حلول السلسلة الاولى

حل التمرين الاول:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع ذي الحدين، وذلك لأنها تتضمن تجارب متتالية مستقلة عن بعضها البعض، وكل تجربة تتضمن حدثين أو نتيجتين (شفاء أو عدم شفاء)، والمتغير العشوائي x يمثل عدد حالات الشفاء في المستشفى.

1- حساب احتمال أن يكون الشفاء في ثلاث حالات.

$$P(X=3)=\left(C\,\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right)0.65^3 0.35^2=0.3364$$

2- حساب احتمال أن يكون الشفاء في جميع الحالات

$$P(X=5)=\left(C\,\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right)0.65^5 0.35^0=0.1160$$

3- حساب احتمال أن يكون عدم الشفاء في أربع حالات، وهذا معناه شفاء حالة 1 واحدة.

$$P(X=1)=\left(C\,\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right)0.65^1 0.35^{5-1}=0.0488$$

4- حساب احتمال أن يكون الشفاء في حالتين على الاكثر.

$$P(X\le 2)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$$

$$P(X=0)=\left(C\,\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right)0.65^0 0.35^5=0.0052$$

$$P(X=2)=\left(C\,\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right)0.65^2 0.35^{5-2}=0.1811$$

$$P(X\le 2)=P(0)+P(1)+P(2)=0.+0.0488+0.0022=0.2351$$

حل التمرين الثاني:

1- المتغير العشوائي x يمثل عدد الأطفال المصابين بالتوحد.

2- إثبات أن هذه تجربة ذات حدين

أ) هناك 10 أطفال، وكل طفل عبارة عن تجربة، لذلك هناك عدد محدد من التجارب. في هذه الحالة، n=10.

ب) إذا افترضنا أنه تم اختيار كل طفل في المجموعة عشوائيًا، فإن إصابة الطفل بالتوحد لا تؤثر على فرصة إصابة الطفل التالي بالتوحد. وبالتالي فإن التجارب مستقلة.

ت) إما أن يكون الطفل مصابًا بالتوحد أو لا يعاني من التوحد، لذلك هناك نتيجتان. وفي هذه الحالة يكون النجاح هو إصابة الطفل بالتوحد.

ث) احتمال إصابة الطفل بالتوحد هو $88/1$. وهذا هو نفسه بالنسبة لكل تجربة لأن كل طفل لديه نفس الفرصة للإصابة بالتوحد، $P=1/88$ و $q=1-p=1-1/88=87/88$.

3- إيجاد الاحتمالات:

أ) ولا طفل طفل مصاب بالتوحد:

$$P(X=0)=\left(C\begin{matrix}0\\10\end{matrix}\right)p^0q^{10-0}=\frac{10!}{0!\,(10-0)!}\left(\frac{1}{88}\right)^0\left(\frac{87}{88}\right)^{10}=0.892$$

ب) طفلين على الأكثر مصابين بالتوحد:

$$P(X\leq 2)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$$

$$P(X=0)=\left(C\begin{matrix}0\\10\end{matrix}\right)\left(\frac{1}{88}\right)^0\left(\frac{87}{88}\right)^{10}=0{,}892$$

$$P(X=1)=\left(C\begin{matrix}1\\10\end{matrix}\right)\left(\frac{1}{88}\right)^1\left(\frac{87}{88}\right)^{10-1}=0{,}103$$

$$P(X=2)=\left(C\begin{matrix}2\\10\end{matrix}\right)\left(\frac{1}{88}\right)^2\left(\frac{87}{88}\right)^{10-2}=0{,}005$$

$$P(X\leq 2)=0{,}892+0{,}103+0{,}005>0{,}999$$

<u>حل التمرين الثالث</u>:

1- المتغير العشوائي x هو عدد الأشخاص الذين لديهم عيون خضراء.

