Chapter 2

Calcul propositionnel

2.1 Alphabet et mot

Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini) les éléments de A seront appelés des lettres et A luis même sera appelé alphabet.

Définition2.1. Un mot sur l'alphabet A est une suite finie d'éléments de A

$$U = U_1U_2 \dots .U_n$$

n est la longueur du mots U.

L'ensemble du mots sur A sera noté A^*.

Sur A^* on définit l'opération de concotenation :

$$A^* \times A^* \longrightarrow A^*$$

$$(U, V) \longmapsto U.V = U_1 \cdot U_2 \dots .U_n \cdot V_1 \cdot V_2 \dots V_m$$

Avec: $U = U_1 \dots U_n$ et $V = V_1 \dots V_m$

La longueur d'un mot définit une application :

$$l : A^* \longrightarrow N$$

$$U = u_1.u_2...u_n \longmapsto l(u) = n \text{ (} n \text{ la longueur de } u)$$

la concaténation est une opération associative est a pour élément neutre le mot vide ε :

$$u \cdot \epsilon = \epsilon \cdot u = u$$

Autrement dit $(A^*, .)$ monoïde.

Définition2.2. On dit que $a \in A$ a une occurrence dans le mot u si a est une lettre de u, i.e: si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ donc: $\exists k \in \{1, 2, \dots n\}$ t.q : $a = u_k$

Remarque. il peut y avoir plusieurs occurrences de a dans u.

Exemple.

$$A = \{a, b \dots x, y, z\}$$

$$u = abaab$$

$$l(u) = 5$$

la lettre a á trois occurrences dans u et la lettre b en a deux occurrences dans u.

Propriété 2.1

- $l(uv) = l(u) + l(v)$
- $uv = uw \Rightarrow v = w$
- $uv = vw \Rightarrow u = w$

Définition2.3. le mot u est un préfixe du mot v s'il existe un mot de $w \in A^*$ t.q : $v = uw$. u est un suffixe de v si $\exists w \backslash v = wu$

2.2 Syntaxe des formules propositionnelles

Définition2.4. les connecteur propositionnels sont les symboles :

$\rceil$: Pour la negation (non)

$\wedge$: pour la conjonction (et)

$\vee$: pour la disjonction (ou)

$\longrightarrow$: pourl'implication

$\longleftrightarrow$: pour l'quivalence

Soit P un ensemble non vide des propositions élémenteures ou atomiques, les éléments de P seront notés : p, q, r, s.

Remarque.

1- En logique élémentaire une proposition est une énoncé qui sera á communiquer des faits : $p =$ il peut, $q =$ il fait beau

2- P ne contient pas les connecteurs $\rceil, \wedge, \vee \longrightarrow, \longleftrightarrow$;on considère l'alphabet suivante:

$$A = P \cup \{\rceil, \wedge, \vee \longrightarrow \longleftrightarrow, ()\}$$

Soit A^* l'ensemble des mots sur A on a :

$$(p \longrightarrow q) \in A^*$$

$$(p \in A^*$$

$$p \in A^*$$

$$() \in A^*$$

$$(pq\wedge) \in A^*$$

Définition2.5. L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est le plus petit sous ensemble de A^* qui vérifie:

1- $P \subseteq \mathcal{F}$ (toute proposition élémentaire est une formule).

2- $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \rceil F \in \mathcal{F}$

3- $F, G \in \mathcal{F} \Longrightarrow (F * G) \in \mathcal{F}$ avec $*, =, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$

Remarque.

1- Les formules de suites sont des mots i.e des suit de symboles sans aucune signification l'attribution d'un sens i.e d'une valeur "vrais " ou "fausse" a une formule constitue le sémantique de formule .

2- Le terme " plus petit"est à prendre au sens de l'inclusion des ensembles de $\mathcal{F}$ est donc l'intersection de toutes les parties de A^* qui vèrifient les propriétès 1,2 est cette intersection est non vide puisque A^* lui même vérifie ces proprietés donc: $\mathcal{F} = \bigcap_{Y \subseteq A^*} Y$ et Y vérifie 1,2 et 3 .

Exemples.

- $(\neg p \longrightarrow q)$ est une formule .
- $(p \wedge q \wedge r)$ n'est pas une formule.
- $(\neg p \longrightarrow q)$ est une formule .
- p est une formule
- $(p \longrightarrow q \vee r)$ n'est pas une formule.

Définition2.6. La longueur d'une formule F est le nombre des lettres dans F, $l(F) = \sharp$ lettres dans F

Exemple. $F = (p \wedge q)$; $l(F) = 5$; $F = p$; $l(F) = 1$.

Remarque :Il n'y a pas de formule de longueur 0

- Il est possible de donner de l'ensemble $\mathcal{F}$ une description plus explicite : nous allons pour cela définir, par récurrence, une suite $(\mathcal{F}_n)_n \in \mathbb{N}$ de parties de A^*, on pose $\mathcal{F}_0 = p$ et pour chaque n

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\rceil F, F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(F * G); F, G \in \mathcal{F}_{n}, * \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}\}$$

On notera que la suite que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$on a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

(pour $n \leq m$, on $a\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$)

Proposition2.1. $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

Preuve. Posons $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$:

Z est une partie de A^* qui vérifie les propriétés 1,2 et 3 donc $\mathcal{F} \subseteq Z$(car $\mathcal{F}$ est le plus petit sous ensemble de A^* vérifier 1,2 et 3)

$Z \subseteq \mathcal{F}$?

On montre par récurrence que, pour chaque entier n, on a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$?

Si $n = 0, p = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ par définition, on suppose (hypotèse de récurrence) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$ d'aprés la définition de $\mathcal{F}_{n+1}$ et les propriétés de stabilité de $\mathcal{F}$

Définition2.7. La hauteur d'une formule $F \in \mathcal{F}$ est le plus petit des entiers n tels que : $F \in \mathcal{F}$. Elle noté $h[F]$

$$h(F) = \min \{n/F \in \mathcal{F}_n\}$$

Exemple.

- $F = p, \quad h(F) = 0$
- $F = (p \wedge q), \quad h(F) = 1$
- $F = \rceil p, \quad h(F) = 1.$
- $F = (\rceil p \wedge q); \quad h(F) = 2.$

2.3 Principe d'indication sur l'ensemble des formules

Supposons que nous voulions démontrer qu'une certaine proposition $Q(F)$ est vérifiée par toute $F \in \mathcal{F}$. Nous pouvons pour cela faire un raisonnement par récurrence (au sens usuel) sur la hauteur de F : nous serons alors amenés à montrer, d'abord que $Q(F)$ est vraie pour toute formule F appartenant a $\mathcal{F}_0$ puis que si $Q(F)$ est vraie pour toute $F \in \mathcal{F}_n$, alors $Q(F)$ est également vraie pour toute $F \in \mathcal{F}_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Principe. Si $Q(F)$ vérifie:

1) $Q(p)$ vraie $\forall p \in P$ i.e $(Q(F)$ vrais par $F \in \mathcal{F}_n)$.

