Chapter 1

Notions élémentaires

1.1 Objectifs de l'enseignement

Acquérir les fondements du raisonnement mathématique, Acquérir les fondements de la théorie des ensembles et acquérir les éléments de la rédaction des preuves mathématiques.

1.2 Éléments du langage mathématiques

Axiome. Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.

> Ainsi, par exemple, Euclide a énoncé cinq axiomes (« les cinq postulats d'Euclide »), qu'il a renoncé à démontrer et qui devaient être la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : "par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».
>
> Un autre exemple d'axiomes est fourni par les (cinq) axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels. Le cinquième axiome affirme que : « si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est dans P (le successeur de n est $n + 1$), alors $P = n$ ». Cet axiome est appelé «l'axiome d'induction »ou encore l'axiome de récurrence .
>
> Ces énoncés ont en commun d'être «évidents » pour tout le monde.

Proposition1.1 (ou assertion ou affirmation). Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, « tout nombre premier est impair » et « tout carré de réel est un réel positif » sont deux propositions. Il est facile de démontrer que la première est fausse et la deuxième est vraie. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

Théorème1.2. Un théorème est une proposition vraie (et en tout cas démontrée comme telle). Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance, et même on a tendance à appeler proposition la plupart des théorèmes pour réserver le mot théorème aux plus grand d'entre eux (théorème de Pythagore, ...). C'est d'ailleurs ce dernier point de vue que nous adopterons dans les chapitres ultérieurs (mais pas dans ce premier chapitre où le mot «proposition » aurait alors deux significations différentes).

Corolaire. Un corolaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème. Par exemple, dans le chapitre «continuité ", le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles, est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un corollaire de ce théorème affirme alors que si une fonction définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

Lemme1.3. Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

Conjecture. Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de le confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmer. Les conjectures suivantes sont célèbres :

- (conjecture de Fermat) Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ (cette conjecture date du XVII siècle et il a été démontré récemment que ce résultat était vrai).

Définition1.4. Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet. On doit avoir conscience que le mot « axiome » est quelquefois synonyme de « définition ». Par exemple, quand vous lirez « définition d'un espace vectoriel », vous pourrez tout autant lire « axiomes de la structure d'espace vectoriel » et vice-versa.

1.3 Rédaction de preuves mathématiques

1.3.1 raisonnement déductif

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant :

Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Un résultat connu comme étant vrai (c'est à dire un théorème) ne peut entraîner qu'un autre résultat vrai. Cette règle est connue sous le nom de "modus ponens". C'est le raisonnement de base que vous reproduirez un grand nombre de fois. Et même, vous tiendrez ce raisonnement tellement de fois (ou encore, vous serez tellement souvent dans la situation où l'hypothèse P est vraie) que vous risquez à terme de commettre une confusion entre la phrase simple « $P \Rightarrow Q$ est vraie » et la phrase plus complète « P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie». Seule la deuxième permet d'affirmer que Q est vraie.

Sachant de plus que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante : P est vraie et $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow \ldots \Rightarrow S \Rightarrow T$ est vraie, et on a donc montré que T est vraie.

1.3.2 raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\bar{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\bar{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\bar{P}$ est fausse ou encore si P est vraie). Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Quand $\bar{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ou encore $a^2 = 2b^2$. Maintenant, dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier a^2 (qui est à l'évidence supérieur à 2), le nombre premier 2 apparaît à un exposant pair (si $a = 2^{\alpha} \times \ldots$ alors, $a^2 = 2^{2\alpha}$) alors qu'il apparaît à un exposant impair dans $2b^2$(si $b = 2^{\beta} \times \ldots$ alors, $2b^{2\beta+1} \times \ldots$). Si l'on admet l'unicitéde la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur à 2 (unicité qui sera démontrée plus tard dans ce cours), l'égalité des nombres a^2 et $2b^2$ est donc impossible. Par suite, l'hypothèse faite ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) est absurde et on a montré (par l'absurde) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.3.3 raisonnement par contra-position

Le schéma est le suivant :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est une proposition vraie.

Exemple. Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montrons que $(kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1)$. Supposons que $k \neq 1$ ou $k' \neq 1$. Alors, on a $(k \geq 2$ et $k' \geq 1)$ ou $(k \geq 1$ etk $k' \geq 2)$. Dans les deux cas, on a $kk' \geq 2$ et en particulier, $kk' \neq 1$. Donc,

$$(k \neq 1 \text{ ou } k' \neq 1) \Rightarrow (kk' \neq 1)$$

- Par contra-position, on a montré que

$$(kk' = 1) \Rightarrow (k = 1 \text{ et } k' = 1)$$

1.4 Théories mathématiques

A la base d'une théorie mathématique il y'a les axiomes et les définitions :

Définition1.5 (Axiome) Un axiome est un énoncé mathématique que l'on admet sans démonstration.

