

Chapitre II : Rappels sur les filtres numériques (RIF et RII)

1. Introduction :

La conversion d'un signal analogique sous forme numérique implique une double approximation. D'une part, dans l'espace des temps, le signal fonction du temps $x(t)$ est remplacé par ses valeurs $x(nT)$ à des instants multiples entiers d'une durée T ; c'est l'opération d'échantillonnage. D'autre part, dans l'espace des amplitudes, chaque valeur $x(nT)$ est approchée par un multiple entier d'une quantité élémentaire q ; c'est l'opération de quantification. La valeur approchée ainsi obtenue est ensuite associée à un nombre; c'est le codage, ce terme étant souvent utilisé pour désigner l'ensemble, c'est-à-dire le passage de la valeur $x(nT)$ au nombre qui la représente.

2. Transformée de Fourier discrète :

Lorsqu'on désire calculer la transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, ce dernier n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie, on est amené à :

- discrétiser la fonction temporelle,
- tronquer la fonction temporelle,
- discrétiser la fonction fréquentielle.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

En approchant l'intégrale par une somme d'aires de rectangles de durée T_e et en limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0, (N-1)T_e]$, on obtient:

$$X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi fnT_e}$$

Ce qui donne pour les valeurs de fréquences $f_k = kf_e/N$:

$$X(f_k) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi \frac{nk}{N} f_e T_e} \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

2.1 Définition :

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$, définis par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné: $x_n = x(nT_e)$, et les N termes $X(k)$ correspondre à une approximation de la

transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = kf_e/N$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est à dire f entre 0 et f_e .

La transformée inverse de Fourier discrète défini par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

2.2 Lien entre la transformée de Fourier et la TFD

Soit $x(t)$ un signal analogique continu.

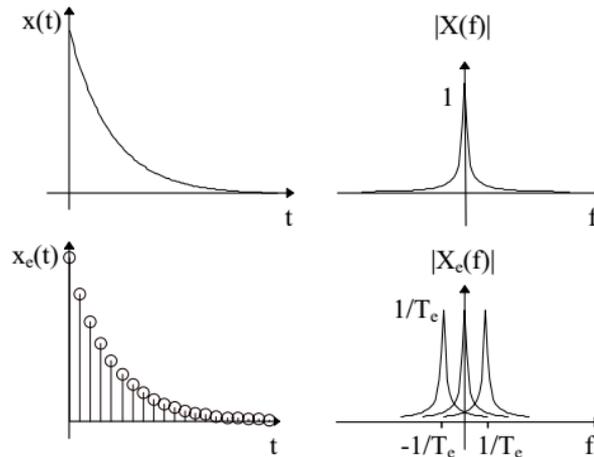
On échantillonne $x(t)$ à $f_e = 1/T_e$.

$$x(t) \rightarrow x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) = x(t)P(t)$$

où $P(t)$ est la « fonction peigne » :

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \xrightarrow{TF} P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

L'échantillonnage rend le spectre périodique et peut entraîner un phénomène de «recouvrement de spectre » ou aliasing.



2.3 Propriétés de la TFD :

Elles sont analogues à celles de la Transformée de Fourier, mais il faut prendre en compte une notion de périodicité des séquences.

Théorème de Parseval :

Le théorème de Parseval, sous sa forme discrète, s'écrit:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2j\pi \frac{nk}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} X_l^* e^{2j\pi \frac{-nl}{N}} \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[X_k X_l^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right] \end{aligned}$$

Or :

$$\text{Si } k \neq l \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} = \frac{1 - e^{2j\pi (k-l)}}{e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}}} = 0$$

$$\text{Si } k = l \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} = N$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[X_k X_l^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

Théorème de la convolution discrète :

Avant de présenter les résultats concernant la convolution discrète, on a besoin de définir les notions de convolution circulaire et de convolution linéaire.

1. Convolution circulaire:

Soit 2 suites périodiques $(x(n))$ et $(y(n))$ de période N . La convolution circulaire de ces 2 suites donne la suite $(z(n))$ de période N définie par:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(\|n - i\|) \quad \text{pour } n \in [0, 2N - 1]$$

Où la notation $\|n - i\|$ signifie $(n - i)$ modulo N .

2. Convolution linéaire:

La convolution linéaire d'une période de $(x(n))$ et d'une période de $(y(n))$ conduit quant-à-elle à une suite $(u(n))$ de longueur $2N - 1$ valant:

$$u(n) = x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(n - i) \quad \text{pour } n \in [0, 2N - 1]$$

La TFD de la suite $(z(n))$ convolution circulaire de 2 suites périodique $(x(n))$ et $(y(n))$ de période N , est le produit des TFD des suites $(x(n))$ et $(y(n))$:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) \Rightarrow TFD(z(n)) = TFD(x(n))TFD(y(n))$$

Où le symbole \otimes représente la convolution circulaire.

2.4 Transformée de Fourier Rapide TFR, Fast Fourier transform FFT

La Transformée de Fourier Rapide (notée par la suite FFT) est simplement une TFD calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations et, en particulier, le nombre de multiplications à effectuer. Il faut noter cependant, que la réduction du nombre d'opérations arithmétiques à effectuer, n'est pas synonyme de réduction du temps d'exécution. Tout dépend de l'architecture du processeur qui exécute le traitement.

Pour calculer une TFD, on doit calculer N valeurs $X(k)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

et ceci pour $k \in [0, N - 1]$.

Si on effectue le calcul directement sans algorithme efficace, on doit effectuer:

$$\begin{cases} N^2 & \text{multiplications complexes} \\ N(N - 1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

Il existe différents algorithmes de FFT. Le plus connu est sûrement celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel ou à « decimation in time ») qui réduit à

$$\frac{N}{2} \log_2(N) \quad \text{le nombre de multiplications}$$

Il existe deux versions de l'algorithme:

- FFT avec entrelacement temporel,
- FFT avec entrelacement fréquentiel.

L'algorithme nécessite que N soit une puissance de 2. Le principe de l'algorithme consiste à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives.

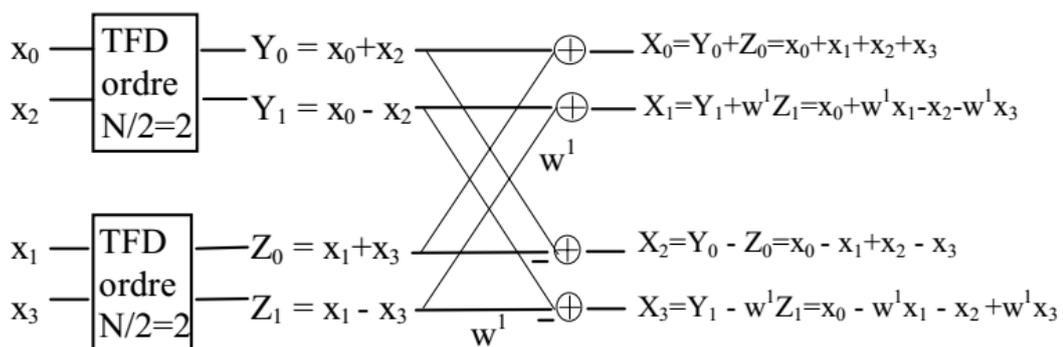
2.4.1 FFT avec entrelacement temporel :

Illustrons tout d'abord la méthode par un exemple pour $N = 4$. Les données sont notées $x(n)$ et la suite TFD $X(n)$.