2) $Q(F)$ vraie $\Rightarrow Q(\rceil F)$ vraie.

3) $Q(F)$ vraie et $Q(G)$ vraie $\Rightarrow Q(F * G)$ vraie $*, , \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow,$

alors $Q(F)$ est vraie $\forall F \in \mathcal{F}$.

Exemple. $Q(F)$ "F a tout de parenthèses ouvrantes que fermantes " i.e: $Q(F) = "O(F) = f(F)"$ on montrer que $Q(F)$ est vraie, $\forall F \in \mathcal{F}$ pour cela posons : $O(F) = \sharp$ parenthèses ouvrantes, $f(F) = \sharp$ parenthèses fermantes.

1) Soit $F = p \in P, \quad O(F) = f(F) = 0$, donc: $Q(p)$ est vraie.

2) On suppose que $Q(F)$ vraie $\Rightarrow Q(\urcorner F)$ vraie.

$$O(F) = f(F)$$

$$O(\urcorner F) = O(F) = f(F) = f(\urcorner F) \text{ i.e } : O(\urcorner F) = f(\urcorner F) \text{ i.e : } Q(\urcorner F) \text{ est vraie.}$$

3) Supposons que :

$$\left.\begin{array}{l} O(F) = f(F) \text{ et } O(G) = f(G) \\ O((F * G)) = O(F) + O(G) + 1 \\ f((F * G)) = f(F) + f(G) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow O((F{*}G)) = f((F{*}G)) \text{ donc } Q((F{*}G)) \text{ est vraie.}$$

Sous formules.

On définit l'ensemble $sf(F)$ des sous formules de F par:

- Si $F = p, sf(F) = \{p\}$
- Si $F = \urcorner G, sf(F) = \{sf(G)\} \cup \{F\}$.
- Si $F = (G * H), sf(F) = \{sf(G)\} \cup \{H\} \cup \{F\}$.

Exemple.

$$F = \urcorner(((\underbrace{p \Rightarrow q)}_{G} \wedge r) \iff \underbrace{s}_{H})$$

$$= \urcorner(\underbrace{G \iff H}_{K}) = \urcorner K$$

$$sf(F) = sf(\urcorner K) = sf(K) \cup \{F\}$$

$$K = (G \iff H)$$

$$sf(K) = sf(G) \vee sf(H) \cup \{K\}$$

$$H = s, \ donc : sf(H) = \{s\}$$

$$G = ((\underbrace{p \Rightarrow q}_{G_1}) \wedge \underbrace{r}_{G_2}) = (G_1 \wedge G_2)$$

$$sf(G) = sf(G_1 \wedge G_2) = sf(G_1) \vee sf(G_2) \cup \{G\}$$

$$sf(G_2) = \{r\}$$

$$G_1 = (p \Rightarrow q) \ donc, \ sf(G_1) = sf(p \Rightarrow q) = \{p, q\} \cup \{p \Rightarrow q\}$$

$$sf(F) = \{p, q, r, s, (p \Rightarrow q), (p \Rightarrow q) \wedge r, ((p \Rightarrow q) \wedge r) \iff s, F\}$$

2.4 L'interprétation d'une formule logique

2.4.1 Arbre de décomposition d'une formule

l'arbre A_F de la formule F est définie par récurrence sur F

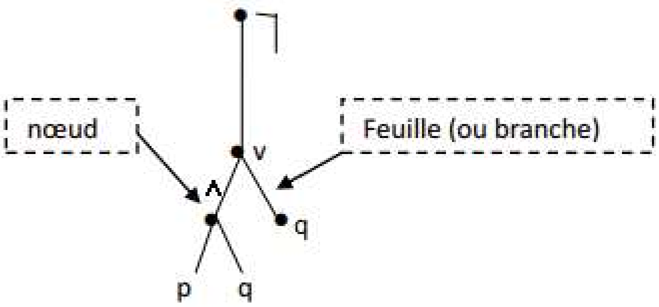
• $Si\, F = p, alors\ \ A_F = {}^0p.$

• $Si\, F = \rceil G, alors\ \ A_F = q^{\neg}_{A_G}.$

• $Si\, F = (G * H)\ alors\ A_F = \underset{A_G\ \ A_H}{\overset{*}{/\backslash}}$

Avec : $*$, $=$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$

Exemple. $F = \rceil((p \wedge q) \vee q)$



Exemple. $M = (((A \wedge (\rceil B \Rightarrow \rceil A)) \wedge (\rceil B \vee \rceil C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \rceil A))$

On posons : $M_0 = ((A \wedge (\rceil B \Rightarrow \rceil A)) \wedge (\rceil B \vee \rceil C))\ \ et\ \ M_1 = (C \Rightarrow \rceil A)$

il constatera d'abord que M s'écrit $(M_0 \Rightarrow M_1)$

ensuite posons : $M_{00} = (A \wedge (\rceil B \Rightarrow \rceil A))$, $M_{01} = (\rceil B \vee \rceil C)$, $M_{10} = c$, $M_{11} = \rceil A$ il écrira $M_0 = (M_{00} \wedge M_{01})\ et\ M_1 = (M_{10} \Rightarrow M_{11})$ pour suivant ainsi, il sera amené à poser successivement :

$M_{000} = A$, $M_{001} = (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$