Exemple.

- Axiome d'Euclide sur les droites parallèles.
- Axiome de Pasch sur l'intersection d'un triangle et une droite.
- Axiome de Hilbert de la géométrie euclidienne.
- axiome d'Archimède sur les nombres réels.
- Axiome de Peano sur les entiers naturels.
- Axiome de Zermelo-Fränkel sur la théorie des ensembles.
- Axiome de Zorn (dit axiome de choix).

Définition1.6 On pose une définition de façon arbitraire pour désigner un objet mathématique.

Exemple.

- Les définitions d'un nombre.
- Les définitions d'une application.
- Les définitions d'une dérivée.

Dans une théorie mathématique on trouve des propositions (assertions), des prédicats, des théorèmes, des lemmes et des conjectures :

Définition1.7 (Assertion) Une assertion est un énoncé mathématique on peut attribuer la valeur de vérité : vrai (1) ou faux (0) mais jamais les deux à la fois.

Exemple.

- L'énoncé "Alger est la capitale de l'Algérie" est vrai.
- L'énoncé "24 est un multiple de 2" est vrai.
- L'énoncé "19 est un multiple de 2" est faux.

Définition1.8 (Prédicat) Un prédicat est une assertion contenant des variables.

Exemple.

- L'énoncé suivant : $P(n)$: " n est un multiple de 2 " est un prédicat car il devient une assertion quand on donne une valeur à n;
- $p(10)$: "10 est un multiple de 2 " est une assertion vraie,
- $p(11)$: "11 est un multiple de 2 " est une assertion fausse.
- $q(x, A)$: "$x \in A$ " est un prédicat à deux variables; $q(1, \mathbb{N})$ est vraie, $q(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.

Lemme1.9 Un lemme est un résultat d'importance malaxeur.

Théorème1.10 Un théorème est un résultat d'une importance majeure.

Conjecture1.11 Une conjecture est une proposition q l'on a vérifiée dans plusieurs cas, mais que l'on a pas encore réussi démontrer.

Exemple.

- La conjecture de Fermat sur l'équation diophantienne suivante d'inconnues x, y et z : $n \in \mathbb{N}, x^n + y^n = z^n$. Il affirme qu' n'existe aucune solution non triviale si le paramètre $n > 2$ Mais il fallut attendre 1996, et le mathématicien anglais Andrem-Wiles, pour trouver une réponse définitive.
- La conjecture de Riemann sur les zéros non triviaux de la fonction ζ: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^*}$ (conjecture non résolue).
- La conjecture de Bertrand sur les nombres premiers dans les intervalles $[n, 2n]$.

1.5 Connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions :

Énoncé. non P

Notation. $\neg P$

L'assertion $\neg P$ est vraie signifie que P est fausse.

Énoncé. P et Q

Notation. $P \wedge Q$

L'assertion $P \wedge Q$ est vraie si P et Q des sont; $P \wedge Q$ est fausse .

Énoncé. P ou Q

Notation. $P \vee Q$

L'assertion $P \vee Q$ est vraie si l'une (au moins) des deux assertions $\boldsymbol{P}$ su Q est vraie, $P \vee Q$ est fausse si P et Q sont fausses.

Énoncé. $\left\{\begin{array}{c} \text{si } P\text{, alors } Q \\ P \text{ implique } Q \\ P \text{ est une condition suffisante de } Q \\ Q \text{ est une condition nécessaire de } P \end{array}\right\}$

Notation. $p \Longrightarrow q, p \longrightarrow q$

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie signifie qu'il est exclu que P soit sans que Q ne le soit.

Énoncé. $\left\{\begin{array}{c} P \text{ équivant à } Q \\ P \text{ si et seulement si } Q \end{array}\right\}$

Notation. $P \Longleftrightarrow Q, P \longleftrightarrow Q, P \equiv Q$

L'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie signifie que :

$$(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P) \text{ sont vraies.}$$

on résume cela dans les tables de vérité ci-dessous

$-P$	P
0	1
1	0

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0

Propriétés1.12

- $P \wedge (Q \vee Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$; double distributivité de "et" et "ou".
- $P \vee (Q \wedge Q) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$.
- $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$; contraposée.
- $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$; loi de De Morgan.
- $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.
- $P \Longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
- $\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

1.6 Quantificateurs logiques

Énoncé. Quel que soit ou pour tout.