La notation w représente $e^{-\frac{j2\pi}{N}}$, c'est-à-dire $e^{-\frac{j2\pi}{4}}$. On peut remarquer que $w^N = 1$ et $w^{N/2} = -1$. Pour $N = 4$, $w^4 = 1$ et $w^2 = -1$. La suite TFD s'écrit:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3)) \\ X(1) &= x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + w^1(x(1) - x(3)) \\ X(2) &= x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\ X(3) &= x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - w^1(x(1) - x(3)) \end{aligned}$$

Les données $(x(0), x(1), \dots, x(N - 1))$ sont regroupées en 2 paquets: un paquet formé des données d'indices pairs $(x(0), x(2), \dots, x(N - 2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(x(1), x(3), \dots, x(N - 1))$. Soit pour $N = 4$, un paquet $(x(0), x(2))$ et un paquet $(x(1), x(3))$. Puis sur chaque paquet on effectue une DFT d'ordre $N/2$ et on combine les résultats de ces 2 DFT pour obtenir celle d'ordre N . Ce qui donne, toujours pour $N = 4$:



Pour obtenir les 4 valeurs $X(k)$, il suffit donc de calculer 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$ et de combiner les résultats 2 à 2 à l'aide d'une addition et d'une multiplication au maximum, pour chaque valeur $X(k)$. Cette étape est appelée étage de « papillons », pour des raisons évidentes liées à la forme du schéma de calcul. Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \\ X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)e^{-j2\pi\frac{2ik}{N}} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)e^{-j2\pi\frac{2(i+1)k}{N}} \\ X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + e^{-j2\pi\frac{k}{N}} \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} \\ X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} \end{aligned}$$

On note $y(i) = x(2i)$ et $z(i) = x(2i+1)$, pour $i \in [0, (N/2 - 1)]$. On remarque que les 2 termes de la somme donnant $X(k)$ se déduisent directement des 2 TFD d'ordre $N/2$ des suites $y(i)$ et $z(i)$ de $N/2$ points. On note ces TFD $Y(k)$ et $Z(k)$.

Ainsi pour $k \leq N/2 - 1$, les 2 termes de la somme se déduisent des termes de rang k de $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} = Y(k) + w^k Z(k)$$

Pour $k \in [N/2, (N - 1)]$, on peut écrire $k = k' + N/2$, avec $k' \in [0, (N/2 - 1)]$. De plus, comme quelque soit i entier $e^{-j2\pi i} = 1$, on peut déduire $X(k)$ des termes de rang $k - N/2$ des 2 TFD $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} \\ X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{i(k+N/2)}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{i(k+N/2)}{N/2}} \\ X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} \\ X(k) &= Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2) \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout N multiple de 2, on peut calculer chaque terme $X(k)$ de la TFD d'ordre N en combinant, à l'aide d'au plus 1 multiplication et 1 addition, 2 termes des TFD d'ordre $N/2$ des 2 suites $y(i)$ et $z(i)$ de longueur $N/2$, formées respectivement des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs de la suite $x(n)$. En notant $Y(k)$ et $Z(k)$ les TFD d'ordre $N/2$ de ces suites on peut écrire:

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] \quad X(k) = Y(k) + w^k Z(k)$$

$$\text{Pour } k \in \left[\frac{N}{2}, N - 1\right] \quad X(k) = Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2)$$

On appelle « papillon », l'étape de calcul consistant à calculer 2 points de la TFD d'indices distants de $N/2$, par exemple $X(k)$ et $X(k + N/2)$ avec $k \in [0, N/2 - 1]$. Le calcul de ce couple de valeurs de la TFD d'ordre N utilise le couple de valeurs $Y(k)$ et $Z(k)$ des TFD d'ordre $N/2$:

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] \quad \begin{cases} X(k) = Y(k) + w^k Z(k) \\ X(k + N/2) = Y_k + w^{k+N/2} Z(k) = Y(k) - w^k Z(k) \end{cases}$$

Chaque papillon nécessite 1 multiplication et 2 additions ou soustractions. Ainsi tout TFD d'ordre N multiple de 2, peut se calculer à l'aide de 2 TFD d'ordre $N/2$ et d'un étage de $N/2$ papillons.

La complexité de calcul, pour la TFD d'ordre N est donc égale à celle de 2 TFD d'ordre $N/2$ plus celle de $N/2$ papillons. Si on suppose que les TFD d'ordre $N/2$ sont calculées directement (sans algorithme efficace), on peut dire que:

Le calcul d'une TFD d'ordre N pair, avec cet algorithme, demande:

$$\begin{aligned} \text{Le calcul de 2 TFD d'ordre } N/2: & \quad \begin{cases} 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2} \text{ multiplications complexes} \\ 2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1\right) = N \left(\frac{N}{2} - 1\right) \text{ additions complexes} \end{cases} \\ \text{Le calcul de } N/2 \text{ papillons:} & \quad \begin{cases} \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ N \text{ additions/soustractions} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit un total de :

$$\begin{cases} \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} & \text{multiplications complexes} \\ \frac{N^2}{2} & \text{additions complexes} \end{cases}$$

Au lieu de :

$$\begin{cases} N^2 & \text{multiplications complexes} \\ N(N - 1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

pour le calcul direct.

Ainsi pour $N=4$, on a besoin de 10 multiplications et de 8 additions/soustractions complexes au lieu de 16 multiplications et de 12 additions/soustractions complexes.

Si $N/2$ est un multiple de 2, on peut réitérer la méthode pour le calcul des 2 TFD d'ordre $N/2$. Chaque TFD d'ordre $N/2$ est alors calculée à l'aide de 2 TFD d'ordre $N/4$ et de $N/4$ papillons, ce qui donne au total 4 TFD d'ordre $N/4$ plus 2 étages de $N/2$ papillons.