$M_{010} = \rceil B$, $M_{011} = \rceil c$

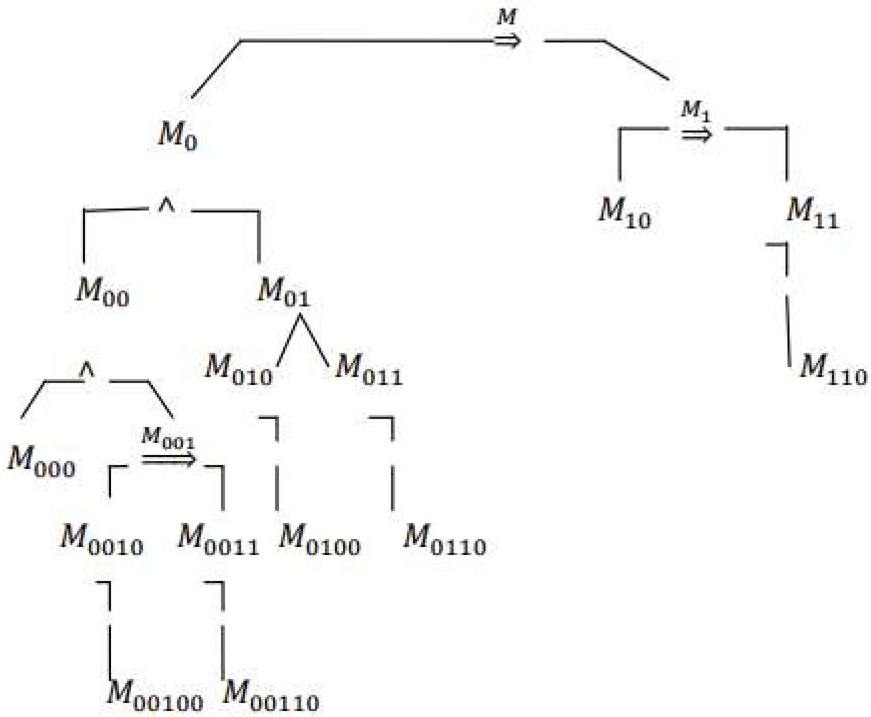
$M_{110} = A$, $M_{0010} = \rceil B$

$M_{0011} = \rceil A$, $M_{0100} = BM_{0110} = C$, $M_{00100} = B$, $M_{00110} = A$ de telle sort que :

$M_{00} = (M_{000} \wedge M_{001})$, $M_{01} = (M_{010} \vee M_{011})$, $M_{11} = \rceil M_{110}$, $M_{001} = (M_{0010} \Rightarrow M_{0011})$,

$M_{010} = \rceil M_{0100}$, $M_{011} = \rceil M_{0110}$, $M_{0010} = \rceil M_{00100}\ \ et\, M_{0011} = \rceil M_{00110}$

$h(M) = 5$ i.e : $M \in \mathcal{F}_5$.



Définition2.8. L'hauteur d'un arbre est le nombre maximum de feuillets de la racine à une extrémité de l'arbre, dans l'exemple 1 $h(F) = 3$.

Exemple. $F = \rceil(((\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{G} \wedge r) \Longleftrightarrow \underbrace{s}_{H})$

$F = \rceil(\underbrace{G \Longleftrightarrow H}_{K}) = \rceil K$

$A_F = \begin{array}{c} \rceil \\ | \\ A_K \end{array}$; $K = (G \Leftrightarrow H)$

$$\begin{array}{c} \rceil \\ | \\ A_K \\ \Longleftrightarrow \\ /\backslash \\ A_G \quad A_{H=s} \\ \wedge \\ /\backslash \\ \Longrightarrow \quad r \\ /\backslash \\ p \quad q \end{array}$$

$h(F) = 4$

Chaque nœud n détermine un sous-arbre A_n qui correspondance à une sous-formule F. Inversement l'arbre de chaque sous-formule est une sous- arbre de l'arbre de la formule

Ainsi :

Sous- formules de F = Sous-arbre de A_F

2.4.2 Substitution dans une formule

Soit F une formule et soient $p_1, p_2, ..., p_n$ des proposition élémentaires.

L'écriture $F[p_1, p_2, ..., p_n]$ signifie que les lettres de P qui sont dans F sont parmi les $p_i\,, i = 1, 2, ..., n$.

Exemple. $F = (p \iff (p \wedge q))$ on écrira $F[p\,, q]$, soit $F = F[p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n]$ une formule et soient $G_1, G_2, ..., G_n, n$ formules.

Définition2.9. On appelle $F\left[\frac{G_1}{p_1}, \frac{G_2}{p_2}, ..., \frac{G_n}{P_n}\right]$ le mot obtenu par remplacement (substitution) de G_i à la place de p.

Autre notation. $F_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{P_n}} = F[G_1, ..., G_2, q_1, q_2, ..., q_n]$

Exemple. $F = (p \iff (p \wedge q)) = F[p\,, q], on prend\, G = (q \Rightarrow p)$

$F_{\frac{G}{p}} = F(G\,, q) = ((q \Rightarrow p) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge q))$

Proposition. Le mot $F\left[\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{P_n}\right]$est aussi une formule.

Preuve. On raisonne par induction sur le formule F

- $F = p$
  - si $F = p_k$ alors $F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = G_k$
  - si $F = p \neq p_1, p_2, \ldots, p_n$, et $F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = F$ dans les deux cas, aux a une formule.

$\bullet F = \rceil\, G, on\ suppose\ G_{\frac{G_1}{p_1}, \ldots} G_{\frac{G_n}{p_n}}$ formule.

Alors $F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = \rceil G_{\frac{G_1}{p_1}, \ldots} G_{\frac{G_n}{p_n}}$ est aussi une formule.

$* \, F(G * H)$ avec $* = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ même raisonnement.

Théorème2.1 (Substitution et valuations). Soit v une valuation, F, G_1, G_2, ..., G_n des formules et $p_1, p_2, ..., p_n$ des propositions élémentaires, soit v' la valuation défini par :

$$v'(p) = \begin{cases} v(p) \; si \; p \neq p_1, p_2, ..., p_n. \\ \bar{v}(G_i) \; si \; p = p_i \;\; (1 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Alors : $\bar{v}\,(F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}'(F)$

Preuve.

1) $* \; F = p$

$* \; Si\, p \neq p_i,\, alors\; :\; F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = F \; et\, \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(F) = v(F) = v'(F) = \bar{v}'(F)$

$* \, Si\; p = p_i \; alors,\; F_{\frac{G_1}{p_1}}, F_{\frac{G_2}{p_2}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = G_i \; et \; : \; \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(G_i) = v'(p_i) = v'(F)$

$= \bar{v}'(F)$

2) $F = \rceil\, G \; et \; \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}'(G)$

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(\rceil\, G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v}'(G) = \bar{v}'(\rceil\, G) = \bar{v}'(F)$

$* \, F = (G * H)$

Si $= 1$, $F = (G \wedge H)$ et $\bar{v}(\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}) = \bar{v}'(G)$ et $\bar{v}(H_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}'(H)$,

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}} \wedge H_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., \frac{G_n}{p_n}) = \bar{v}(G).\bar{v}(H) = \bar{v}'(G).\bar{v}'(H) = \bar{v}'((G_1\, H))$

$= \bar{v}'(F)$ même chose pes les autre cas $*, =, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Corolaire. Si F est une autre tautologie alors la forme $F_{\frac{G_1}{p_1} \cdots \frac{G_n}{p_n}}$ est aussi une tautologie.