Notation. $\forall \quad (\forall x p(x))$

Énoncé. II existe au moins ou il existe.

Notation. $\exists \quad (\exists x p(x))$

Exemple.

- La proposition $\forall x \in [-3,1], x^2+2x-3 \leq 0$ est vraie.
- La proposition $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair }) \Longrightarrow (n \text{ pair })$ est vraie.
- La proposition $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ est vraie.
- La proposition $\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x = 1''$ est vraie.

Remarque.

- La proposition $\exists x \in E, P(x)$ signifie que

$$\exists x((x \in E) \wedge P(x))$$

et se lit comme suit : "si $x \in E$, alors $P(x)$ est vraie".

- La proposition $\forall x \in E, P(x)$ signifie que

$$\forall x(x \in E \Longrightarrow P(x))$$

et se lit comme suit : "Si pour tout (ou quel que soit) x appertenant à $E, P(x)$ est vraie".

- S'il existe un et un seul x dans E, tel que $P(x)$ soit vraie; on pourra écrire $\exists ! x \in E, P(x)$.
- Si $\forall x \in E, P(x)$ est vraie alors $\exists x \in E, P(x)$ est vraie.

Remarque. (Attention) $\exists !$ ne désigne pas un quantificateur. En effet :

$$(\exists ! x \in E, P(x)) \equiv (R_1 \wedge R_2) \text{ òu } R_1 \equiv (\exists x \in E, P(x))$$

et

$$R_2 \equiv (\forall x \in E, \forall x' \in E, [(P(x) \wedge P(x')) \Longrightarrow x = x'])$$

1.6.1 Règles de négation

Soit $P(x)$ un prédicat sur E. De manière évidente on a :

- $\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$.
- $\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$.

Exemple.

- La négation de $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, 1 + nx \leq (1+x)^n$ est $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in \mathbb{R}_+, 1 + nx > (1+x)^n$.

- La négation de $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 5$ est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x + y \neq 5$.

Remarque. (Attention) On vérifie aussi que l'on a :

$$\neg(\exists! x \in E, p(x)) \equiv (\neg R_1 \vee \neg R_2)$$

avec $R_1 =$ existence et $R_2 =$ unicité.

- On peut permuter deux quantificateurs identiques.
- Ne pas permuter deux quantificateurs différents.

1.7 Méthodes de démonstration

Réaliser une démonstration (preuve ou raisonnement) en mathématiques, c'est un processus essentiel qui permet de passer des propositions supposées vraies en tant qu'hypothèses à une proposition appelée conclusion, en respectant les règles de la logique.

1.7.1 Démonstration Directe

Une démonstration directe est le type de preuve le plus simple et le plus courant. Dans une démonstration directe, vous partez des hypothèses données et appliquez un raisonnement logique pour parvenir à la conclusion souhaitée.

Exemple. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution. Prenons $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors, $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}$. De même $b = \frac{k}{l}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ et un certain $l \in \mathbb{N}$. Maintenant : $a + b = \frac{pl+kq}{ql}$. Or le numérateur $pl + kq$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur ql est lui un élément de $\mathbb{N}$. Donc $a + b$ s'écrit bien sous la forme $\frac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.7.2 Le Raisonnement par Hypothèse Auxiliaire : Une Approche Avancée

Le raisonnement par hypothèse auxiliaire est une technique avancée de démonstration en mathématiques qui permet de prouver des énoncés complexes en introduisant temporairement une hypothèse supplémentaire. Cette méthode est particulièrement utile lorsque la preuve directe de l'énoncé principal est difficile, mais devient plus simple sous certaines conditions auxiliaires.

Le processus de raisonnement par hypothèse auxiliaire peut être décrit en détail :

1. Énoncé Principal : Tout d'abord, vous avez un énoncé principal que vous souhaitez démontrer. Cet énoncé peut être exigeant, complexe ou difficile à prouver directement.

2. Hypothèse Auxiliaire : Pour faciliter la preuve de l'énoncé principal, vous faites une supposition temporaire, l'hypothèse auxiliaire. Cette hypothèse est introduite pour simplifier la démonstration de l'énoncé principal.

3. Démonstration Sous Hypothèse Auxiliaire : Vous procédez ensuite à la démonstration de l'énoncé principal en utilisant l'hypothèse auxiliaire. Cette démonstration est souvent plus aisée que la preuve directe de l'énoncé principal. Vous pouvez utiliser des méthodes mathématiques, des équations, des théorèmes, etc., sous l'hypothèse auxiliaire.