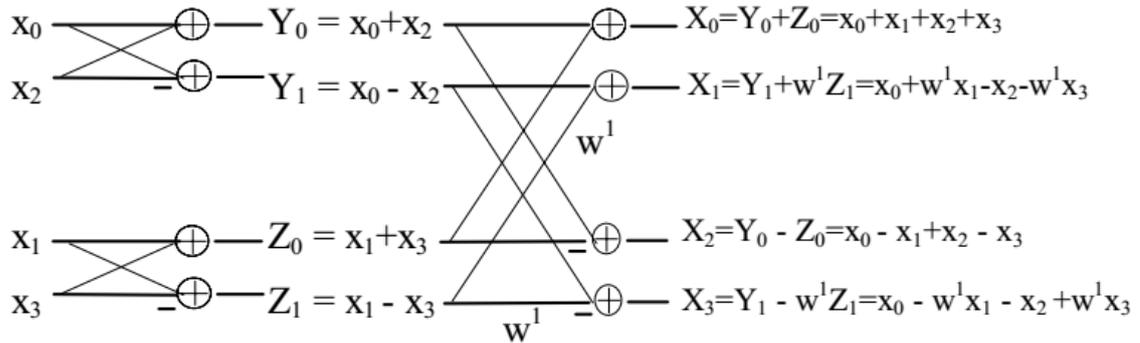
D'une manière plus générale si N est une puissance de 2, $N = 2^l$, on peut réitérer la méthode 1 fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons, avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une TFD d'ordre N devient alors celle de l étages de $N/2$ papillons, soit:

$$\begin{cases} l \frac{N}{2} = \log_2(N) \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ l N = \log_2(N) N \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de FFT avec entrelacement temporel (base 2) de Cooley-Tukey.

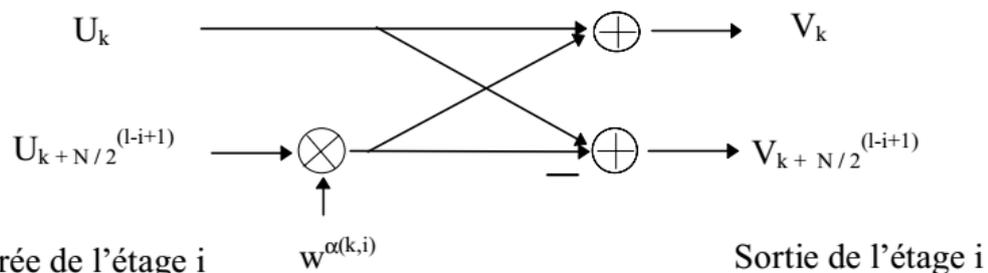
Ainsi pour $N = 1024 = 2^l$, le calcul direct demande: 1024×1024 multiplications et 1024×1023 additions, alors que le calcul avec l'algorithme de FFT demande: 10×512 multiplications et 10×1024 additions. Dans ce cas, l'algorithme divise environ par 200 le nombre d'opérations à effectuer. L'efficacité de la FFT augmente avec N .

Pour $N = 4$, le schéma complet de l'algorithme est le suivant:



On remarque sur ce schéma que les données $x(n)$ en entrée sont désordonnées, alors que celles de sortie $X(k)$ sont dans l'ordre naturel. De ce fait cet algorithme de FFT s'appelle FFT avec entrelacement temporel. On verra par la suite qu'il existe un algorithme symétrique appelé FFT avec entrelacement fréquentiel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement temporel, un papillon élémentaire, à l'étage i (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante:



À l'étape i , les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_i , N_i étant la taille des DFT intervenant à l'étape i , c'est à dire $N_i = 2^{i-1} = 2^l / 2^{(l-i+1)} = N / 2^{(l-i+1)}$. Le terme $w^{\alpha(i,k)}$ vaut:

$$w^{\alpha(i,k)} = e^{-j2\pi \frac{k}{2N}} = e^{-j2\pi \frac{kN}{N2^l}} = w^{k2^{l-i}}$$

2.4.2 FFT avec entrelacement fréquentiel :

Cet algorithme est symétrique du précédent. Les données temporelles $x(n)$ restent dans l'ordre naturel, mais les résultats $X(k)$ sont désordonnés.

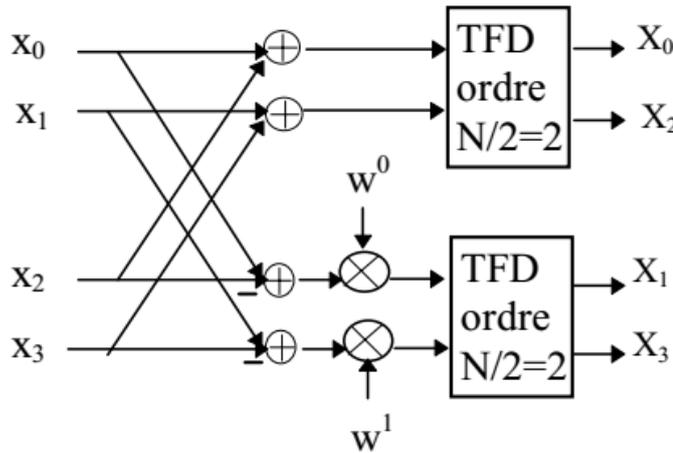
Le principe consiste encore à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives. Mais le regroupement de données se fait différemment.

Illustrons la méthode par un exemple pour $N = 4$.

Les données fréquentielles $(X(0), X(1), \dots, X(N - 1))$ sont regroupées en 2 paquets: un paquet formé des données d'indices pairs $(X(0), X(2), \dots, X(N - 2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(X(1), X(3), \dots, X(N - 1))$. Soit pour $N = 4$, un paquet $(X(0), X(2))$ et un paquet $(X(1), X(3))$. Pour $N = 4$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3)) \\ X(2) &= x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\ X(1) &= x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + [w^1(x(1) - x(3))] \\ X(3) &= x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - [w^1(x(1) - x(3))] \end{aligned}$$

Pour obtenir chaque paquet de résultats fréquentiels, on effectue une DFT d'ordre $N/2$ sur des données résultant d'une étape de papillons sur les données $x(n)$.



On a donc un étage de 2 papillons suivi d'un étage de 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$.

Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\ X(2i) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n2i}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n2i}{N}} \\ X(2i) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m + N/2)e^{-j2\pi \frac{mi}{N/2}} \\ X(2i) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) + x(n + N/2))e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}} \end{aligned}$$

Ainsi les $N/2$ termes $X(k)$ de rang pair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $(x(n) + x(n + N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

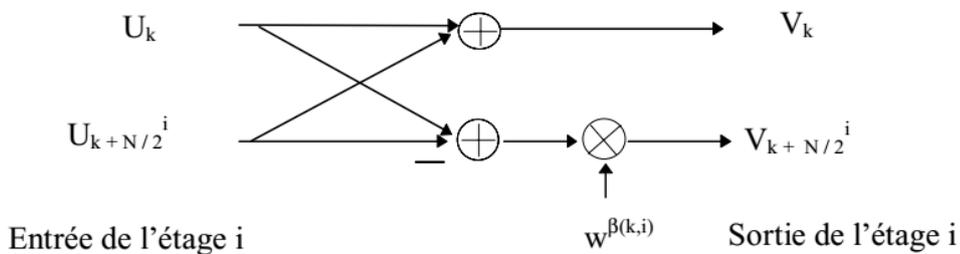
De même pour les termes $X(k)$ de rang impair:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_n x(n)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \\
 X(2i+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{n(2i+1)}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{n(2i+1)}{N}} \\
 X(2i+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{n}{N}}e^{-j2\pi\frac{ni}{N/2}} - \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m+N/2)e^{-j2\pi\frac{m}{N}}e^{-j2\pi\frac{mi}{N/2}} \\
 X(2i+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} w^n(x(n) - x(n+N/2))e^{-j2\pi\frac{ni}{N/2}}
 \end{aligned}$$

les $N/2$ termes $X(k)$ de rang impair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $w^n(x(n) - x(n + N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