Preuve. Pour tout valuation v on a $\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1} \cdots \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}'(F_{\frac{G_1}{p_1} \cdots \frac{G_n}{p_n}})$

Théorème2.2. Soit F une formule, G une sous-formule de F et H une formule équivalente à G alors : $F' = F_{\frac{H}{G}}$ et logiquement équivalente à F

Preuve. Par indication sur les formules

- $Si\, F = p,\, G = F \; et \; F' = H \; et\, donc\, F' \sim F.$
- $Si\, F = \rceil\, F_1 \; alors \; G = F \; et\, donc\, H = F' \; et\, F \sim F' \; ou\, G \; est\, une\, sous{-}formule\, de\, F_1,$

$F_1' = F_{1\frac{H}{G}} \sim F_1$, *donc* $F' = \rceil F_1' \sim F$

• *Si* $F = F_1 * F_2$, $* = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ $. * = \wedge$, $F = F_1 \wedge F_2$alors il ya trois possibilités. ou bien $G = F$, $F' = H$ et on a $F' \sim F$. ou bien G est une sous-formule de F_1, et par hybothèse d'indication, la formule F_1', résultat de la substitution de H à G dans F_1, et logiquement équivalente à F_1. La formule F' est alors la formule $(F_1' \wedge F_2)$ elle est logiquement équivalente à F car,pour toute valuation v, on a $\bar{v}(F') = \bar{v}(F_1').\bar{v}(F_2) = \bar{v}(F_1).\bar{v}(F_2) = \bar{v}((F_1 \wedge F_2)) = \bar{v}(F)$ le raisonnement est tout à fait similaire dans la troisième éventualité, celle où G est une sous-formule de F_2 les cas $F = (F_1 \cup F_2)$, $F = (F_1 \Rightarrow F_2)$, $F = (F_1 \Leftrightarrow F_2)$ se traitent de façon analogue, en utilisant les propriétés :

$$v(\rceil F) = 1 + v(F)$$
$$v((F \vee G)) = v(F) + v(G) + v(F).v(G)$$
$$v((F \Rightarrow G)) = 1 + v(F) + v(F).v(G)$$
$$v(F \Rightarrow G) = 1 + v(F) + v(G).$$

2.5 Sémantique

Définition2.10. Une distribution de valeurs de vérité ou valuation v est une application : $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$ où P est l'ensemble des propositions élémentaires. On dit que v définit un modèle $\mathcal{M}$ des calcules propositionnel les valeurs $0\,et\,1$ représentent "vrais" et "faux" et peuvent aussi être notées $v = 1$, $F = 0$, $v \neq V$ Si P de cardinale n le nombre de valeurs de vérité différentes est exactement $2^n = 2^{\sharp P}$.

Exemple. $P = \{p, q\}$ on a donc $2^2 = 4$

1 1

1 0

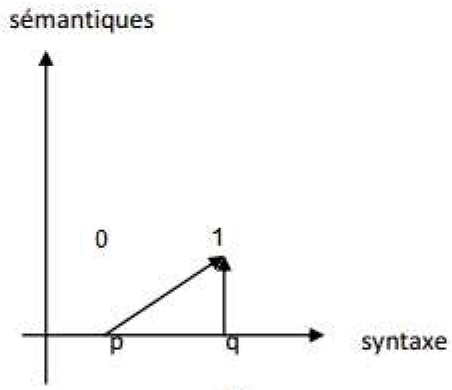
0 1

0 0 ?

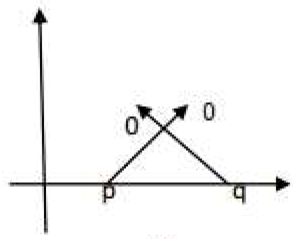
$$v_1 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\} \qquad v_2 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$p \longrightarrow 1 \qquad p \longrightarrow 1$$
$$q \longrightarrow 1 \qquad q \longrightarrow 0$$

$$v_3 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\} \qquad v_4 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$p \longrightarrow 0 \qquad p \longrightarrow 0$$
$$q \longrightarrow 1 \qquad q \longrightarrow 0$$

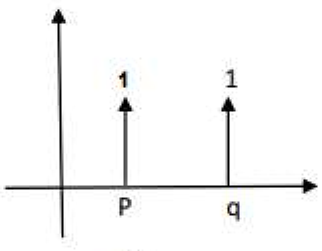
Le but de la sémantique est de donner des valeurs de vérité aux formules du calcul des propositions pour les différentes valuation définies sur les propositions élémentaires.



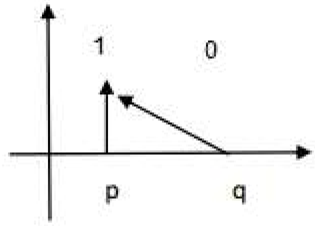
M_3



M_4



M_1



M_2

Théorème2.3. Pour toute valuation $v : P \longrightarrow \{0\,,\,1\}$ il existe une unique extension $\bar{v}$: $\mathcal{F} \longrightarrow \{0\,,\,1\}$ $(i.e\ \bar{v} = v\ sur\ P)$ et qui est telle que :

1) $\bar{v}(\rceil F) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = 0.$

2) $\bar{v}((F \wedge G)) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = \bar{v}(G) = 1.$

3) $\bar{v}((F \vee G)) = 0 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = \bar{v}(G) = 0$

4) $\bar{v}((F \Rightarrow G)) = 0 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = 1\, et\, \bar{v}(G) = 0.$

5) $\bar{v}((F \Leftrightarrow G)) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = \bar{v}(G)$

Preuve. Soient $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ deux extensions de v et soit $Q(F)$ la proposition

"$\bar{v}_1(F) = \bar{v}_2(F)$". On doit montrer que $Q(F)$ est vrais, $\forall F \in \mathcal{F}$

• $Si\, F = p$: $\bar{v}_1(F) = \bar{v}_2(F) = v(F)$ donc $Q(F)$ est vraie.

• $Si\, F = \rceil\, G\; et\; Q(G)$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}_1(F) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}_1(G) = 0 \\ \bar{v}_1(F) = 0 \Longleftrightarrow \bar{v}_1(G) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{v}_1(F) = \bar{v}_2(F)$$

Donc : $Q(F)$ est vraie aussi.