4. Validation de l'Hypothèse Auxiliaire : Une fois que vous avez démontré l'énoncé principal sous l'hypothèse auxiliaire, vous prouvez que l'hypothèse auxiliaire est vraie. Cela peut nécessiter une démonstration distincte, des calculs supplémentaires, ou même une preuve par contradiction.

5. Retour à l'Énoncé Principal : Après avoir confirmé que l'hypothèse auxiliaire est vraie, vous revenez à l'énoncé principal que vous souhaitiez prouver. Vous pouvez maintenant conclure que l'énoncé principal est vrai, car il découle de l'hypothèse auxiliaire, qui a été établie comme vraie.

Exemple. Considérons $A = \{2, -3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 6 = 0\}$, mon- ons que $A = B$.

Solution. On a $(A \subset B \wedge B \subset A) \Longrightarrow A = B$, donc pour montrer que $A = B$, il suffit de montrer que ($A \subset B$ et $B \subset A$).

1.7.3 Démonstration par disjonction des cas

Démonstration par disjonction des cas est une méthode de preuve mathématique qui consiste à diviser un problème complexe en plusieurs cas plus simples et à démontrer que l'énoncé est vrai dans chacun de ces cas. Cette méthode repose sur le principe que si vous pouvez montrer que l'énoncé est vrai dans tous les cas possibles, alors il est vrai en général.

Le processus de démonstration par disjonction des cas peut être résumé comme suit :

1. Identification des Cas : Tout d'abord, identifiez les différents cas possibles qui peuvent se produire en fonction des conditions ou des variables en jeu. Ces cas doivent couvrir toutes les possibilités.

2. Démonstration de Chaque Cas : Ensuite, démontrez que l'énoncé est vrai pour chaque cas individuellement. Vous devez appliquer des arguments et des preuves spécifiques à chaque cas.

3. Exhaustivité : Assurez-vous que les cas que vous avez considérés sont exhaustifs, c'est-à-dire qu'ils couvrent toutes les situations possibles. Il ne doit pas y avoir de cas non traité.

4. Conclusions Séparées : Pour chaque cas, concluez que l'énoncé est vrai dans ce cas particulier. Vous pouvez utiliser des arguments, des démonstrations, des équations, etc., pour montrer que l'énoncé est satisfait.

5. Conclusions Générales : Enfin, après avoir montré que l'énoncé est vrai dans tous les cas individuels, concluez que l'énoncé est vrai dans tous les cas possibles, c'est-à-dire en général.

Exemple. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ pair.

Solution. On pose $P =$ "n est pair", on a :

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1),$$

donc si, n est pair alors, $n^3 - n$ est pair et si, n est impair on a aussi, $n^3 - n$ est pair.

1.7.4 Démonstration par l'absurde

Démonstration par l'absurde** est une méthode de preuve en mathématiques et en logique qui repose sur la supposition contraire pour établir la vérité d'une proposition. Voici un résumé de cette méthode :

1. Hypothèse Contradictoire : Pour utiliser la démonstration par l'absurde, on suppose d'abord que la proposition que l'on souhaite prouver est fausse (c'est-à-dire qu'on suppose la négation de la proposition).

2. Dérivation de Conséquences : En partant de cette hypothèse contradictoire, on dérive des conséquences logiques et mathématiques.

3. Conduisant à une Contradiction : On poursuit la dérivation jusqu'à ce qu'on arrive à une contradiction logique ou mathématique. Cela signifie qu'il y a une incohérence ou une impossibilité dans les conséquences déduites.

4. Conclusion : Lorsqu'une contradiction est atteinte, on conclut que l'hypothèse initiale (la négation de la proposition que l'on souhaite prouver) est fausse.

5. Affirmation de la Proposition : Par conséquent, on affirme que la proposition que l'on voulait prouver est vraie, car si sa négation était vraie, cela conduirait à une contradiction.

Exemple. "Montrons que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ".

Solution. On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et on arrive à une conclusion fausse. Cela voudra donc dire que notre hypothèse de départ est fausse et donc que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Supposons maintenant, (par l'absurde) que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers relatifs p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. On a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, aussi p est pair, donc il existe un nombre relatif k tel que $p = 2k$, donc $p^2 = 4k^2$ or $p^2 = 2q^2$, done $2q^2 = 4k^2$, donc $q^2 = 2k^2$, donc q est $\underline{p} = 2k$, di existe un nombre relatif l tel que $q = 2l$, donc la fraction $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2l}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.7.5 Démonstration par contraposée

Démonstration par contraposée** est une méthode de preuve en mathématiques et en logique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en montrant que sa contraposée est vraie. Voici un résumé de cette méthode :

1. Contraposée : Pour utiliser la démonstration par contraposée, on commence par examiner la contraposée de la proposition que l'on souhaite prouver. La contraposée d'une proposition est la négation de sa conséquence, c'est-à-dire que si la proposition originale est de la forme "Si A, alors B," la contraposée est "Si non-B, alors non-A."