D'une manière générale si N est une puissance de 2: $N = 2l$, on peut réitérer la méthode l fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons., avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une FFT avec entrelacement fréquentiel est identique à celle de la FFT avec entrelacement temporel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement fréquentiel, un papillon élémentaire, à l'étage i (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante:



A l'étape i , Les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_i , N_i étant la taille des DFT intervenant à l'étape i , c'est à dire $N_i = N/2^i$. Et le terme $w^{\beta(i,k)}$ vaut:

$$w^{\beta(i,k)} = e^{-j2\pi\frac{k}{2N}} = e^{-j2\pi\frac{k2^i}{2N}} = w^{k2^{i-1}}$$

3. Transformée en Z :

L'analyse et l'étude des systèmes analogiques linéaires et invariants (SLIT) tels que les filtres analogiques, exige souvent le passage au domaine spectral à travers:

- la réponses fréquentielle $H(f)$ ou $H(\omega)$ (en utilisant la transformée de Fourier)
- la fonction de transfert $H(p)$ (en utilisant la Transformée de Laplace).

En effet, il est avantageux de décrire les systèmes analogiques dans le domaine des fréquences ce qui permet de tirer un certain nombre de conclusions concernant leurs propriétés.

Le même principe est alors appliquée pour l'étude et l'analyse des systèmes discrets linéaires et invariant (SDLIT). A cet effet, la transformée en z , basée sur l'utilisation d'une fréquence complexe z , va procurer des avantages similaires pour les systèmes SDLI. **La transformation en z transforme l'espace du temps discret en un espace de fréquences z .**

- La transformée en z (TZ) de la réponse impulsionnelle d'un système SDLI est sa fonction de transfert en z que l'on note souvent $H(z)$.
- Il existe une relation directe entre la TZ et la TFTD (la transformée de Fourier à temps discret).
- La TZ permet la solution directe des équations aux différences finies de la même façon que la transformée de Laplace avec les équations différentielles.
- La TZ est une méthode générale pour l'étude des systèmes discrets.

3.1 Définition de la TZ:

On rappelle que la fonction de transfert en p d'un filtre analogique (ou SLIT) est obtenue grâce à la transformée de Laplace TL de sa réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$H(p) = TL[h(t)] = \int_D h(t)e^{-pt} dt$$

Où : $p = \sigma + j\omega$ l'opérateur de Laplace et D est le domaine de définition de $h(t)$.

Quant à un système discret SDLIT (ou numérique) on utilise la transformée en z de sa réponse impulsionnelle discrète $h(nT_e)$ (T_e le pas d'échantillonnage) directement obtenue à partir de la transformée de Laplace en posant $z = e^{pT_e}$.

$$H(z) = TZ[h(nT_e)] = \sum_n h(nT_e)z^{-n}$$

z , une variable complexe, peut prendre toute valeur sur le plan complexe appelé, en l'occurrence, plan z . Souvent on suppose $T_e = 1$, pour simplifier

Ainsi, pour T_e supposé égal à 1, on définit la transformée en z bilatérale de $h(n)$ par:

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$$

Contrairement aux signaux causaux ou aux séquences discrètes causales, on utilise la transformée en z unilatérale :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n}$$

Exemples :

- Calculez la TZ de la séquence discrète non causale suivante : $x(n) = \{-5, 2, 1, 3, -4, 6, 3\}$.
Où $x(0) = 1$;

$$X(z) = \sum_{n=0}^4 x(n)z^{-n} = -5z^2 + 2z + 1 + 3z^{-1} - 4z^{-2} + 6z^{-3} + 3z^{-4}$$

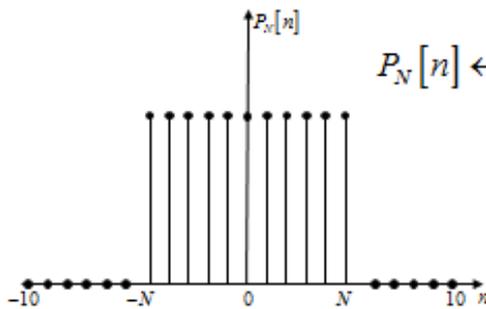
- Calculez la TZ de la séquence discrète suivante où $u(n)$ est l'échelon unitaire: $x(n) = 0.5^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^n z^{-n} = 1 + 0.5z^{-1} + 0.5^2 z^{-2} + 0.5^3 z^{-3} + 0.5^4 z^{-4} + \dots$$

- D'autre fonction :

$$\delta[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^{-k}$$



$$P_N[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^N + z^{N-1} + \dots + z + 1 + z^{-1} + \dots + z^{-N}$$

$$P_N[n] \leftrightarrow z^N (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-2N})$$

$$P_N[n] \leftrightarrow \frac{z^N (1 - z^{-2N-1})}{(1 - z^{-1})}$$

3.2 Region de convergence de la TZ:

La région de convergence, connue sous le nom de ROC, est importante à comprendre car elle définit la région où la transformée z existe.

En effet, la TZ est une série de puissance généralement infinie, il faut indiquer la région de convergence.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

Le ROC pour un $x(n)$ donné est défini comme la plage de z pour laquelle la transformée en z converge. Puisque la transformée z est une série de puissances, elle converge lorsque $x(n)z^{-n}$ est absolument sommable.

Autrement dit:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

Propriétés du ROC:

La région de convergence a un certain nombre de propriétés qui dépendent des caractéristiques de la séquence discrète $x(n)$:

- Le ROC ne peut contenir aucun pôle.
- Si $x(n)$ est une séquence de durée finie, alors le ROC est le plan z entier, sauf éventuellement $z = 0$ ou $|z| = \infty$. En effet, tant que chaque valeur de $x(n)$ est finie, la séquence sera absolument sommable.
- Le seul signal dont le ROC est le plan z entier est donc $x(n) = c\delta(n)$.