• Même chose pour $F = (G * H), * = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Remarque. Si on définit $+\; et\; .$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \{0\,,\,1\}$ par

$0 + 0 = 0$	$0 \times 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \times 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \times 0 = 0$
$1 + 1 = 0$	$1 \times 1 = 1$

les conditions 1) *et* 5) deviennent :

1) $\bar{v}(\rceil\, F) = 1 + \bar{v}(F).$

2) $\bar{v}((F \wedge G)) = \bar{v}(F)\, \bar{v}(G).$

3) $\bar{v}((F \vee G)) = \bar{v}(F) + \bar{v}(G) + \bar{v}(F)\, \bar{v}(G)$

4) $\bar{v}((F \Rightarrow G)) = 1 + \bar{v}(F) + \bar{v}(F)\, \bar{v}(G).$

5) $\bar{v}((F \Leftrightarrow G)) = 1 + \bar{v}(F) + \bar{v}(G)$

ces conditions sont aussi souvent écrites sous forme de vérité pour les connecteurs $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

F	$\rceil F$
0	1

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Exemple. $F = \rceil(((p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

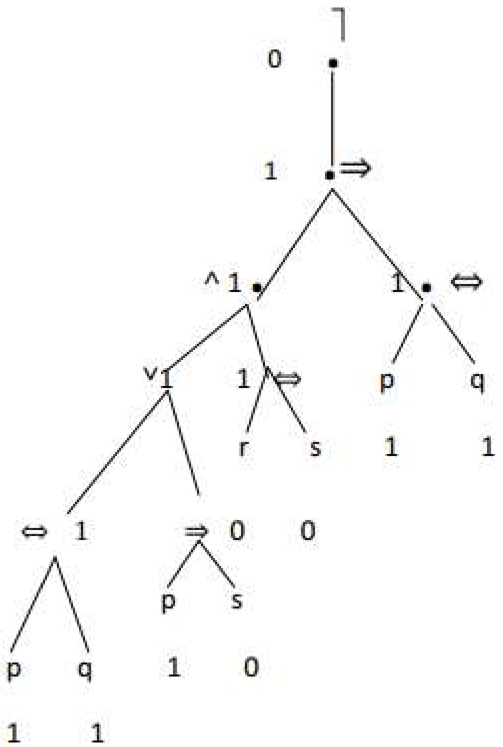
on suppose que $P = \{p, q, r, s\}$

$$\begin{aligned} v : P &\longrightarrow \{0\,, 1\} \\ p &\longrightarrow 1 \\ q &\longrightarrow 1 \\ r &\longrightarrow 0 \\ s &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Calculer $\bar{v}(F)$, donc : $\bar{v}(F) = 0$

F	G	$(F \Rightarrow G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

F	G	$F \Leftrightarrow G$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



2.6 Tautologie et équivalences logiques

Soit v une valeur de vérité définissant un modèle $\mathcal{M}$ du calcul propositionnel et soit $\bar{v}$ son extension sur les formules.

Définition2.11.

1) Le formule F est dite satisfaite dans le modèle $\mathcal{M}$ si $\bar{v}(F) = 1$, on note $\mathcal{M} \models F$ si non elle est dite non satisfaite $\bar{v}(F) = 0$, on note $\mathcal{M} \nvDash F$.

2) F est une tautologie si pour tout modèle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models F$, on note $\vDash F$.

Exemple. $F = (p \vee \rceil p)$, , $P = \{p\}$ â valeur de vérité $\bar{v}_2(F) = 1$ F est une anti tautologie si por tout modéle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \nvDash F$, on note $\nvDash F$.

Exemple. $F = (p \wedge \rceil q)$, $P = \{p\}$, $v_1 : p \longrightarrow 1$, $\bar{v}_1(F) = 0$

, $v_2 : p \longrightarrow 0$, $\bar{v}_2(F) = 0$.

- Une tautologie est donc une formule toujours vraie ($\forall$ la valuation).

- Une anti tautologie est une formule toujours fausse.

3) est logiquement équivalente à G si ($F \Leftrightarrow G$) est une tautologie, on note $F \sim G$. Autrement dit $\bar{v}(F) = \bar{v}(G)$ pour toute valuation v.

Exemple. $F = p$, $F \sim G$, car $(p \Leftrightarrow \rceil\rceil p)$ est une tautologie $G = \rceil\rceil p$.

Remarque.

1) En terme de table de vérité, une tautologie est une formule qui a des 1 par tout dans sa dernière colonne.

- Une anti-tautologie a des 0 par tout sur sa dernière colonne.

- Deux formules logiquement équivalentes ont les même tables de vérité.

2) $\sim$ définit sur $\mathcal{F}$ une relation d'équivalence l'ensemble quotient $\frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[F], F \in \mathcal{F}\}$, $[F] = \{G \in \mathcal{F}/F \sim G\}$ = les classes d'équivalence de F. Quant on compare deux formules "à équivalence logique " cela veut dire qu'on compare les classe correspondantes dans $\frac{\mathcal{F}}{\sim}$.

$$\left.\begin{aligned} F\,tautologie &\Longleftrightarrow \forall\, v,\, \bar{v}(F) = 1 \\ G\,tautologie &\Longleftrightarrow \forall\, v,\, \bar{v}(G) = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow F \sim G$$

donc : toutes les tautologie sont logiquement équivalentes est froments la classe 1.

De même toutes les anti-tautologies sont logiquement équivalentes et forment la classe 0.

3) $F = G \Rightarrow F \sim G$.

$F \sim G \nRightarrow F = G$.

$F \sim G \Rightarrow [F] = [G]$.

Exemple. Voici quelques tautologies sous-forme d'équivalence :

1) Idempotente de la conjonction et de la disjonction

$((p \wedge p) \Longleftrightarrow p)$

$((p \vee p) \Longleftrightarrow p)$

2) Commutativité de la conjonction, disjonction et équivalence :

$((p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)), \ ((p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)), \ ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p))$

3) Associativité de la conjonction, disjonction, équivelence :

$(((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))), \ (((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))),$

$(((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)))$

4) Distributivité de la disjonction/conjonction et réciproquement :

$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)), \ (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

5) Absorption :

$((p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p), \ ((p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p)$

6) Lois de Demorgan :

$(\rceil (p \vee q)) \Leftrightarrow (\rceil p \wedge \rceil q), \ (\rceil (p \wedge q)) \Leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil q)$

7) Contra posé e :

$((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p))$

8) $(\rceil\rceil p \Leftrightarrow p), \ ((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee q))$

Voici des formules non équivalentes :

$(p \wedge p)$ *et* $(q \wedge q)$ $\quad$ *(prendre* $v(p) = 1 - v(q)$*)*

$(p \Rightarrow p)$ *et* p $\quad$ *(prendre* $v(p) = 0$*)*

$(p \Leftrightarrow q)$ *et* $(p \Rightarrow q)$ $\quad$ *(prendre* $v(p) = 0,\ v(q) = 1$*)*

$(p \Rightarrow (p \Rightarrow p))$ *et* $((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$ $\quad$ *(prendre* $v(p) = 0$*)*

Remarque. Grâce à l'associativité de $\wedge$ *et* $\vee$ on peut adapter les notations suivantes : La formule $((F \wedge G) \wedge H)$ sera notée $(F \wedge G \wedge H)$.