2. Démonstration de la Contraposée : On démontre ensuite que la contraposée est vraie. Cela peut se faire en utilisant des arguments logiques, des preuves mathématiques, ou d'autres méthodes appropriées.

3. Conclusion : Si la contraposée est démontrée comme vraie, on peut alors conclure que la proposition originale est également vraie. Cela découle de la logique de la contraposée, où l'invalidité de la conséquence implique l'invalidité de l'hypothèse.

Exemple. Soit n un entier, montrer l'implication suivante : Si n^2 est impair alors n l'est aussi.

Solution. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 4k^2 + 4k \in \mathbb{N}$. n en résulte que n^2 est impair. Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 l'est de même. Par contreproposition, ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.7.6 Démonstration par contre-exemple

La Démonstration par Contre-Exemple est une méthode de preuve en mathématiques et en logique qui consiste à réfuter une proposition en présentant un exemple spécifique qui contredit cette proposition. Voici un résumé de cette méthode :

1. Hypothèse de la Proposition : On commence par examiner la proposition que l'on souhaite réfuter. Cette proposition peut être de n'importe quelle forme, mais elle doit être clairement définie.

2. Présentation d'un Contre-Exemple : Pour réfuter la proposition, on présente un exemple concret qui ne satisfait pas aux conditions de la proposition. En d'autres termes, on montre un cas spécifique où la proposition est fausse.

3. Définition de l'Exemple : On décrit en détail l'exemple et explique comment il viole les conditions de la proposition. Il est important que l'exemple soit clair et vérifiable.

4. Conclusion: Après avoir présenté un contre-exemple, on conclut que la proposition est fausse. Le contre-exemple démontre que la proposition ne tient pas dans tous les cas possibles.

Exemple. Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés". (Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, \ldots$, par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$).

Solution. Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont $0, 1, 4$ mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

1.7.7 Démonstration par récurrence

La Démonstration par Récurrence est une méthode de preuve en mathématiques, particulièrement utile pour démontrer la véracité d'énoncés mathématiques qui dépendent d'un entier naturel n. Voici un résumé de cette méthode :

1. Étape de Base : La démonstration par récurrence commence par l'étape de base, où l'on prouve que l'énoncé est vrai pour n = 1 (ou une autre valeur de départ). Il s'agit souvent d'une simple vérification.

2. Hypothèse de Récurrence : On suppose que l'énoncé est vrai pour un certain entier k (k est généralement une valeur arbitraire, mais supposée fixe pour l'hypothèse de récurrence). On appelle cela l'hypothèse de récurrence.

3. Démonstration pour k + 1 : On démontre ensuite que si l'énoncé est vrai pour k, il est également vrai pour k + 1. Cela implique généralement de montrer que l'énoncé pour k + 1 est basé sur l'hypothèse de récurrence.

4. Conclusion de la Récurrence : En utilisant l'étape de base et l'hypothèse de récurrence, on peut conclure que l'énoncé est vrai pour tous les entiers naturels n.

Exemple. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Solution. Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion : $2^n > n$. Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n$ (car par $P(n)$ nous savons $2^n > n$), donc $2^{n+1} > n + 1$ (car $2^n > 1$). Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Chapter 2

Calcul propositionnel

2.1 Alphabet et mot

Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini) les éléments de A seront appelés des lettres et A luis même sera appelé alphabet.

Définition2.1. Un mot sur l'alphabet A est une suite finie d'éléments de A

$$U = U_1U_2 \ldots .U_n$$

n est la longueur du mots U.

L'ensemble du mots sur A sera noté A^*.

Sur A^* on définit l'opération de concotenation :

$$A^* \times A^* \longrightarrow A^*$$

$$(U, V) \longmapsto U.V = U_1 \cdot U_2 \ldots .U_n \cdot V_1 \cdot V_2 \ldots V_m$$

Avec: $U = U_1 \ldots U_n$ et $V = V_1 \ldots V_m$

La longueur d'un mot définit une application :

$$l : A^* \longrightarrow N$$

$$U = u_1.u_2...u_n \longmapsto l(u) = n \text{ (} n \text{ la longueur de } u)$$

la concaténation est une opération associative est a pour élément neutre le mot vide ε :

$$u \cdot \epsilon = \epsilon \cdot u = u$$