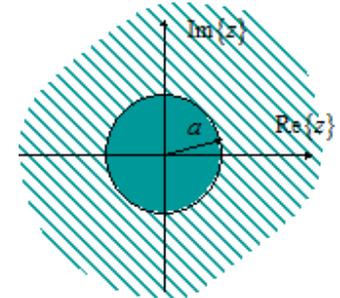
Exemples de calculs du ROC

1. Exponentielle

$$a^n u[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + \dots = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

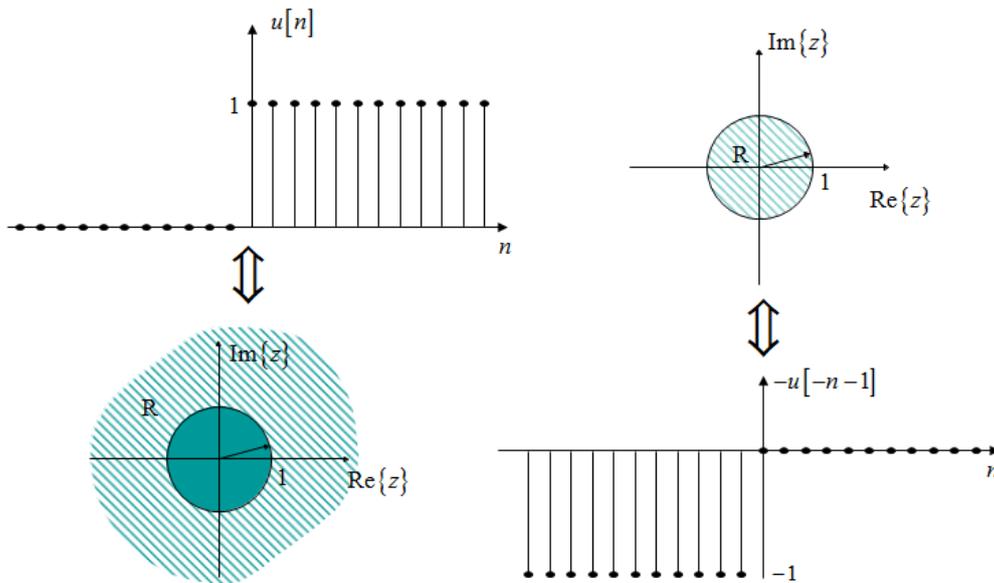
lorsque $|az^{-1}| < 1$ c'est à dire $|z| > |a|$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$



La condition $|z| > |a|$ définit la région de convergence R, ou RDC de la transformée en z , c'est à dire le domaine du plan z où cette transformée existe

2.



3.3 Propriétés de la TZ:

- la linéarité $TZ[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$
- le retard $TZ[x(n - m)] = z^{-m} X(z)$
- la multiplication par une séquence exponentielle $TZ[a^n x(n)] = X(z/a)$
- Inversion de temps $TZ[x(-n)] = X(z^{-1})$
- dérivation dans le domaine z $TZ[n^k x(n)] = (-1)^k z^k \frac{d^k X(z)}{dz^k}$
- convolution $TZ[x(n) * y(n)] = X(z) \times Y(z)$
- corrélation $TZ[x(n) \otimes y(n)] = X(z) \times Y(z^{-1})$
- Valeur initiale $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
- valeur finale (valable pour une séquence causale) $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [z - 1] X(z)$

3.4 La transformée en z inverse TZ⁻¹

La transformée en z inverse permet de retrouver la séquence discrète $x(n)$ à partir de sa transformée en z $X(z)$. La base de la TZ inverse est l'intégrale de Cauchy selon laquelle :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$

Γ étant un contour fermé d'intégration renfermant l'origine. Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n+k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{-n+k-1} dz = x[k] \end{aligned}$$

La transformée en z inverse est donc établie comme étant :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

Il s'agit d'une intégrale fermée sur un contour Γ se situant dans le plan z entièrement dans la zone de convergence. Or lorsque $X(z)$ est une expression rationnelle en z, selon le théorème des résidus de Cauchy.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_i \rho_i$$

les ρ_i étant les résidus évalués aux pôles de $X(z) z^{n-1}$ à l'intérieur de Γ .

Pour calculer la TZ inverse, souvent, des méthodes plus simples sont possibles. Si de plus $X(z)$ est une **fonction rationnelle en z** :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}}$$

On peut utiliser des méthodes comme les suivantes :

- On peut utiliser un développement en éléments simples et se ramener à des transformées en z connues.
- Dans certains cas, une division suivant des puissances croissantes de z^{-1} est suffisante.

3.5 TFTD vs TZ :

Nous connaissons bien la relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace dans le cas des systèmes et des signaux analogiques. En effet, la TF est un cas particulier de la TL, obtenu lorsqu'on remplace dans cette dernière p par $j\omega$.

Alors que dans le cas discret il s'agit de la relation entre la TZ et la TFTD (Transformée de Fourier à temps discret).

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_n h(n) z^{-n} \qquad H(e^{j\omega}) = TFTD[h(n)] = \sum_n h(n) e^{-jn\omega}$$

On voit bien que

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \text{ pour } -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Autrement dit, on trouve la TFTD en évaluant la TZ pour toutes les valeurs de z se situant sur le cercle unité dans le plan z .

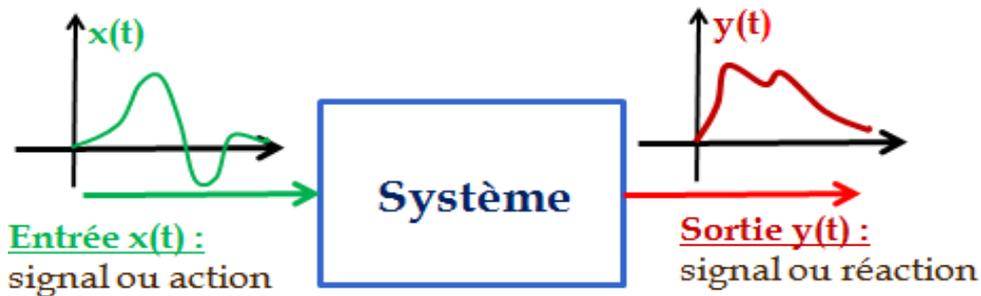
Quelques TZ

$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

4. Rappels sur les filtres analogiques :

4.1 Notions de système :

Un système est un processus qui produit un signal à sa sortie (ou réaction), noté par exemple $y(t)$, lorsqu'il est excité à son entrée par un signal (ou action) que l'on note par exemple $x(t)$. On dit alors que $y(t)$ est l'effet du système sur $x(t)$.