La formule $((F \vee G) \vee H)$ sera notée $(F \vee G \vee H)$. plus généralement, pour tout entier naturel non k si $F_1, F_2, ..., F_k$ sont des formules on représentera par :

$$\underbrace{(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_k)}_{\bigwedge_{i=1}^{k} F_i} \underset{def}{=} F_1 \wedge (F_2 \wedge (... \wedge F_k...))$$

$$\underbrace{(F_1 \vee F_2 \vee ... \vee F_k)}_{\bigvee_{i=1}^{k} F_i} \underset{def}{=} F_1 \vee (F_2 \vee (... \vee F_k..))$$

dans la liste ci-dessous, les formule qui se trouvent sur une même ligne sont deux à deux logique équivalentes :

1) $(A \Rightarrow B), (\rceil A \vee B), ((A \wedge B) \Leftrightarrow A), ((A \vee B) \Leftrightarrow B)$.

2) $\rceil(A \Rightarrow B), (A \wedge \rceil B)$.

3) $(A \Leftrightarrow B), ((A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge \rceil B)), ((\rceil A \cup B) \wedge (\rceil B \cup A))$.

4) $(A \Leftrightarrow B), ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)), (\rceil A \Leftrightarrow \rceil B), (B \Leftrightarrow A)$.

5) $(A \Leftrightarrow B), ((A \cup B) \Rightarrow (A \wedge B))$.

6) $\rceil(A \Leftrightarrow B), (A \Leftrightarrow \rceil B), (\rceil A \Leftrightarrow B)$.

7) $A, (A \wedge T), (A \vee T), (A \Leftrightarrow T), (T \Rightarrow A)$.

8) $\rceil A, (A \Rightarrow \rceil A), ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \rceil B))$.

9) $\rceil A, (A \Rightarrow \perp), (A \Leftrightarrow \perp)$

10) $\perp, (A \wedge \perp), (A \Leftrightarrow \rceil A)$.

11) T, $(A \vee T)$, $(A \Rightarrow T)$, $(\perp \Rightarrow A)$.

12) $(A \Rightarrow (B \wedge C))$, $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$.

13) $(A \Rightarrow (B \vee C))$, $((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))$.

14) $((A \wedge B) \Rightarrow C)$, $((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$.

15) $((A \vee B) \Rightarrow C)$, $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$.

On retiendra des lignes de 12) à 15) qu'il n'y a pas distributivité de l'implication par rapport à la conjonction ou à les disjonction. On voit qu'il ya cependant distributivité à gauche 12) et 13), c'est à dire lorsque le "$\wedge$" ou le "$\vee$" se situent à droite du $\Rightarrow$. Dans le cas 14) et 15) on remarque qu'il ya une sorte de fausse distributivité le "$\wedge$"(resp :le $\vee$) étant transformé en "$\vee$"(resp :en $\wedge$.)

Théorème2.4 (substitutions et valuation) Soients v une valuation, F, G_1, G_2, ..., G_n des formules et $p_1, p_2, ..., p_n$ des propositions élémentaires.

Soit v' la valuation défini par :

$$v' = \begin{cases} v(p) \; si \; p \neq p_1, p_2, ..., p_n. \\ \bar{v}(G_i) \; si \; p = p_i \; (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Alors : $\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(F)$.

Preuve. On raisonne par indication sur les formules :

$* F = p$

- Si $p \neq p_i$ alors $F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}} = F \; et \; \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(F) = v(F) = v'(F) = \bar{v'}$.

- Si $p = p_i$ alors $F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}} = G_i \; et \; \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(G_i) = v'(p_i) = v'(F) = \bar{v'}(F)$

$* \; F = \rceil G \; et \; \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(G)$

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(\rceil G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v'}(G) = \bar{v'}(\rceil G) = \bar{v'}(F)$.

$* F = (G \wedge H) \; et \; \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(G) \; et \; \bar{v}(H_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(H)$

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}((G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) \wedge (H_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}})) = \bar{v}(G).\bar{v}(H) = \bar{v'}(G).\bar{v'}(H) = \bar{v'}(G \wedge H) = \bar{v'}(F)$.

Même chose pour les autres cas.

Corolaire. Si F est une tautologie alors la forme $F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}$ est aussi une tautologie.

Preuve : Pour toute valuation v on a : $\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}'(F) = 1$.

2.7 Systèmes complets de connecteurs

Définition2.12.

1) Pour tout n-uple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{0\,, 1\}^n$, on note $V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}$ la valuation définie par $V^{(p_i=\varepsilon_i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$

2) Pour chaque variable propositionnel p est pour chaque élément $\varepsilon \in \{0\,, 1\}$, nous notons ε_p la formule :

$$\varepsilon_p = \begin{cases} p \ si \ \varepsilon = 1 \\ \rceil p \ si \ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

3) Pour toute formule F on note par $\Delta(F) = \{v \in \{0\,, 1\}^n, \bar{v}(F) = 1\}$ toute formule F définit une application :

$$\varnothing_F : \{0\,, 1\}^n \longrightarrow \{0\,, 1\}$$
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \longmapsto \bar{v}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n}(F)$$

$\varnothing_F$ est compatible avec la relation d'équivalence logique. Autrement dit $F \sim G \Leftrightarrow \varnothing_F = \varnothing_G$.

$\varnothing_F$ définit donc par passage au quotient une application

$$\varnothing : \frac{\mathcal{F}}{\sim} \longrightarrow \{0\,, 1\}^{(0\,,1)^n}$$
$$.[F] \longmapsto \varnothing_F$$

$[F]$ la classe d'équivalence de la formule F pour la relation $\sim$

Théorème2.5 $\varnothing$ est une bijection.

Preuve.

