتمالي.
- جد قيمة الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

الحل:

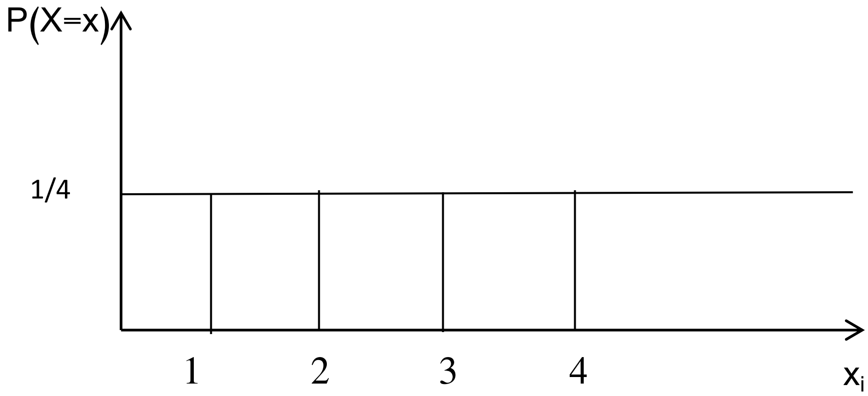
- بما أن فرص كل قسم متساوية في الظهور على ورقة سحب القرعة، فإن التوزيع الاحتمالي هو التوزيع المنتظم المنفصل، ودالته هي:

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

- لرسم دالة التوزيع الاحتمالي نستعين بالجدول التالي:

x	1	2	3	4
P(X=x)	1/4	1/4	1/4	1/4



- قيمة الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع هي:
- الوسط الحسابي: $\mu = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = 2.5$
- التباين: $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} = \frac{16-1}{12} = 1.25$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{16-1}{12}} \approx 1.11$