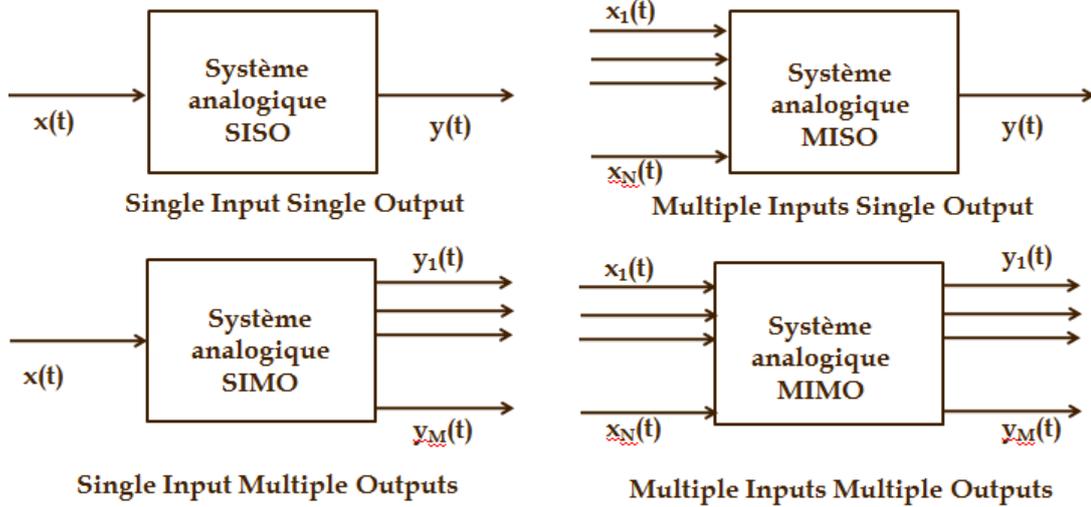


On peut modéliser (représenter mathématiquement) un système par une équation liant l'entrée $x(t)$ à la sortie $y(t)$.

$$y(t) = fct[x(t)]$$

fct : désigne une fonction mathématique.

Un système peut produire un ou plusieurs signaux à sa sortie, comme il peut être excité à son entrée par un ou plusieurs autres signaux



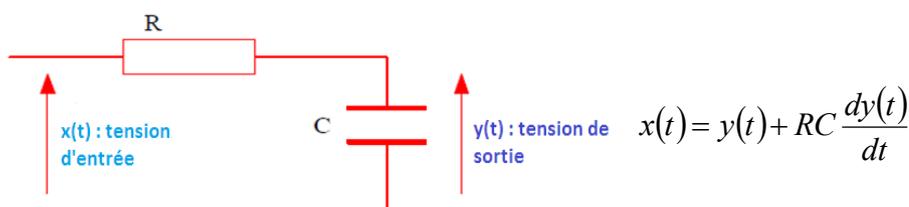
Un système peut donc être :

- électrique : Circuit électrique, moteur électrique
- électronique: capteur, amplificateur, filtre
- automatique: régulateur
- télécommunication: un modulateur, un démodulateur, canal de transmission ...etc
- mécanique: ressort, pendule, moteur mécanique.
-etc.

Evidemment, chaque type de systèmes possèdent ses propres signaux (ou paramètres) d'entrée et de sortie

4.2 Exemples de systèmes :

Parmi le systèmes électriques les plus sollicités nus avons les systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT).

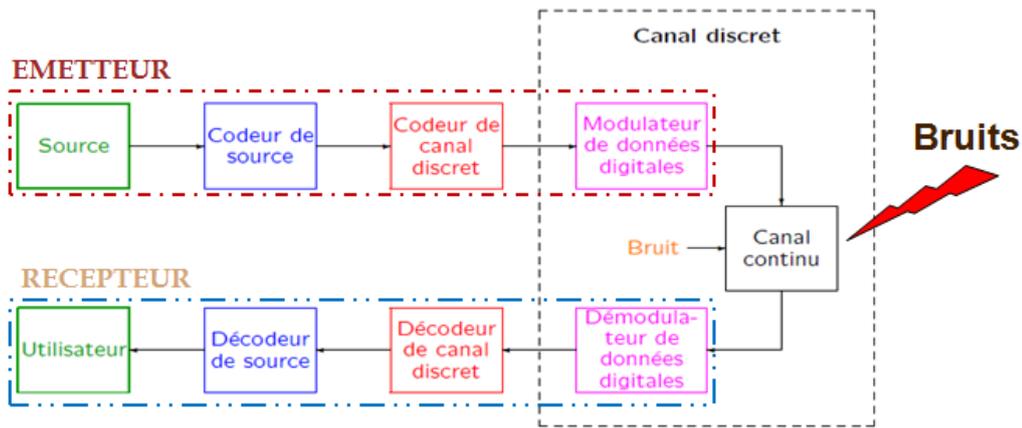


Comme nous pouvons le remarquer sur cet exemple simple et basic, la relation mathématique qui lie l'entrée $x(t)$ à la sortie $y(t)$ est sous forme d'une équation différentielle du 1^{er} ordre:

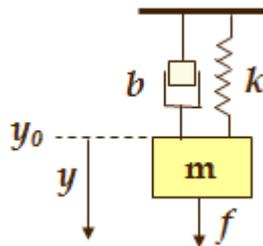
- les systèmes à équations différentielles représentent toujours des systèmes linéaires.
- De plus à coefficients constants indiquent l'invariance dans le temps.

4.2.1 Chaines de transmission :

Un système de communication (Emetteur, Canal et Récepteur) est formé par un ensemble de systèmes. La source, les codeurs, le modulateur, le canal, le démodulateur, les décodeurs sont des exemples de systèmes souvent complexes.



4.2.2 Système mécanique :



Avec :

- Ressort : raideur = k
- Amortisseur : coefficient de frottement = b

$$\sum forces = m \times accélération \Leftrightarrow f(t) - ky(t) - b \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

4.3 Définition d'un SLIT

Un système est invariant lorsque les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps. Autrement dit, un système est invariant lorsque sa réponse (sa sortie) de dépend pas de l'instant où on applique le signal d'entrée.

Pour une entrée $x(t)$ un système invariant donne $y(t)$. Alors pour une entrée $x(t - \tau)$ il doit donner $y(t - \tau)$

Exemple 1: Système invariant

$$y(t) = ax(t)$$

$$y(t - \tau) = ax(t - \tau)$$

Exemple 2: Système variant

$$y(t) = x(t)\sin(t)$$

$$y(t - \tau) = x(t - \tau)\sin(t - \tau)$$

$$y(t - \tau) \neq x(t - \tau)\sin(t)$$

4.3.1 La convolution pour un SLIT

En tenant compte leurs propriétés de linéarité et d'invariance, nous pouvons alors utiliser l'équation de convolution pour décrire les SLIT dans le domaine temporel.

Domaine temporel

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

Domaine fréquentiel

$$Y(f) = H(f) \times X(f)$$

4.3.2 Equations différentielles pour un SLIT

Un SLIT peut être également représenté dans le domaine temporel par des équations différentielles toujours entre l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$, de la forme:

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt_k} = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l x(t)}{dt_l}$$

- Les coefficients a_k et b_l sont des constantes,
- $N \geq M$: représente l'ordre du SLIT

La fonction de transfert $H(p)$ est donc un rapport d'un numérateur $N(p)$ (polynôme en p d'ordre M) sur un dénominateur $D(p)$ (polynôme en p d'ordre N)

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l p^l}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_M p^M}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + b_N p^N}$$

4.3.3 Réponse fréquentielle d'un SLIT

La réponse fréquentielle $H(f)$ d'un SLIT est un cas particulier de la fonction de transfert $H(p)$.