1) $\oslash$ **injective :** soient $[F], [G]$ deux classes de formules

$\varnothing([F]) = \varnothing([G]) \Rightarrow \varnothing_F = \varnothing_G \Leftrightarrow F \sim G \Leftrightarrow [F] = [G]$.

Donc : $\varnothing$ est injective.

2) $\varnothing$ **surjective :** Soit $\varnothing : \{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}, \exists F \in \mathcal{F} / \varnothing = \varnothing\{F\}$?

$*$ Si $\varnothing$ ne prend que la valeur 0, alors toute anti-tautologie F vérifie $\varnothing = \varnothing_F$, par exemple $F = (p_1 \wedge \rceil p_1)$

$*$ Si non, l'ensemble $x = \oslash^{-1}(\{1\}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n / \varnothing(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = 1\}$ est non vide.

Soit $F_x = \bigvee_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\in X} (\bigwedge_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i\, p_i)$, alors $\triangle(F_x) = \{ \bigvee_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in X\}$........⊛ i.e : $\bar{v}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}(F_x) = 1 \Leftrightarrow \oslash(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = 1$, donc : $\oslash = \oslash_{F_x}$

pour, ⊛ $\forall\, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, $\Delta\, (\bigwedge_k \underset{k}{\varepsilon}\, \underset{k}{p}) = \bigvee_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}$,
$\Delta(\bigvee_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\in x} (\bigwedge_i \underset{i}{\varepsilon}\, \underset{i}{p})) = \{v_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in x\}$, $\bar{v}(\bigwedge_k \underset{k}{\varepsilon} \underset{k}{p}) = 1 \Leftrightarrow \bar{v}(\underset{k}{\varepsilon} \underset{k}{p}) = 1 \Leftrightarrow v(p_k) = v_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}(p_k)$.

Corolaire. Si $\sharp P = n$ alors il ya exactement 2^{2^n} classes de formules correspondant chacune à une application $\varnothing : \{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

Définition2.12. Une application $\varnothing : \{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}$ est appelé connecteur propositionnel à n places.

Exemple.

1) Selon la définition précédente il correspond aux connecteurs à 2, places.

$$\varnothing : \{0\,,\,1\}^2 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$(0\,,\,0) \longmapsto 0$$
$$(0\,,\,1) \longmapsto 0$$
$$(1\,,\,0) \longmapsto 0$$
$$(1\,,\,1) \longmapsto 1$$

Ou de façon équivalente à la classe de la formule $p_1 \wedge p_2$.

2) Un exemple de connecteur à une place est :

$$\varnothing : \{0\,,\,1\} \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto 0$$

Correspondant à la classe de $\rceil\, p_1$ est donc au connecteur usuelle $\rceil$.

3) Le connecteur à deux places suivant est appelé la barre de chefferie “ou“.

$$\begin{aligned} \varnothing\, :\, \{0\,,\, 1\}^2 &\longrightarrow \{0\,,\, 1\} \\ (0\,,\, 0) &\longmapsto 1 \\ (0\,,\, 1) &\longmapsto 0 \\ (1\,,\, 0) &\longmapsto 0 \\ (1\,,\, 1) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

de formule $\rceil(p_1\, \vee\, p_2)$.

2.7.1 Formes normales

Définition2.13. Une formule F est dit sous-forme normale disjonction canonique (FNDC) s'il existe un sous-ensemble non vide $x\ de\ \{0\,,\, 1\}^n / F\, =\, \bigvee_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in X} (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i\, p_i)$ elle est dite sous-forme normale disjonctive (FND) s'il existe :

$*$ Un entier $m\, \geq\, 1$

$*$ Des entiers $k_1, ..., k_m\, \geq\, 1$

$*$ Pour $1\, \leq\, i\, \leq\, m,\ k_i$ variable $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{ik_i}$ et k_i éléments $\varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{k_i}$ de $\{0\,,\, 1\}$ tel que :

$$F\, =\, \bigvee_{1\, \leq\, i\, \leq\, m} (\varepsilon_{i_1}\, p_{i_1}\, \wedge\, \varepsilon_{i_2}\, p_{i_2}\, \wedge\, ...\, \wedge\, \varepsilon_{ik_i} p_{ik_i})$$

On définit de même les formes normales conjonctives (FNC) et conjonctives canonique (FNCC)(en échangeant les symboles de disjonction et de conjonction)

Remarque. Une FNDC est une FND. De même une (FNCC) est une (FNC)

$(n\, =\, k_i,\, \forall\, i, p_{ij}\, =\, p_j)$

Théorème2.6 Toute formule F est logiquement équivalente à une FNC et une FND.

Exemple. la barre de chiffre : “ou“ $\rceil\,(p_1\, \vee\, p_2)\, =\, (p_1\, \vee\, p_2)\ \ \vee$:barre de chiffre “ou“.

p_1	p_2	F
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\varnothing_F \, : \, \{0\,,\,1\}^2 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

$\{0\,,\,1\}^2 \,=\, \{(0,0)\,,\,(0,1)\,,\,(1,0)\,,\,(1,1)\}$

$(0,0) \longmapsto 1,\; (0,1) \longmapsto 0$

$F \,= \rceil\,(p_1 \,\wedge\, p_2) \underset{def}{=} (p_1 \; p_2)$

$\wedge$: barre de chiffre “et“

$$\varnothing \,=\, \varnothing_F \,:\, \{0\,,\,1\}^2 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$

$$(0,0) \longmapsto 1$$

$$(0,1) \longmapsto 1$$

Un connecteur à n places est une application $\varnothing\,\{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

p_1	p_2	$\rceil(p_1 \,\wedge\, p_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Exemple. $F \,=\, ((p_1 \,\wedge\, p_2) \,\Rightarrow\, p_3)$

$\varnothing\,\{0\,,\,1\}^3 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

$(0,0,0) \longmapsto 1$

$(0,0,1) \longmapsto 1$

$(1,1,0) \longmapsto 0$

$\varnothing$ connecteur à 3 places.

Théorème2.7(de forme normale) Toute formule F est logiquement équivalente à (FND) au moins une formule sous-forme normale disjonctive et à au moins une formule sous-forme normale conjonctive (FNC).