2- بما أننا بصدد ظاهرة فيها حالتين (الشخص عيونه إما خضراء أو غير ذلك)، وكون الشخص عيونه خضراء لا يؤثر على حالة الشخص الآخر (صفة الاستقلالية)، وبما ان احتمال وجود شخص عيونه خضراء هو احتمال ثابت $P=0.01$، فإننا أمام ظاهرة تخضع لقانون ذي الحدين حيث:

$$f(x)=P(X=x)=\left(C\begin{matrix}x\\n\end{matrix}\right)p^xq^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^xq^{n-x}$$

3- احتمال أن يكون شخصين من المجموعة عيونهم خضراء

$$P(X=2)=\left(C\begin{matrix}2\\20\end{matrix}\right)0.01^2 0.99^{20-2}=\frac{20!}{2!\,(20-2)!}0.01^2 0.99^{20-2}=0.016$$

4- احتمال أن يكون شخص على الاكثر من المجموعة عيونه خضراء

$$P(X\leq 1)=P(x=0)+P(x=1)$$

$$P(X=0)=\left(C\begin{matrix}0\\20\end{matrix}\right)0.01^0 0.99^{20}=0.818$$

$$P(X=1)=\left(C\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right)0.01^1 0.99^{19}=0.165$$

$$P(X\le 1)=P(0)+P(1)=0.818+0.165=0.983$$

5- متوسط ظهور شخص عيونه خضراء في مجموعة من 20 شخص هو

$$\mu=np=20\times 0.01=0.2$$

نتوقع في المتوسط أنه من بين 20 شخصًا، أقل من شخص واحد لديهم عيون خضراء.

والتباين هو $\sigma^2=npq=np(1-p)=20\times 0.01\times 0.99=0.198$

والانحراف المعياري هو $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{0.198}=0.445$

<u>حل التمرين الرابع:</u>

1- من خلال ملاحظة توافر شروط التدفق البسيط، وبوجود معدل تحدث به الحوادث، فإن المتغير العشوائي x الذي يمثل تدفق المرضى إلى مصلحة الاستعجالات يتبع توزيع بواسون، ودالة التوزيع الاحتمالي تكون على الشكل:

$$f(x)=P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\quad x=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ومعالم هذا التوزيع هي:

X=x هو العدد المعين من الحوادث. P(X=x) هو احتمال وقوع عدد x من الحوادث.

λ هو متوسط عدد الحوادث في وحدة الزمن، ويساوي 2 هنا. e أساس اللوغاريتم الطبيعي و e=2.71828

2- حساب إحتمال أن يتم خلال دقيقة دخول:

أ- ولا مريض؟ $\mathrm{P(X=0)}=\frac{2^0\mathrm{e}^{-2}}{0!}=\frac{0.1353}{1}=0.1353$

ب- مريض واحد؟ $\mathrm{P(X=1)}=\frac{2^1\mathrm{e}^{-2}}{1!}=\frac{0.2706}{1}=0.2706$

ت- مريضين؟ $\mathrm{P(X=2)}=\frac{2^2\mathrm{e}^{-2}}{2!}=\frac{2*0.2706}{2}=0.2706$

ث- د- ثلاث مرضى أو أربعة مرضى أو ستة مرضى؟

$$P(X=3)+\mathrm{P(X=4)}+\mathrm{P(X=6)}=\frac{2^3e^{-2}}{3!}+\frac{2^4e^{-2}}{4!}+\frac{2^6e^{-2}}{6!}=\frac{2^3e^{-2}}{3!}\left(1+\frac{2}{4}+\frac{8}{120}\right)$$

$$P(X=3)+\mathrm{P(X=4)}+\mathrm{P(X=6)}=0.1804*1.5667=0.2826$$

3- حساب المتوسط، التباين والانحراف المعياري

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x) = \mu = \lambda = 2$
- التباين: $V(x) = \sigma^2 = \lambda = 2$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2}$

4- أقصى عدد ممكن للمرضى الذين يدخلون للمصحة:

العدد الأقصى للمرضى الذين يدخلون المصحة، هو العدد الذي يبلغ عنده الاحتمال التراكمي العدد 01، أي العدد الذي كلما أضفنا فوقه أعداد أخرى يكون الاحتمال المرتبط بها مساويا للصفر، ونستخرجه من جدول قيم λ من خلال الجداول الاحصائية، وفي حالة هذا التمرين العدد الأقصى هو 09.