En effet $H(f) = H(p)$ pour $p = j\omega = j2\pi f$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (2\pi j f)^l}{\sum_{k=0}^N a_k (2\pi j f)^k}$$

Le gain en dB d'un SLIT peut être représenté par:

$$Gain_{dB}(f) = 20 \log_{10} |H(f)|$$

Le déphasage apporté par le SLIT sur le signal de sortie par rapport au signal d'entrée est donné par:

$$Arg(H) = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im}(H(f))}{\text{Re}(H(f))} \right)$$

La bande passante (BP) d'un SLIT est la gamme de fréquences limitée par la ou les fréquence(s) de coupures. Les fréquences de coupures correspondent:

$$|H(f_c)| = \frac{|H(f)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Elles correspondent également

$$Gain_{dB}(f_c) = Gain_{dB}(f)_{\max} - 3dB$$

On parle souvent de fréquences de coupures à -3dB

4.3.4 Stabilité des SLIT

On rappelle qu'un SLIT possède une fonction de transfert $H(p)$ sous forme d'un rapport de deux polynômes en p .

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l p^l}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} = \frac{b_0 + b_1 p^1 + b_2 p^2 + \dots + b_M p^M}{1 + a_1 p^1 + a_2 p^2 + \dots + a_N p^N}$$

Dès lors, nous pouvons calculer les racines de N(p) et aussi les racines de D(p).

- Les racines de N(p), où valeurs particulières de p annulant le numérateur, sont appelées *les zéros de H(p)*
- Les racines de D(p), où valeurs particulières de p annulant le dénominateur, sont appelées *les pôles de H(p)*

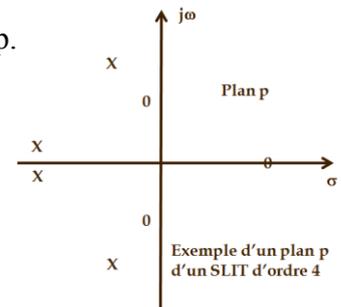
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p - z_0)(p - z_1) \dots (p - z_M)}{(p - p_0)(p - p_1) \dots (p - p_N)}$$

Où $z_1 = \sigma_1 + j\omega_1 = \sigma_1 + j2\pi f_1$ sont les zéros de $H(p)$ en supposant qu'elles sont des racines simples

Où $p = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$ sont les pôles de $H(p)$ en supposant qu'elles sont des racines simples

Nous pouvons donc représenter dans le plan p (repère où l'axe des amplitudes est $j\omega$ la partie imaginaire de p et l'axe des abscisses est σ la partie réelle de p.

- Les zéros sont représentés par \circ
- Les pôles sont représentés par des x



4.3.5 Exemples de SLIT : filtres analogiques

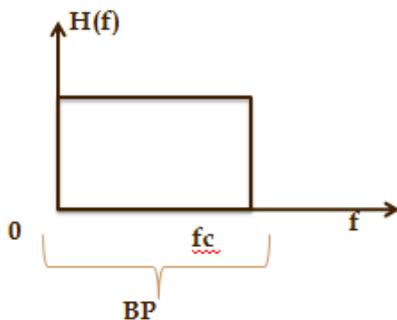
Parmi les SLIT analogique les plus sollicités, nous avons les filtres analogiques. L'étude et l'analyse de ces filtres analogiques, comme tous les SLIT, s'effectue dans le domaine temporelle mais aussi et surtout dans le domaines fréquentiel. Dans le domaine spectral nous avons besoin :

1. de la fonction de transfert en p, $H(p)$ qui nous permet entre autres de :
 - connaître les zéros et les pôles du filtre
 - déterminer la stabilité éventuelle du filtre
 - connaître le gain statique du filtre
2. de la réponse fréquentielle $H(f)$, cas particulier de $H(p)$, qui nous permet entre autre de connaître :
 - le gabarit du filtre
 - sa réponse en amplitude
 - sa réponse en phase
 - le type du filtre

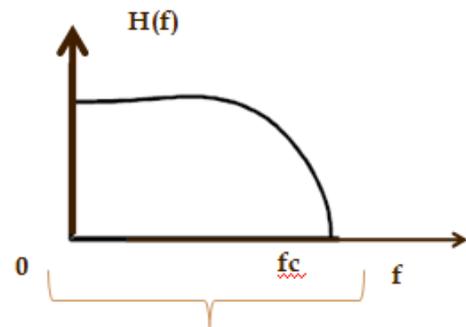
Il existe quatre types fondamentaux de filtres analogiques :

1. Filtre passe-bas : Sa bande passante BP est limitée entre 0 Hz et une fréquence de coupure haute notée f_c
2. Filtre passe-haut : Sa bande passante BP est limitée entre une fréquence de coupure notée f_c et une fréquence de coupure très haute-fréquence (théoriquement cette dernière tend vers l'infini)
3. Filtre passe-bande : Sa bande passante BP est limitée entre une fréquence de coupure basse notée f_{cb} et une fréquence de coupure haute notée f_{ch}
4. Filtre coupe-bande (relecteur) : Ses bandes passantes BP_b et BP_h sont limitées respectivement
 - entre 0 Hz et une fréquence de coupure basse notée f_{cb} pour BP_b
 - entre une fréquence de coupure haute notée f_{ch} basse et une fréquence de coupure très haute-fréquence (théoriquement cette dernière tend vers l'infini) pour BP_h

Les filtres Passe-Bas (ne laissent passer que les fréquences basses)

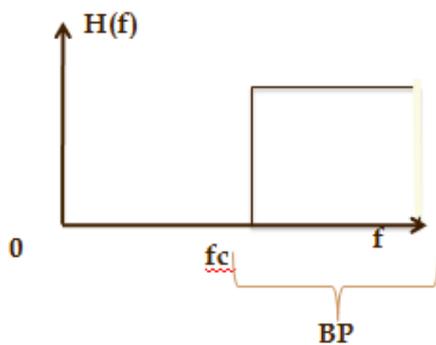


Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas idéal

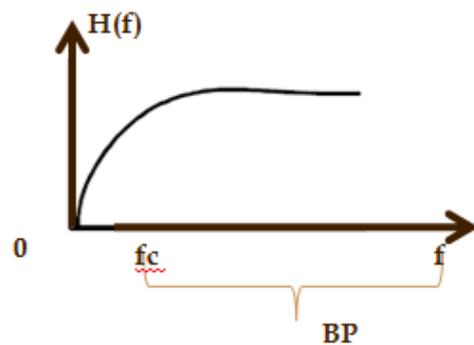


Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas réel

Les filtres Passe-Haut (ne laissent passer que les fréquences hautes)