Preuve. $*$ Si F est une tautologie, elle est logiquement équivalente à $p_1 \wedge \rceil p_1$ qui est une FND et une FNC. $*$ Si F ni une tautologie, ni une anti-tautologie alors par le théorème précédente, il existe $x \neq \varnothing / \varnothing_F = \varnothing_{F_x}$, $x\ de\ \{0\,,\,1\}^n$ i.e : $F \sim F_x$ qui est une FNDC donc aussi FND pour $\rceil F$, il existe aussi $x'/\rceil F \sim F_{x'}$, donc :
$F = \rceil\rceil F \sim \rceil(\vee(\wedge)) = \wedge(\vee) \sim FNCC$ (d'apré le loi de demorgan)

Exemple. $G = (A \Rightarrow (((B \wedge \rceil A) \vee (\rceil c \wedge A)) \Leftrightarrow (A \vee (A \Rightarrow \rceil B)))$ posons $H = (B \wedge \rceil A)$, $I = (\rceil c \wedge A)$, $j = (A \Rightarrow \rceil B)$, $k = (H \vee I)$, $L = (A \vee J)\ et\ M = (K \Leftrightarrow L)$. On a alors $G = (A \Rightarrow M)$ la table de vérité de G :

A	B	C	$\rceil A$	$\rceil B$	$\rceil C$	H	I	J	K	L	M	G
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

d'apré la table de vérité G est satisfaite par les valuation $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ tendit que $\rceil G$ est satisfaite par $(1,0,1)$ et $(1,1,1)$ on enduit la FNDC de G :
$(\rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C) \vee (\rceil A \wedge \rceil B \wedge C) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge \rceil C)$
puis la FNDC de $\rceil G\,(A \wedge \rceil B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ et enfin la FNCC de G : $(\rceil A \wedge B \wedge \rceil C) \wedge (\rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C)$

Exemple. $F = \rceil((\rceil p \Rightarrow q) \Rightarrow \rceil(q \Leftrightarrow p)$ on utilise l'équivalences :
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee q)$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\rceil p \vee q) \wedge (\rceil q \vee p))$

$$
\begin{aligned}
F &\sim \rceil(\rceil(\rceil p \Rightarrow q) \vee \rceil(q \Leftrightarrow p)) \\
&\sim \rceil(\rceil(\rceil\rceil p \vee q) \vee \rceil((\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q))) \\
&\sim \rceil(\rceil(p \vee q) \vee \rceil((\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)))
\end{aligned}
$$

on utilise ensuite les lois de Demorgan :

$\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow (\rceil p \wedge \rceil q)$

$\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil q)$

donc :

$$
\begin{aligned}
F &\sim \rceil\rceil(p \vee q) \wedge \rceil\rceil((\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)) \\
&\sim (p \vee q) \wedge (\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q) \\
&\sim (p \vee q) \wedge (\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)
\end{aligned}
$$

2.8 Système complets de connecteur

Définition2.14.

1) Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ un ensemble de connecteur d'arité quelconques, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ est système complet ssi : pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, il existe une formule G basée sur l'alphabet $P \cup \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \cup \{(,)\}$ tel que $F \sim G$

2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ est un système complet minimal si aucun sous-ensemble $A \underset{\neq}{\subset} \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ n'est pas un système complet.

Exemple : $\{\rceil, \vee, \wedge\}$ est système complet de connecteurs.

Proposition :

1)Le système $\{\rceil, \vee, \wedge\}$ n'est pas minimal.

2) Le système $\{\rceil, \vee\}$ est complet minimal.

3) Le système $\{\rceil, \wedge\}$ est complet minimal.

Preuve.

1) $(p \wedge q) \sim \rceil(\rceil p \vee \rceil q)$ donc 1 s'exprime en terme du $\rceil$ *et* $\vee$.

2) Supposons que $\vee$ s'exprime en terme de $\rceil$ toute formule est donc $\sim \rceil\rceil....\rceil p$ et donc à p ou $\rceil p$ ce qui n'est pas le cas de $(p \wedge q)$

2.8.1 Les théories

Définition2.15 Une théorie $\mathcal{Z}$ du calcul propositionnel est un ensemble de formules $T \subseteq \mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle défini par la valuation v on dit que :

1) T est satisfaite dans $\mathcal{M}$ *si* $\mathcal{M} \vDash F, \forall F \in T$ on écrit $\mathcal{M} \vDash T$.

2) T est consistant ou non contradictoire ou satis faible, s'il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \vDash T$.

3) T est finiment satis faible si et seulement si chaque sous-théorie finie $T' \subseteq T$ est satis faible (cette définition d'intérêt que pour les parties T infinies).

4) T est contradictoire ssi s'il n'est pas satis faible, i.e : n'a pas de modèle.

5) La formule F est une conséquence de T ssi tout modèle de T est un modèle de F, $\forall \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \vDash T \Rightarrow \mathcal{M} \vDash F$, on note $T \vDash F$ ou $(T \underset{\vdash}{*} F)$.

6) T *et* T' sont deux théories équivalentes ssi elle ont exactement les même modèles ou (toute formule de T conséquence de T' et toute formule de T' et conséquence de T).

Exemples. considérons des variables propositionnelles deux à deux distinctes p, q, p_1, p_2, ..., p_m ...: l'ensemble $\{p, q, (\rceil p \vee q)\}$ est satis faible; $\{p, \rceil q\}$ est contradictoire; l'ensemble vide est satis fait par l'importe quelle valuation.

$\{p, q\} \vDash (p \wedge q)$, $\{p, (p \Rightarrow q)\} \vDash q$, l'ensemble $\{p, q\}$ et $\{(p \wedge q)\}$ sont équivalentes de même que $\{p_1, p_2, ..., p_m, ..\}$ *et* $\{p_1 \wedge p_2 \wedge ...p_m \wedge ...\}$.

Lemme. quelque soient les théories T *et* T' les entiers et $p \geq 1$ et les formules G, H, F_1, F_2, ...F_m et G_1, G_2, ...G_p les propriètés suivants sont vérifiées :

$* T \vDash G$ ssi $T \cup \{\rceil G\}$ est contradictoire.

* Si T est satis faible et si $T' \subseteq T$ alors T' est satisfait.
* Si T est satis faible, alors T est finiment satis faible.
* Si T est contradictoire et si $T \subseteq T'$ alors T' est contradictoire.
* Si $T \models G$ et si $T \subseteq T'$ alors $T' \models G$.
* $T \cup \{G\} \models H$ si et seulement si $T \models (G \Rightarrow H)$.
* $T \models (G \wedge H)$ ssi $T \models G \; et \; T \models H$.
* $\{F_1, F_2, ..., F_m\} \models G$ ssi $\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m) \Rightarrow G)$.
* G est une tautologie ssi G est conséquence de l'élément.
* G est une tautologie ssi G est conséquence de l'importe quel ensemble de formules.
* G est contradictoire ssi $T \models (G \wedge \rceil G)$.
* G est contradictoire ssi toute anti-tautologie est conséquence.