حل التمرين الخامس:

1- المتغير العشوائي في هذه المسألة هو عدد حوادث المرور التي تقع في ولاية سطيف سنويا.

2- التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو توزيع بواسون

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{6^x e^{-6}}{x!} \qquad x = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots \ (1)$$

3- التوقع الرياضي والانحراف المعياري هما:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $E(x) = \mu = \lambda = 6$
- التباين: $V(x) = \sigma^2 = \lambda = 6$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6}$

4- احتمال أن تقع في السنة المقبلة بولاية سطيف:

أ) 3 حوادث مرور هو:

$$P(X = 3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = 0.0892$$

ب) 10 حوادث مرور هو:

$$P(X = 10) = \frac{6^{10} e^{-6}}{10!} = 0.0399$$

ت) أكثر من 6 حوادث مرور هو:

$$P(X > 6) = 1 - [P(X = 0) + \cdots + P(X = 6)]$$
$$= 1 - (0.0025 + 0.0149 + 0.0446 + 0.0892 + 0.1339 + 0.1606 + 0.1606)$$
$$P(X > 6) = 1 - 0.6063 = 0.3937$$

5- أقصى عدد ممكن لحوادث المرور :

العدد الأقصى الممكن لحوادث المرور التي تقع بالولاية، هو العدد الذي يبلغ عنده الاحتمال التراكمي العدد 01، أي العدد الذي كلما أضفنا فوقه أعداد أخرى يكون الاحتمال المرتبط بها مساويا للصفر، ونستخرجه من جدول قيم λ من خلال الجداول الاحصائية، وفي حالة هذا التمرين العدد الأقصى هو 18.

حل التمرين السادس:

نفرض أن المتغير العشوائي x يمثل عدد الاخطاء اللغوية في الصفحة، فتكون القيم الممكنة ل x هي x=1,2,3…………,500، والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو توزيع ذي الحدين، أي أن:

$$P(X=x)=\left(C\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{n}\right)p^{x}q^{n-x}$$

وكما هو واضح فإنه من الصعب الحصول على الاحتمالات المطلوبة من هذه الصيغة، ولكن بتقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون، حيث هنا n كبيرة و p صغيرة، أي أن:

$$\lambda=np=500*(1/2000)=0.025$$

$$x\rightarrow P(x,0.25)\qquad x=0,1,\ldots..500$$

أ) احتمال أن تحتوي صفحة معينة خطأ لغوي واحد هو:

$$P(X=1)=\frac{0.25e^{-0.25}}{1\,!}=0.19$$

ب) احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين لغويين على الاقل هو:

$$P(X\geq 2)=1-[P(X<2)]=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$P(X=0)=\frac{1e^{-0.25}}{0\,!}=0.77$$

$$=1-[0.77+0.19]$$

$$P(X\geq 2)=0.04$$

حل التمرين السابع:

بما أنه لدينا متغير عشوائي منفصل x يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع الهندسي، ودالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل:

$$P(X=x)=\begin{cases}P(1-P)^{x-1} & x=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\infty\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

حيث P=0.0128

- احتمال أن نسأل 9 أشخاص قبل أن يقول أحدهم إنه مصاب بهذا المرض، أي:

$$P(X=9)=0.0128(1-0.0128)^{9-1}$$
$$P(X=9)=0.0114$$

- احتمال أن نسأل 20 أشخاص قبل أن يقول أحدهم إنه مصاب بهذا المرض، أي:

$$P(X=20)=0.0128(1-0.0128)^{20-1}$$
$$P(X=20)=0.01$$

- حساب المتوسط والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي): $\mu=\frac{1}{P}=\frac{1}{0.0128}=78.125$
- التباين: $\sigma^2=\frac{\text{q}}{p^2}=\frac{0.9872}{0.000163}=6025.39$
- الانحراف المعياري: $\sigma=\frac{\sqrt{q}}{p}\approx 77.62$