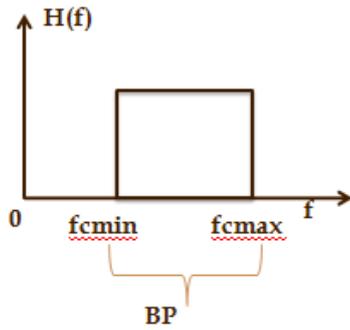


Réponse fréquentielle d'un filtre passe-haut idéal

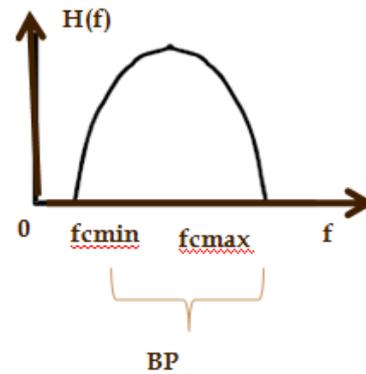


Réponse fréquentielle d'un filtre passe-haut réel

Les filtres Passe-Bande (ne laissent passer qu'une plage de fréquences)

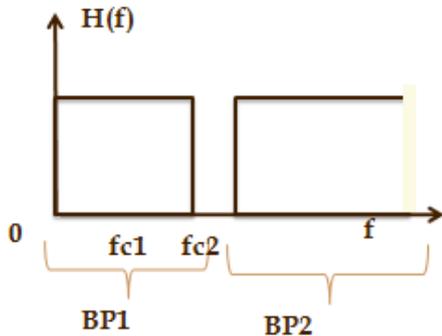


Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande idéal

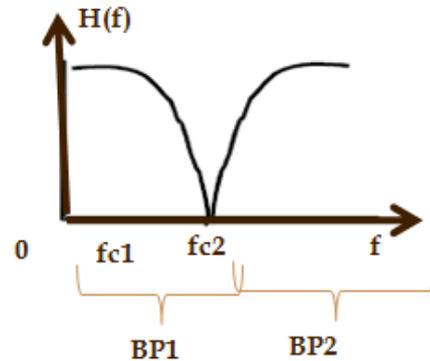


Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande réel

Les filtres Coupe-Bande (ne laissent pas passer une plage de fréquences).



Réponse fréquentielle d'un filtre coupe-bande idéal



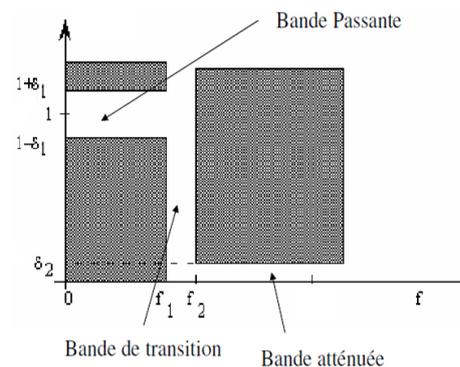
Réponse fréquentielle d'un filtre coupe-bande réel

Les étapes essentielles à suivre lors de la synthèse d'un filtre analogique :

1. Spécifications du filtre analogique à réaliser : GABARIT
2. Gabarit Normalisé : Détermination de l'ordre du filtre
3. Type de filtres usuels à utiliser (Butterworth, Chebychev) sous forme normalisée (Passe-bas avec pulsation de coupure $\omega_c = 1$)
4. Etape de dénormalisation : Filtre à réaliser de type quelconque (passe-bas, passe-haut ...etc) et de pulsation de coupure quelconque.
5. Choix de la structure à utiliser pour la conception (Rauch, Sallien-Key, Biquadratiqueetc)

Ci-dessous un exemple d'un gabarit d'un filtre analogique passe-bas que l'on désire réaliser. Il s'agit tout simplement des principales caractéristiques tolérées du Gain (module de la réponse fréquentielle) du filtre à réaliser, à, savoir :

- la bande passante : ici entre 0 et f_1
- La largeur de la bande de transition entre f_1 et f_2
- Les ondulations tolérées dans la BP que l'on note δ_1
- Les ondulations tolérées dans la bande coupée ou bloquée que l'on note δ_2

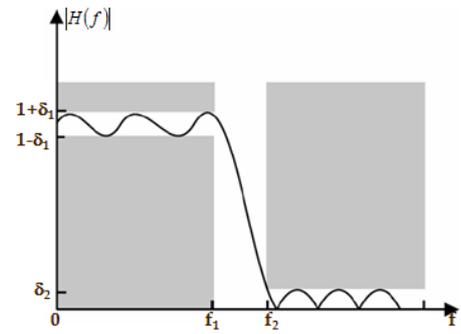


Généralement, les taux d'ondulations à l'intérieur de la bande passante (R_p) et dans la bande coupée (R_s) sont déterminés en dB, en utilisant les formules suivantes:

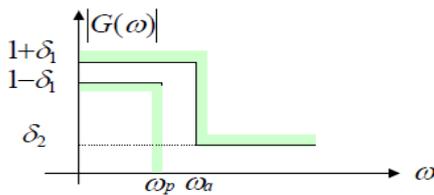
$$R_p(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right)$$

$$R_s(dB) = 20 \log_{10}(\delta_2)$$

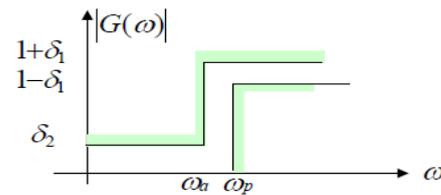
Nous pouvons facilement déduire la forme des gabarits des autres types de filtres, à savoir : passe-haut, passe-bande et coupe-bande.



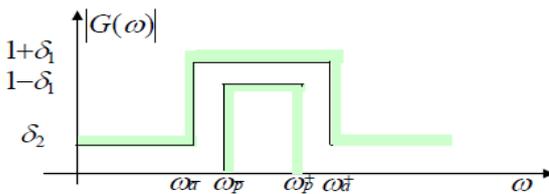
Gabarit d'un filtre passe bas



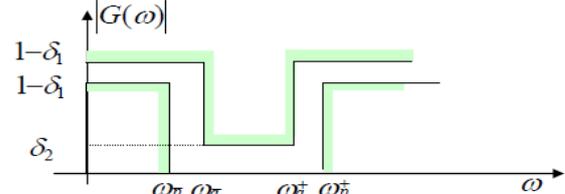
Gabarit d'un filtre passe haut



Gabarit d'un filtre passe bande



Gabarit d'un filtre coupe bande



5. Les filtres numériques (RIF et RII) :

Les SLIT discrets ou numériques ont des propriétés importantes spécialement l'équivalence de la convolution discrète dans le domaine temporel et la multiplication dans l'espace z , à l'instar des SLIT analogiques qui utilisaient la convolution analogique :



6. Filtre numérique à minimum de phase :