<u>حل التمرين الثامن:</u>

يمثل المتغير العشوائي x عدد الأستاذات في لجنة المقابلة، N عدد أساتذة القسم الاجمالي، و N1 عدد الاستاذات في القسم، إذن المتغير x يتبع التوزيع الاحتمالي فوق الهندسي، ودالته الاحتمالية على الشكل:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{x}{N_1}\binom{n-x}{N-N_1}}{\binom{n}{N}} & x=0,1,2,3,4,5\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

ولدينا: N1=8, N=48, n=5,

إذن لحساب الاحتمالات المتعلقة بـ x نستعمل العلاقة:

$$P(X=x)=\frac{\binom{x}{8}\binom{5-x}{40}}{\binom{5}{48}}\qquad x=0,1,2,3,4,5$$

- احتمال أن تكون اللجنة كلها من الاساتذة الذكور: أي لا توجد أي امرأة

$$P(X=0)=\frac{\binom{0}{8}\binom{5-0}{40}}{\binom{5}{48}}=\frac{1*658008}{1712304}$$
$$P(X=0)=0.38$$

- احتمال أن تكون أستاذة واحدة في اللجنة:

$$P(X=1)=\frac{\binom{1}{8}\binom{5-1}{40}}{\binom{5}{48}}=\frac{8*91390}{1712304}$$
$$P(X=1)=0{,}43$$

- احتمال وجود أستاذتين على الأقل في لجنة المقابلة:

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$
$$P(X \geq 2) = 1 - [0.38 + 0.43]$$
$$P(X \geq 2) = 0.19$$

- حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

- الوسط الحسابي: $\mu = n * \frac{N_1}{N} = 5 * \frac{8}{48} = 0.83$
- التباين: $\sigma^2 = n * \frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 0.83 * \left(1 - \frac{8}{48}\right)\left(\frac{43}{47}\right) \approx 0.63$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{n * \frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{0.63} \approx 0.79$

حل التمرين التاسع:

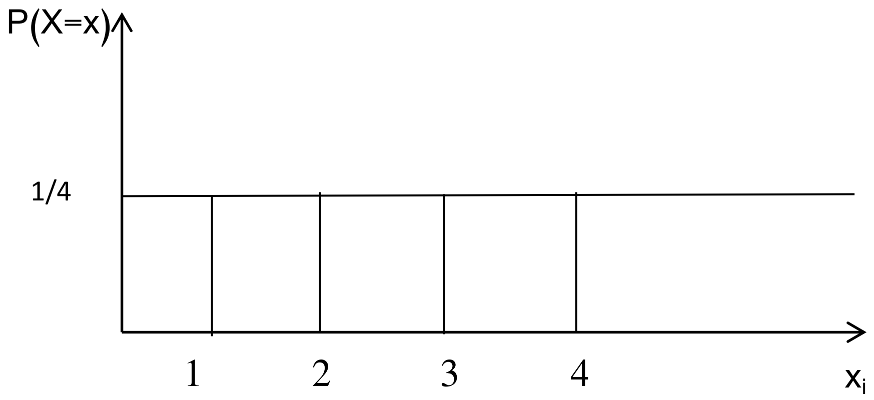
بما أن فرص كل شركة أدوية متساوية في الظهور على ورقة سحب القرعة، فإن التوزيع الاحتمالي هو التوزيع المنتظم المنفصل، ودالته هي:

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

- لرسم دالة التوزيع الاحتمالي نستعين بالجدول التالي:

4	3	2	1	x
1/4	1/4	1/4	1/4	P(X=x)



- قيمة الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع هي:

- الوسط الحسابي: $\mu = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = 2.5$
- التباين: $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} = \frac{16-1}{12} = 1.25$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{16-1}{12}} \approx 1.11$